УДК 512.552.12

ДІАГОНАЛІЗАЦІЯ МАТРИЦЬ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ НАД КВАЗІЕВКЛІДОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

О.М. Романів

O. Romaniv. *Diagonalization of matrices by elementary transformations over quasieuclidean rings*, Matematychni Studii, **8**(1997) 140–142.

The necessary and sufficient conditions under which a quasieuclidean ring admits the diagonal reduction by elementary transformations are found.

Класичне питання про зведення матриць до діагонального вигляду елементарними перетвореннями у найбільш загальній формі розглянув Б.В. Забавський. Він досліджував кільця, над якими кожна прямокутна матриця за допомогою скінченного числа елементарних перетворень зводиться до канонічного діагонального вигляду і ним же в [1] була поставлена задача повного описання таких кілець. Такі кільця належать до класу квазіевклідових кілець, які раніше вивчались в [2]. В даній роботі знайдено необхідні і достатні умови, при яких клас квазіевклідових кілець рівний класу кілець, над яким кожна прямокутна матриця за допомогою скінченного числа елементарних перетворень зводиться до канонічного діагонального вигляду.

Під кільцем будемо розуміти комутативне кільце з відмінною від нуля одиницею. Через $\mathcal{U}(R)$ позначимо групу одиниць кільця R, а через $M_n(R)$ — множину квадратних матриць порядку n. Множину максимальних ідеалів, які містять елемент a, позначимо $\operatorname{mspec}(a)$.

Кільце R називається *напівлокальним*, якщо воно є кільцем із скінченною кількістю максимальних ідеалів. Відзначимо, що термін напівлокальність не імплікує ланцюгові умови.

Під *квазі-алгоритмом* [2], заданим на кільці R, розуміємо таку функцію $\varphi\colon R \times R \to W$ (W — деякий ординал), де для довільних $a, b \in R$ ($b \neq 0$) існують такі $q, r \in R$, що $a = bq + r$ і $\varphi(b, r) < \varphi(a, b)$.

Кільце R називають *квазіевклідовим* [2], якщо існує деякий ординал W і квазі-алгоритм $R \times R \to W$. Прикладами квазіевклідових кілець є евклідові кільця, кільця нормування, регулярні кільця.

Позначимо через $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ матрицю з елементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ по головній діагоналі і нулями в інших місцях. Матриці A і B з елементами кільця R є еквівалентними, якщо існують такі зворотні над R матриці $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_s$, що $P_1 \cdot \ldots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s = B$. Якщо матриця A еквівалентна канонічній діагональній матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0)$, де $\varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1}R$, $i = 1, 2, \dots, r-1$, то говорять, що матриця A володіє діагональною редукцією.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

Якщо ж над кільцем R довільна матриця володіє діагональною редукцією, то кільце R називають *кільцем елементарних дільників* [3].

Кільце R називається *правим кільцем Ерміта*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують $c \in R$ і зворотня матриця $P \in M_2(R)$ такі, що $(a, b)P = (c, 0)$. Аналогічно можна означити *ліве кільце Ерміта.* В комутативному випадку ці класи кілець співпадають [3].

Критерій ермітовості (див. [4, теор. 3]). Комутативне кільце R є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли для довільних $a, b \in R$ існують такі $a_0, b_0, d \in R$, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $(a_0, b_0) = 1$.

В [2] доведено, що кожне квазіевклідове кільце є кільцем Ерміта. Використаємо цей факт для доведення наступних результатів

Твердження 1. *Квазіевлідове кільце R є кільцем, над яким довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями, тоді і тільки тоді, коли до цього вигляду зводиться кожна матриця $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ з $aR + bR + cR = R$.*

Доведення. Необхідність очевидна.

Для доведення достатності розглянемо випадок, коли $aR+bR+cR = dR$, де $d \notin \mathcal{U}(R)$. Якщо $a \in \mathcal{U}(R)$, то

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Остання матриця за допомогою елементарних перетворень легко зводиться до канонічного діагонального вигляду.

Тому нехай з точністю до позначень $a \notin \mathcal{U}(R)$. Оскільки R — кільце Ерміта [2], то в силу критерію ермітовості існують a_1, b_1, $c_1 \in R$ такі, що $a = da_1$, $b = db_1$, $c = dc_1$ і $a_1R + b_1R + c_1R = R$.

Запишемо:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Згідно припущень матриця $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{smallmatrix}\right)$ зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями, а оскільки $\mathrm{diag}(d, d)$ належить центру $M_2(R)$, то очевидно, що і матриця $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями.

Індукція за розмірами матриць завершує доведення. $\Box$

При доведенні наступної теореми ми використаємо метод, який був викладений в праці [5].

Теорема. *Нехай R — квазіевклідове кільце, в якому довільний необоротній елемент міститься в не більше ніж зліченній множині максимальних ідеалів. Тоді довільна матриця над R зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями.*

Доведення. В силу твердження 1 для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями вигляду $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, де $aR + bR + cR = R$.

Якщо $a \in \mathcal{U}(R)$, то, як вже було показано, матриця A зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями. Тому нехай $a \notin \mathcal{U}(R)$, тобто множина максимальних ідеалів, які містять a, непорожня ($\mathrm{mspec}(a) \neq \varnothing$). Нехай $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$. Тоді $b \notin \mathcal{M}_1$ (якщо б $b \in \mathcal{M}_1$, то

$(b+c) \notin \mathcal{M}_1$, оскільки $aR + bR + cR = R$ і елементарними перетвореннями стовпців елемент b можна замінити на $(b+c)$).

Оскільки R — кільце Ерміта, то існують такі елементарні перетворення, а, отже, така зворотня матриця P_1 (яка є скінченим добутком елементарних матриць), що $P_1 A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, де $aR + bR = a_1 R$.

Якщо $a_1 \in \mathcal{U}(R)$, то, аналогічно як вже було розглянено вище, матриця $P_1 A$ зведеться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями. Тому нехай $a_1 \notin \mathcal{U}(R)$ і з точністю до позначень будемо вважати, що $a_1 \in \mathcal{M}_2$. Тоді $b_1 \notin \mathcal{M}_2$ (або $(b_1 + c_1) \notin \mathcal{M}_2$, оскільки $a_1 R + b_1 R + c_1 R = R$) і існує така зворотня матриця Q_1, яка є скінченним добутком елементарних матриць, що $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, де $a_1 R + b_1 R = a_2 R$.

Продовжуючи даний процес далі, ми отримаємо сукупність матриць вигляду

$P_k A Q_k = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix}$, яким відповідає наступний ланцюг ідеалів

$$aR \subset a_1 R \subset a_2 R \subset \ldots \subset a_i R \subset \ldots, \tag{1}$$

де $a_i \notin M_i$.

Позначимо $\mathcal{I} = \bigcup_i a_i R$. Якщо $\mathcal{I} \neq R$, то існує максимальний ідеал $\mathcal{M}$ такий, що $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$. Оскільки $aR \subset \mathcal{I}$, то $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$, де $\mathcal{M}_s \in \operatorname{mspec}(a)$, що неможливо, оскільки існує ідеал $a_s R$ з ланцюга (1) такий, що $a_s \notin \mathcal{M}_s$. Тому $\mathcal{I} = R$, тобто ланцюг (1) скінченний, а, отже, існують такі зворотні матриці P_n, Q_n (які є скінченними добутками елементарних матриць), що $P_n A Q_n$ є канонічною діагональною матрицею. □

Наслідок 1. *Напівлокальне квазіевклідове кільце є кільцем елементарних дільників, причому довільна матриця над цим кільцем зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями.*

Наслідок 2. *Квазіевклідове кільце, в якому множина максимальних ідеалів є не більша, ніж злічення, є кільцем елементарних дільників, причому довільна матриця над цим кільцем зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями.*

Доведення цих наслідків очевидним чином випливає з наведеної теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zabavsky B.V. *Ring with elementary reduction matrix* Ring Theory Conference, Miskols, Hungary, July 15–20, 1996. P.14
2. Bougaut B. *Anneax Quasi-Euclidiens* Thèse de docteur de troisieme cycle. 1976. P.67.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* Trans. Amer. Math. Soc. 1966 (1949). P.464–491.
4. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor* Trans. Amer. Math. Soc. 82. 1956. P.362–365.
5. Забавский Б.В., Комарницкий М.Я. *Дистрибутивные области с элементарными делителями* Укр. мат. журнал. 42, №7, 1990. С.1000–1004.

Львівський університет, мех.-мат. ф-т.

Надійшло 1.10.1996