УДК 512.552.12

КІЛЬЦЯ, НАД ЯКИМИ ДОВІЛЬНА МАТРИЦЯ ДОПУСКАЄ ДІАГОНАЛЬНУ РЕДУКЦІЮ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

Б.В. Забавський

B. Zabavsky. *Rings over which every matrix admits the diagonal reduction by elementary transformations*, Matematychni Studii, **8**(1997) 136–139.

We show that 2-euclidean domains are domains over which every matrix admits the diagonal reduction by elementary transformations.

Важливий клас кілець, які широко використовувались як в класичній алгебрі, так і в сучасних алгебраїчних дослідженнях, становлять евклідові кільця. Наявність алгоритму Евкліда робить їх зручними в задачах, пов'язаних з різними матричними обчисленнями.

Відомо, що над евклідовими областями довільна матриця приводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями [3]. Природно виникає задача вивчення як комутативних, так і некомутативних кілець над, якими довільна матриця приводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями [4]. Крім евклідових областей, такими кільцями є регулярні кільця, кільця нормування [4]. У даній праці показано, що такими є 2-евклідові області.

Всі розглядувані кільця є комутативними з відмінною від нуля одиницею. Позначимо через $U(R)$ групу зворотніх елементів кільця R, а через R_n — кільце квадратних матриць порядку n з елементами з кільця R.

Наведемо необхідні означення і факти.

Під елементарною матрицею з елементами з кільця R [7] розуміємо квадратну матрицю одного з трьох типів:

1) діагональна матриця зі зворотніми елементами на головній діагоналі;
2) матриця з одиницями на головній діагоналі і нулями на всіх інших місцях, за винятком деякого місця поза головною діагоналлю;
3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

Під $GE_n(R)$ розуміємо групу, породжену елементарними матрицями порядку n другого типу. Позначимо через $GL_n(R)$ групу зворотніх над кільцем R матриць порядку n, а через $SL_n(R)$ — її підгрупу, яка складається із матриць з рівним одиниці детермінантом. Комутативне кільце без дільників нуля назвемо GE_n-областю, якщо $GL_n(R)$ породжується елементарними матрицями порядку n [7].

Скажемо, що матриці A і B з елементами з кільця R є елементарно еквівалентними (в позначеннях $A \overset{e}{\sim} B$), якщо існують елементарні над R матриці

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

$P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів такі, що $P_1 \dots P_k A = B Q_1 \dots Q_s$. Матриця A володіє елементарною редукцією, якщо вона елементарно еквівалентна деякій діагональній матриці $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0)$, де $\varepsilon_{i+1} R \subset \varepsilon_i R$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$) (під діагональною розуміємо взагалі кажучи прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі). Якщо ж над R довільна матриця володіє елементарною редукцією, то R називається кільцем з елементарною редукцією матриць (скорочено к.е.р.). Евклідові області є кільцями з елементарною редукцією матриць [3]. Очевидно, що к.е.р. є кільцями скінченнопороджених головних ідеалів, які ми називатимемо кільцями Безу.

Якщо на кільці R заданий квазі-алгоритм, тобто задана така функція $\varphi\colon R \times R \longrightarrow W$, де W — ординал, що для довільних $a, b \in R$, $b \neq 0$, існують $q, r \in R$ такі, що $a = bq + r$ і $\varphi(b, r) < \varphi(a, b)$, то кільце R називається квазіевклідовим [2]. Прикладами квазіевклідових кілець є евклідові кільця, регулярні кільця, кільця нормування [9].

Нехай $a, b \in R$, $b \neq 0$. Під n-членним ланцюгом подільності ми розуміємо послідовність рівностей: $a = q_1 b + r_1$; $\quad b = q_2 r_1 + r_2$; $\dots$ $r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$.

Нехай R — комутативне кільце без дільників нуля і припустимо, що існує функція $\mathcal{N}\colon R \longrightarrow \mathbb{Z}$ така, що $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(a) > 0$, якщо $a \neq 0$ і $\mathcal{N}(ab) \geq \mathcal{N}(a)$ для $a, b \in R \setminus \{0\}$. Таку функцію назвемо нормою на R. Слід відмітити, що умова $\mathcal{N}(ab) \geq \mathcal{N}(b)$ для $a, b \in R \setminus \{0\}$ є зайвою. Дійсно, якщо $\mathcal{N}\colon R \longrightarrow \mathbb{Z}$ — така функція, що $\mathcal{N}(0) = 0$ і $\mathcal{N}(a) > 0$ для $a \neq 0$, то взявши $\mathcal{N}_1(a) = \min\bigl\{\mathcal{N}(ab) \mid b \in R \setminus \{0\}\bigr\}$, легко переконатися, що функція $\mathcal{N}_1$ є нормою на R.

Назвемо комутативне кільце R без дільників нуля з заданою нормою $\mathcal{N}$ n-евклідовою областю стосовно норми $\mathcal{N}$, якщо для довільної пари (a, b), де $b \neq 0$, існує k-членний ланцюг для деякого $k \leq n$ такий, що $\mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b)$. Назвемо комутативне кільце R без дільників нуля w-евклідовим, якщо для довільної пари (a, b), $b \neq 0$, існує k-членний ланцюг подільності для деякого k такий, що $\mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b)$ [1]. Очевидно, що 1-евклідова область є евклідовою областю.

Комутативне кільце R називається кільцем стабільного рангу один, якщо для довільних $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $a + bt$ є зворотнім елементом кільця R.

Відзначимо ряд відомих результатів і наслідки з них.

Нехай R — область з елементарною редукцією матриць, тоді згідно означення R довільний рядок володіє елементарною редукцією. В силу [2, теор. 8] R є квазіевклідовою областю, а на основі [2, тв. 23] R є n-евклідовою областю, тобто має місце твердження.

Твердження 1. *Довільна область з елементарною редукцією матриць є n-евклідовою областю.*

Твердження 2 [1, тв. 14]. *Комутативне кільце без дільників нуля є w-евклідовою областю тоді і тільки тоді, коли воно є GE_2-областю Безу.*

Оскільки надалі розглядаються 2-евклідові області, то уточнимо означення таких областей. Комутативне кільце R без дільників нуля називається 2-евклідовою областю стосовно норми $\mathcal{N}$, якщо для довільних $a \in R$ і $b \in R \setminus \{0\}$ виконується одна з двох умов:

1) існують q, $r \in R$ такі, що $a = bq + r$, де $\mathcal{N}(r) < \mathcal{N}(b)$.
2) існують q_1, $r_1 \in R$ і q_2, $r_2 \in R$ такі, що $a = bq_1 + r_1$, $b = r_1 q_2 + r_2$, де $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(b)$.

Твердження 3. *Область Безу стабільного рангу один є 2-евклідовою областю.*

Доведення. Очевидно, що доведення досить провести для випадку двох взаємнопростих елементів. Нехай $a, b \in R$ і $aR + bR = R$. Згідно означення R існують елементи $t \in R$ і $u \in U(R)$ такі, що $a - bt = u$. Звідси $a = bt + u$, $b = uu^{-1}b + 0$. Згідно [7, тв. 1] R є 2-евклідовою областю.

Теорема 1. *2-евклідова область є областю з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Згідно твердження 2, доведення теореми достатньо провести для матриць другого порядку із взаємнопростими елементами. Нехай A є такою матрицею і в ній на перетині першого рядка і першого стовпця стоїть ненульовий елемент найменшої норми. Припустимо з точністю до позначень, що це є елемент a, тобто A має вигляд $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Нехай $b \neq 0$. Згідно означення R маємо $b = aq_1 + r_1$, $a = r_1q_2 + r_2$, де $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(a)$ ($\mathcal{N}$ — норма області R). Випадок, коли $r_2 \neq 0$ не становить інтересу, оскільки в даному випадку для матриці A існує елементарно еквівалентна матриця, в якій на перетині першого рядка і першого стовпця стоїть ненульовий елемент з нормою меншою, ніж норма елемента a, що суперечить вибору елемента a. Отже, нехай $b = aq + r$ і $a = rs$ для деяких $r, s \in R$. Тоді ми отримаємо наступний ланцюг елементарно еквівалентних матриць $A \overset{e}{\sim} \left(\begin{smallmatrix} a & b-aq \\ c & d-cq \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & r \\ * & * \end{smallmatrix}\right) \overset{e}{\sim} \left(\begin{smallmatrix} r & o \\ * & * \end{smallmatrix}\right) = B$.

Оскільки $rR \subset aR$, то згідно означення норми $\mathcal{N}$ і визначення елемента a маємо $\mathcal{N}(r) = \mathcal{N}(a)$. Тому шляхом елементарних перетворень матрицю A ми привели до трикутного вигляду $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$. Звідси випадок, коли $b = 0$ у матриці A, є несуттєвим. Отже, з точністю до позначень ми можемо важати, що матриця A має вигляд $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, причому a є ненульовим елементом R з найменшою нормою серед елементів матриць елементарно еквівалентних до A.

Слід відмітити, що $aR + bR + cR = R$. В силу обмежень на R, ми маємо $b = aq_1 + r_1$, $a = r_1q_2 + r_2$, де $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(r)$. Як у випадку стовпців, випадок $r_2 \neq 0$ є очевидним. Отже, нехай $r_2 = 0$. Тоді ми отримуємо наступний ланцюг елементарно еквівалентних матриць $A \overset{e}{\sim} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ r_1 & c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r_1q_2 & 0 \\ r_1 & c \end{smallmatrix}\right) = B$, причому $r_1q_2R + r_1R + cR = R$, бо $aR + bR + cR = R$. Оскільки $r_1q_2R + r_1R + cR = r_1R + cR$, то $r_1R + cR = R$. Так як 2-евклідова область є GE_2 областю Безу, то для рядка (r_1, c) існують елементарні матриці $P_1, \ldots, P_n$ другого порядку такі, що $(r_1, c)P_1 \ldots P_n = (1, 0)$. Звідси $BP_1 \ldots P_n = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = C$. Тоді очевидно, що матриця C, а значить, і матриця A володіє діагональною елементарною редукцією матриць. Теорему доведено.

Приклади 2-евклідових областей можна знайти в [1, 2]. Цікавим є приклад кільця всіх цілих алгебраїчних чисел. Таке кільце є областю Безу [8]. Крім того, воно не є областю головних ідеалів, оскільки не містить атомів, тобто воно не є евклідовою областю стосовно деякої норми. Таке кільце є областю стабільного рангу один [1]. Згідно твердження 2 і теореми 1 кільце всіх цілих алгебраїчних чисел є кільцем з елементарною редукцією матриць. Слід зауважити, що всі відомі приклади n-евклідових областей є 2-евклідовими областями [1]. Тому природно виникає задача чи всяка n-евклідова область є 2-евклідовою областю.

Розглянемо деякі застосування отриманих результатів.

В роботі [10] наведений наступний результат.

Твердження 4. *Комутативна область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільної матриці $A \in R_2$ з взаємнопро-*

стими елементами рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок.

Ці розв'язки можна шукати у вигляді $X = P\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)Q$, де $PAQ = \mathrm{diag}(1, \Delta)$, $P, Q \in GL_2(R)$.

У випадку областей Безу, над якими довільна матриця приводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями, очевидно, існує алгоритм обчислення матриць P і Q, а значить, і розв'язків X даного рівняння.

Перейдемо до розгляду групи $SL_2(R)$, де R — кільце з елементарною редукцією матриць. Тоді, згідно [2, теор. 19] R є областю Безу, в якій $GE_2(R) = SL_2(R)$, тобто довільну матрицю другого порядку з елементами з кільця R, визначник якої рівний одиниці, ми можемо зобразити у вигляді скінченного добутку матриць вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)$ і $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Для доведення цього слід відмітити, що група $GE_2(R)$ породжується матрицями вигляду $F(a) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)$, де $a \in R$. Справді,

$$F(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R),$$

$$F^{-1}(a) = F(0)F(-a)F(0) \in GE_2(R),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (F(0))^3 F(a), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = F(-a)(F(0))^3.$$

Як наслідок, отримуємо наступні результати.

Теорема 2. *Група $SL_2(R)$, де R — 2-евклідова область, породжується матрицями вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)$ і $\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, де $a, b \in R$.*

Теорема 3. *Група $SL_2(R)$, де R — область Безу стабільного рангу один, породжується матрицями вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right)$ і $\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, де $a, b \in R$.*

Слід відзначити, що обмеження на порядок матриць над такими кільцями не є суттєвим, як і обмеження на відсутність дільників нуля, але це є предметом окремих досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cooke G. *A weakening of the euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory, I* J. Reine angew. Math. 1976. V.282. P.133–156.
2. Bougant B. *Anneaux quasi-euclidiens* These doct. toisieme cycle. 1976. 67p.
3. Б.Л. ван дер Варден, Алгебра. — М.: Наука, 1979. 623с.
4. Zabavsky B. *Ring with elementary reduction matrix* Ring Theory Conf.-Miskolc, Hungary, July 19–20. 1996.
5. Васерштейн Л.Н. *О группе SL_2 над Дедекиндовым кольцом арифметического типа* Мат. сборник. 1972. Т.18. С.321–332.
6. Кон П. Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975. 422с.
7. Cohn P. *On the structure of the GL_2 of a ring* I. H. E. S. Publ. Math. 1966. V.30. P.365–413.
8. Kaplansky I. Commutative Rings. — Boston. 1970.
9. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V.66. P.464–491.
10. Забавський Б., Дяченко Н. *Критерий существования решения матричного уравнения специального вида над коммутативной областю Безу*

    VI симп. по теор. ком. алгебр и модулей. Львов. 11–13 октября 1990. С.53.

Львівський університет, механіко-математичний факультет,

Університетська 1, Львів, Україна

Надійшло 17.12.1996