УДК 517.98

ІСНУВАННЯ ЛІНІЙНОГО МНОГОВИДУ У ЯДРІ КОМПЛЕКСНОГО ПОЛІНОМІАЛЬНОГО ФУНКЦІОНАЛУ НА СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ЛІНІЙНОМУ ПРОСТОРІ

А.В. Загороднюк

A. Zagorodnyuk. *The existence of a linear manifold in a kernel of a complex polynomial functional on a finite dimension linear space*, Matematychni Studii, **8**(1997) 115–118.

We prove the following result. For any positive integers $d_1,\dots,d_s$ there exists a monotone increasing function $\Psi(d_1,\dots,d_s,m)\colon\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$ such that if $\Psi(d_1,\dots,d_s,m) = n$ then for each homogeneous polynomial functionals $p_1,p_2,\dots,p_s$ of degrees $d_1,\dots,d_s$ on a complex linear spase X, $\dim X=n$, there exists a linear subspace $V\subset X$, $\dim V=m$ such that $V\subset\bigcap_{i=1}^s\ker p_i$. Moreover, if $\dim X=\infty$, then $\dim V=\infty$.

Нагадаємо, що однорідним поліноміальним функціоналом p степеня k (скорочено k-мономом) заданим на лінійному просторі X називається звуження k-лінійного симетричного відображення $\bar p\colon X\times\cdots\times X\to\mathbb{C}$ (або $\mathbb{R}$) на діагональ $(x,\dots,x)$, яку природно ототожнюють з простором X. Скінченну суму $p_0+\cdots+p_k+\cdots+p_m$ k-мономів, $k=0,\dots,m$, називатимемо поліноміальним функціоналом (поліномом) степеня m. Моном нульового степеня вважатимемо рівним нулю. Основні відомості про поліноміальні функціонали можна знайти у працях [1–3].

Позначимо через $\Phi(d_1,\dots,d_s,n)\colon\mathbb{Z}_+^{s+1}\to\mathbb{Z}_+$ функцію від аргументів $d_1,\dots,$ d_s, $n\in\mathbb{Z}_+$, де $\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел, яка задовольняє наступні умови:

а) $\Phi(d_1,\dots,d_s,0):=0\ \ \forall d_1,\dots,d_s\in\mathbb{Z}_+$;

б) при $n>0$ і фіксованих $d_1,\dots,d_n$ значення $\Phi(d_1,\dots,d_s,n)$ дорівнює максимальному з тих m, що для будь-якого набору мономів $p_1,\dots,p_s\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ степенів $d_1,\dots,d_s$ відповідно, їх спільне ядро $V=\bigcap_{i=1}^s\ker p_i$ містить лінійний підпростір $W\subset\mathbb{C}^n$ розмірності m.

Відзначимо деякі очевидні властивості функції Φ.

1. Якщо $d_i=0$ для деякого i, то $\Phi(d_1,\dots,d_i,\dots,d_n)=\Phi(d_1,\ \dots,\ d_{i-1},\ d_{i+1},$ $\dots,\ d_s,n)$; зокрема, $\Phi(0,n)=n$.
2. $\Phi(d_1,\dots,d_s,1)=0$, якщо хоча б один з $d_1,\dots,d_s$ не обертається в нуль.
3. $\Phi(1,n)=n-1$ при $n\ge 1$.
4. $\Phi(d,n)>0$, якщо $n>1$.

Перевіримо властивість 4. Справді, p можна розглядати як комплексний моном на $\mathbb{C}^n$. Такий моном має ядро локальної розмірності $n-1$ в кожній точці деякої підмножини $\ker p$, щільної в топології Зариського [4]. Тому, при

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47H99.

$n > 1$ існує такий елемент $x_0 \neq 0$, що $p(x_0) = 0$. Тоді для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\lambda x_0) = \lambda^d p(x_0) = 0$, тобто $\Phi(d, n) \geq 1$.

5. При довільних фіксованих $d_1 \dots, d_n$, $\Phi(d_1, \dots, d_s, n)$ є монотонно неспадною функцією від n.
6. Функція $\Phi(d_1, \dots, d_s, n)$ симетрична відносно перших s аргументів.

Покладемо $\Psi(d_1, \dots, d_s, m) := \min\{n : \Phi(d_1, \dots, d_s, n) \geq m\}$. Функція Ψ відіграє роль оберненої функції до Φ, симетрична відносно аргументів $d_1, \dots, d_s$, при фіксованих $d_1, \dots, d_s$ — монотонно неспадна як функція від m. Вона (формально) задана або на відрізку цілих чисел $[0, m]$, або на $\mathbb{Z}_+$. Власне, наше основне завдання буде показати полягатиме в тому, щоб показати, що вона задана на $\mathbb{Z}_+$.

Теорема 1. *Для будь-якого фіксованого* $d_0 > 0$ $\quad \Phi(d_0, n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Лема. *Нехай при деякому фіксованому* $d_0 > 1$ $\quad \Phi(d, n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *для кожного* $d < d_0$. *Тоді для будь-яких* $d_1, \dots, d_s < d_0$

$$\Phi(d_1, \dots, d_s, n) \to \infty \quad (n \to \infty). \tag{1}$$

Доведення. За припущенням леми, функція $\Psi(d, m)$, обернена до $\Phi(d, n)$, визначена для кожного $d < d_0$ і кожного $m \in \mathbb{Z}_+$.

Зокрема, для фіксованого m визначене $\Psi(d_s, m)$, тобто ядро довільного монома p_s степеня $d_s < d_0$, заданого на довільному просторі розмірності $n_s = \Psi(d_s, m)$, містить підпростір розмірності m.

Далі, визначене $\Psi(d_{s-1}, n_s)$, тобто спільне ядро довільних мономів p_s та p_{s-1} степенів d_s та $d_{s-1} < d_0$ відповідно, заданих на довільному просторі розмірності $n_s = \Psi(d_{s-1}, n_s)$, містить підпростір розмірності m.

Продовжуючи цю процедуру, отримаємо, що визначене значення

$$n_1 = \Psi(d_1, \Psi(d_2, \Psi(d_3, \dots, \Psi(d_s, m) \dots),$$

тобто спільне ядро мономів $p_1, \dots, p_s$ степенів $d_1, \dots, d_s < d_0$ відповідно, заданих на лінійному просторі розмірності n_1, містить підпростір розмірності m.

Отже, визначена функція $\Psi(d_1, \dots, d_s, m)$, при цьому

$$\Psi(d_1, \dots d_s, m) \leq \Psi(d_1, \Psi(d_2, \dots \Psi(d_s, m) \dots). \tag{1'}$$

Звідси й випливає (1).

Легко бачити, що нерівність (1′) зберігається при будь-якій перестановці $d_1, \dots, d_s$. Тому формулу (1′) можна переписати у вигляді

$$\Psi(d_1, \dots, d_s, m) \leq \Psi^{c_1}(1, \Psi^{c_2}(2, \dots, \Psi^{c_k}(k, m) \dots),$$

де $k = \max(d_1, \dots, d_s)$, c_i — число степенів рівних i у множині $\{d_1, \dots, d_s\}$; $\Psi^{c_i}(d, m)$
$:= \Psi(d, \Psi(d, \dots, \Psi(d, m) \dots)$. Лему доведено.

Доведення теореми 1. Для $d_0 = 1$ це є властивість 3. Нехай теорему доведено для всіх $d < d_0$. Покажемо її справедливість для d_0. Нам треба показати, що для будь-якого натурального $m > 0$ існує таке n, що для будь-якого монома p степеня d_0, заданого на лінійному просторі X розмірності n, існує підпростір $V \subset \ker p$ розмірності m.

Нехай X — лінійний простір (невідомої ще) розмірності n, і p — моном степеня d_0 на ньому.

Якщо $p(X) \equiv 0$, то для цього p і для цього X підходить $n = m$. Якщо ж це не так, то візьмемо елемент $x_1 \in X$ з $p(x_1) \neq 0$.

Розглянемо мономи $p_1(x) = \bar{p}(x_1, x, \dots, x)$, $p_2(x) = \bar{p}(x_1, x_1, x, \dots, x)$,..., $p_{d_0-1}(x) = \bar{p}(x_1, \dots, x_1, x)$. Це (ненульові) мономи, степенів менших від d_0. За припущенням індукції та лемою спільне ядро $\bigcap_{i=1}^{d_0} \ker p_i$ містить підпростір V_1 розмірності $n_1 = \Psi(\Psi(1, \dots, \Psi(d_0 - 1, m) \dots)$.

Якщо $p(V_1) \equiv 0$, то для цього p і для цього X підходить $n = n_1$, яке залежить тільки від d_0 і m. Якщо ж це не так, то візьмемо елемент $x_2 \in V_1$ такий, що $p(x_2) \neq 0$.

Розглянемо мономи $p_{ij}(x) = \bar{p}(\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{i}, \overbrace{x_2, \dots, x_2}^{j}, x, \dots, x)$, де $0 < i + j < d_0$. Це — ненульові мономи степеня менше від d_0. За припущенням індукції та лемою спільне ядро $\bigcap_{i,j} \ker p_{ij}$ містить підпростір V_2 розмірності m якщо $n > n_2$, де $n_2 = \Psi^{C_1^2}(1, \Psi^{C_2^2}(2, \dots, \Psi^{C_{d_0-1}^2}(d_0 - 1, m) \dots)$, а

$$C_i^2 = \binom{d_0 - i}{1} + \binom{d_0 - i}{2}, \quad \binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

Тут ми враховували, що поліноми p_{ij} можна розставляти в довільному порядку і використовували позначення, введені після леми.

Якщо $p(V_2) \equiv 0$, то для цього p і для цього X підходить $n = n_2$, яке залежить тільки від d_0 і m. Якщо ж це не так, то візьмемо елемент $x_3 \in V_2$ такий, що $p(x_3) \neq 0$.

Продовжимо цей процес. Якщо для деякого $r < 2m$ буде $p(V_r) \equiv 0$, то, згідно з припущенням індукції та лемою, розмірність простору V_r дорівнює m, якщо $n \geq n_r$, де

$$n_r = \Psi^{C_1^r}(1, \Psi^{C_2^r}(2, \dots, \Psi^{C_{d_0-1}^r}(d_0 - 1, m) \dots), \tag{2}$$

а $C_i^r = \sum_{j=1}^{h} \binom{d_0 - i}{j}$, $\quad h = \max(r, d_0 - i)$.

Якщо ж процес не обірветься до $2m$-го кроку, то отримаємо послідовність елементів $x_1, \dots, x_{2m}$ з X таку, що для будь-якого набору комплексних чисел (a_i), $i = 1, \dots, 2m$, виконуватиметься рівність $p(\sum_{i=1}^{2m} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{2m} a_i^{d_0} p(x_i)$. Справді, послідовність $x_1, \dots, x_m$ вибрана так, що $\bar{p}(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) = 0$, $d = d_0$, якщо не всі $i_1, \dots, i_{d_0}$ рівні між собою і $p(x_i) \neq 0$ при $i = 1, \dots, m$. Покладемо $y_i = x_i / p(x_i)$; тоді p анулюватиметься на підпросторі Y, що є лінійною оболонкою елементів $y_1 + \sqrt{[d_0]{-1}} y_2, y_3 + \sqrt{[d_0]{-1}} y_4, \dots, y_{m-1} + \sqrt{[d_0]{-1}} y_m$, $y_{2m-1} + \sqrt{[d_0]{-1}} y_{2m}$, $\dim Y = m$. Отже, за шукане n можна взяти $\max(n_1, \dots, n_{2m-1}) = n_{2m-1}$, де n_{2m-1} можна обчислити за допомогою рекурентної формули (11) при $r = 2m - 1$. Тоді шуканим підпростором V буде один з підпросторів $X, V_1, \cdots, V_{2m-1}, Y$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *$\Psi(k, d)$ — монотонно зростаюча послідовність при $m \to \infty$ для кожного $d > 0$.*

Наслідок 2. *Для фіксованих $d_1, \dots, d_s$ $\quad \Phi(d_1, \dots, d_s, n) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Враховуючи, що функція Ψ є у певному сенсі оберненою до функції Φ, і наслідок 2, отримаємо

Теорема 2. *Для довільного набору натуральних $d_1, \dots, d_s$ існує монотонно зростаюча функція $\Psi(d_1, \dots, d_s, m) \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ така, що якщо $\Psi(d_1, \dots, d_s, m) = n$, тоді для всяких мономів $p_1, p_2, \dots, p_s$ степеня $d_1, \dots, d_s$ відповідно, заданих на комплексному лінійному просторі X, $\dim X = n$, існує лінійний підпростір $V \subset X$, $\dim V = m$ такий, що $V \subset \bigcap_{i=1}^{s} \ker p_i$.*

Наслідок 3. *Через кожну точку ядра полінома $p: X \to \mathbb{C}$ при достатньо великій розмірності простору X проходить афінний підпростір достатньо великої розмірності, який повністю лежить у ядрі. Зокрема, якщо простір X нескінченновимірний, то й підпростір також нескінченновимірний.*

Легко бачити, що у випадку нескінченновимірного простору теорема 1 доводиться аналогічно. Пряме доведення цього результату при для нескінченновимірного простору є у статті [5].

Наслідок 4. *Нехай X — нескінченновимірний комплексний лінійний простір, $p: X \to \mathbb{C}$ — поліном. Тоді для будь-якого $m > 0$ існує таке $n = \Psi(d_1, \dots d_k, m)$ таке, що для кожного підпростору $V \subset X$, $\dim V = n$, множина $\ker p \cap V$ містить афінний підпростір розмірності m. При цьому достатньо, щоб $n = \Psi(d_1, \dots, d_k, m)$, де $k = \deg p$, $d_i = i$, якщо моном степеня i у розкладі $p = p_0 + p_1 + \dots + p_k$ відмінний від нуля і $d_i = 0$ у супротивному випадку.*

Наслідок 5. *Через кожну точку графіка комплексного полінома p, заданого на n-вимірному лінійному просторі X, при достатньо великих n проходить афінний підпростір, який повністю лежить у цьому графіку.*

Справді, графік полінома $p: X \to \mathbb{C}$ можна розглядати, як ядро полінома $p(x) - y$, $x \in X$, $y \in \mathbb{C}$. Застосуємо до нього наслідок 3.

Приклад. Обчислимо $\Psi(2, m)$. За формулою (2)

$$\Psi(2,m) \le \Psi(\overbrace{1(\Psi(1,\dots,\Psi(1}^{2m-1},m)\dots) = \Psi^{2m-1}(1,m).$$

Враховуючи, що $\Psi(1, m) = m + 1$, отримаємо

$$\Psi(2,m) \le 2m - 1 + m = 3m - 1. \tag{3}$$

З іншого боку розглянемо квадратичний функціонал $q: \mathbb{C}^{3n-1} \to \mathbb{C}$ з $q(\sum_{i=1}^{3m-1} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{2m} a_i^2$, де x_i, $i = 1, ..., 3m-1$, — базис в $\mathbb{C}^{3m-1}$. Тоді ядро q містить лінійний підпростір $V = \mathrm{lin}(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, \dots, x_{2m-1} + ix_{2m})$, $\dim V = m$. Отже, у формулі (3) насправді має місце рівність.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bochnak J., Sisiak J. *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces* //Stud. Math. 1971. V.39. P.77–112.
2. Dineen S. Comlex analysis in locally convex spaces.- Amsterdam e.a.: North-Holland, 1981. 492 p.
3. Hyers D.H. *Polynomial operators* // Topics in Mathematical Analysis. 1989. P.410–444.
4. Рид М. Алгебраическая геометрия для всех.- М.:Мир, 1991 – 152с.
5. Plichko A., Zagorodnyuk A. *On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomial functionals* // J.Math.Anal. and Appl. (to appear).

м.Львів, вул. Наукова, 3б, ІППММ,

відділ нелінійного математичного аналізу

Надійшло 1.10.96
Після переробки 15.03.97