Математичні Студії. Т.8, №1 Matematychni Studii. V.8, No.1

УДК 517.98

ФАКТОРИЗАЦІЯ УНІМОДУЛЯРНОГО СИМВОЛА ОПЕРАТОРА ТЕПЛИЦЯ З НЕТРИВІАЛЬНИМ ЯДРОМ

С.П. Сікорський

S. Sikorskyi. *Factorization of the unimodular symbol of Toeplitz operator with untrivial kernel*, Matematychni Studii, **8**(1997) 113–114.

The question of factorization of the unimodular symbol φ in the case when the Toeplitz operator T_φ has an untrivial kernel is studied.

Нехай $\mathbb{T}$ — одиничне коло в $\mathbb{C}$. Позначимо через P_+ проектор Ріса, визначений на просторі розподілів $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ рівністю:

$$\mathrm{P}_+ f = \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n)\cdot z^n.$$

Для $\varphi \in L_\infty(\mathbb{T})$ визначимо оператор Теплиця $T_\varphi \colon H^p \to H^p$ $(1<p<\infty)$ з символом φ:

$$T_\varphi f = P_+ \varphi f.$$

Дана робота присвячена вивченню питань, пов'язаних з факторизацією символа φ у випадку нетривіального ядра оператора T_φ. Надалі ми користуватимемось позначеннями і термінологією робіт [1],[2].

Нехай In — множина всіх внутрішніх, а $\mathcal{E}$ — всіх зовнішніх функцій в крузі $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 1\}$. Надалі розглядатимемо тільки випадок унімодулярноі функції φ, тобто $|\varphi(e^{i\theta}|=1$ м.с. на $\mathbb{T}$.

В роботі доведена наступна

Теорема. *Якщо* $\operatorname{Ker} T_\varphi \neq \{0\}$, *то існують* $h\in H^p\cap\mathcal{E}$ *і* $\theta\cap\mathrm{In}$ *такі, що:*

$$\varphi = \overline{\theta}\cdot\frac{\overline{h}}{h}. \tag{1}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що якщо $\operatorname{Ker} T_\varphi \neq \{0\}$, то $\mathbf{1}\in\operatorname{Im} T_\varphi$.

Справді, якщо $f\in\operatorname{Ker} T_\varphi\setminus\{0\}$, то $g=\varphi\cdot f\in H^p_-$, де

$$H^p_- = \{f\in L^p : \forall n\geq 0\ \widehat{f}(n)=0\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47B35.

Ця робота частково підтримана Міжнародним Фондом Відродження, грант Соросівського Студента GSU051373.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Покладемо $m = \max\{n \in \mathbb{Z} : \widehat{g}(n) \neq 0\}, f_1 = z^{(-m)} \cdot f$. Враховуючи те, що $m < 0$, маємо $f_1 \in H^p$ і, крім того,

$$T_\varphi f_1 = P_+ z^{(-m)} g = \widehat{g}(m) \cdot \mathbf{1}.$$

Отже, $\mathbf{1} \in \operatorname{Im} T_\varphi$. Нехай $f \in H^p$ таке, що $T_\varphi = \mathbf{1}$. Тоді $g = \overline{\varphi} \bar{f} \in H^p$. Враховуючи те, що φ унімодулярна, маємо $|f(z)| = |g(z)|$ м.с. на $\mathbb{T}$.

З того, що $f, g \in H^p$, випливає існування $h \in H^p \cap \mathcal{E}$ і $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{In}$ таких, що:

$$g = \theta_1 \cdot h, f = \theta_2 \cdot h.$$

Тоді:

$$\varphi = \frac{\overline{g}}{f} = \frac{\overline{\theta} \cdot \overline{h}}{h},$$

де $\theta = \theta_1 \theta_2 \in \mathrm{In}$. Таким чином, теорему доведено.

Наслідок. *У випадку* $\dim \operatorname{Ker} T_\varphi = m < \infty$ θ *є скінченним добутком Бляшке з кількістю нулів, що не перевищує* m.

Назвемо функцію $\varphi_2 \in \mathrm{In}$ дільником функції $\varphi_1 \in \mathrm{In}$, якщо

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \in \mathrm{In}\,.$$

Крім того, для довільної $\theta \in \mathrm{In}$ через n_θ позначимо кількість її нулів з врахуванням їх кратностей. При доведенні наслідка з теореми використаємо наступне очевидне

Твердження. *Нехай* $\theta \in \mathrm{In}$ *така, що або* $n_\theta > m$ *або* θ *має своїм дільником сингулярну внутрішню функцію. Тоді існує система* $\theta_1, \dots \theta_{m+1} \subset \mathrm{In}$ *дільників* θ, *яка є лінійно незалежною.*

Доведення наслідка з теореми. Нехай φ має вигляд (1). Покажемо, що θ є скінченним добутком Бляшке з $n_\theta \leq m$. Справдӳ, якщо це не так, то згідно останнього твердження існує лінійно незалежна система $\theta_1, \dots, \theta_{m+1}$ з дільників функції θ. Нехай

$$f_k = h \cdot \theta_k - c_k \cdot h, c_k \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$T\varphi f_k = T\varphi(h \cdot \theta k) - T\varphi(c_k \cdot h) = \Big[\overline{\Big(\frac{h \cdot \theta}{\theta_k} \Big)}(0) - c_k \cdot \overline{(h \cdot \theta)}(0) \Big] \cdot \mathbf{1}.$$

Зрозумілим є те, що можна вибрати числа c_k так, щоб $f_k \in \operatorname{Ker} T_\varphi$. Але система f_k для $k = 1, \dots, m+1$ є лінійно незалежною. Тому $\dim \operatorname{Ker} T_\varphi \geq m+1$, що суперечить припущеному. Наслідок доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пеллер В.В., Хрущев С.В. *Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы* // Успехи мат. наук. 1982. Т.37, вып.1. С.53–124.
2. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции, — М.:Мир, 1984.

Львівський університет, мех.-мат. ф-т.

Надійшло 15.06.96