УДК 517.983

ТЕОРЕМА ПРО ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕКТРУ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ЧИСЛЕННЯ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ВІД НЕОБМЕЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

О.В. Лопушанський, В.А. Ряжська

O.V. Lopushansky, V.A. Riajska. *The mapping specrum theorem for the holomorphic calculus of several variables from the unbounded operators*, Matematychni Studii, **8**(1997) 97–110.

In this article the mapping specrum theorem for the holomorphic calculus of several variables from the unbounded operators in Banach spaces is proved. A new criterion for the generator of C_0-group is established.

У роботі для замкнених необмежених лінійних операторів, які діють у різних банахових просторах, встановлено загальні умови існування функціонального числення в класі голоморфних функцій багатьох змінних, заданих в околі прямого добутку спектрів операторів. В рамках цього числення доведено аналог теореми про відображення спектрів. Це узагальнює результати роботи [1] на випадок багатьох змінних.

Наведено застосування теореми про відображення спектрів до теорії однопараметричних груп операторів у банахових просторах. А саме, в термінах спектру і гладких векторів замкненого оператора встановлено необхідні і достатні умови того, коли він є генератором групи класу (C_0).

1. Нехай $\{(X^j\,,\,\|\,.\,\|_{X^j})\}_{j=1}^{J}$ — скінченний набір банахових просторів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $\otimes_j X^j \equiv X^1 \otimes \ldots \otimes X^J$ — їх тензорний добуток. Задамо на просторі $\otimes_j X^j$ так звану проективну норму

$$\|w\|_{\otimes_j X^j} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{X^1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{X^J}\,,$$

в якій inf береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j X^j$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^{N} \otimes_j x_n^j$ із скінченним N, де $x_n^j \in X^j$ і $\otimes_j x_n^j \equiv x_n^1 \otimes \ldots \otimes x_n^J \in \otimes_j X^j$. Одержаний нормований простір називають проективним тензорним добутком [2] і його поповнення позначають через $\widetilde{\otimes}_j X^j \equiv X^1 \,\widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes}\, X^J$.

Нехай $L(\widetilde{\otimes}_j X^j)$ — банахова алгебра лінійних обмежених операторів U над $\widetilde{\otimes}_j X^j$ з рівномірною нормою $\|U\|_{L(\otimes_j X^j)} = \sup\{\|Uw\|_{\otimes_j X^j} : 1 \geq \|w\|_{\otimes_j X^j}\}$. Над

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A60.

кожним із просторів X^j розглянемо банахову алгебру $L(X^j)$ лінійних обмежених операторів T_j з нормою $\|T_j\|_{L(X^j)} = \sup\{\|T_j x\|_{X^j} : 1 \geq \|x\|_{X^j}\}$. Тензорний добуток $\otimes_j L(X^j) \equiv L(X^1) \otimes \ldots \otimes L(X^J)$ є підалгеброю в $L(\widetilde{\otimes}_j X^j)$ і на ньому задамо норму $\|\,.\,\|_{L(\otimes_j X^j)}$. Поповнення $\otimes_j L(X^j)$ за нормою $\|\,.\,\|_{L(\otimes_j X^j)}$ позначимо через $\widehat{\otimes}_j L(X^j) \equiv L(X^1)\,\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, L(X^J)$.

Будь-якому з операторів $T_j \in L(X^j)$ можна співставити в алгебрі $\widehat{\otimes}_j L(X^j)$ оператор вигляду
$$\mathcal{T}_j = I_1 \otimes \ldots \otimes T_j \otimes \ldots \otimes I_J\,,$$
де I_j — одиничний оператор в $L(X^j)$. Тоді множині операторів $T_1, \ldots, T_J$ відповідає набір $\big[\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J\big]$ комутуючих операторів в алгебрі $\widehat{\otimes}_j L(X^j)$.

Позначимо спектр оператора T_j в алгебрі $L(X^j)$ через $\sigma(T_j)$. Нехай $L\big[T_j\big]$ — замкнена підалгебра банахової алгебри $L(X^j)$, породжена раціональними функціями (з нулями поза $\sigma(T_j)$) від оператора T_j і одиничного оператора I_j. Замкнена підалгебра в $L(\widetilde{\otimes}_j X^j)$ вигляду $\widehat{\otimes}_j L\big[T_j\big] \equiv L\big[T_1\big]\,\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\, L\big[T_J\big]$ комутативна.

Лема 1. *Для спектру $\sigma(\mathcal{T}_j)$ будь-якого з операторів $\mathcal{T}_j$ в алгебрі $L(\widetilde{\otimes}_j X^j)$ виконується рівність*
$$\sigma(\mathcal{T}_j) = \sigma(T_j)\,. \tag{1}$$
Сумісний спектр $\sigma(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J)$ набору операторів $\big[\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J\big]$, обчислений в підалгебрі $\widehat{\otimes}_j L\big[T_j\big]$, має вигляд
$$\sigma(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J) = \sigma(T_1) \times \ldots \times \sigma(T_J)\,, \tag{2}$$
де справа — підмножина в комплексному J-вимірному просторі $\mathbb{C}^J$.

Доведення. Сумісний спектр $\sigma(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J)$ в комутативній банаховій алгебрі $\widehat{\otimes}_j L\big[T_j\big]$ за означенням ([3], §11, 8) обчислюється на основі співвідношення
$$\sigma(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J) = \big\{(h(\mathcal{T}_1), \ldots, h(\mathcal{T}_J)) \in \mathbb{C}^J \,:\; h \in \mathrm{sp}\big(\widehat{\otimes}_j L\big[T_j\big]\big)\big\}\,, \tag{3}$$
де через $\mathrm{sp}(\,.\,)$ тут і далі позначено множину неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів відповідної комутативної алгебри.

Покажемо, що
$$\mathrm{sp}\big(\widehat{\otimes}_j L\big[T_j\big]\big) = \mathrm{sp}\big(L\big[T_1\big]\big) \times \ldots \times \mathrm{sp}\big(L\big[T_J\big]\big) \text{ —} \tag{4}$$
прямий добуток. Із результатів роботи [4] випливає, що (4) має місце, якщо на банаховій алгебрі $\widehat{\otimes}_j L\big[T_j\big]$ виконується умова : для будь-якого оператора вигляду $S_1 \otimes \ldots \otimes S_J \in \widehat{\otimes}_j L\big[T_j\big]$ задовольняється рівність
$$\|S_1 \otimes \ldots \otimes S_J\|_{L(\otimes_j X^j)} = \|S_1\|_{L(X^1)} \cdot \ldots \cdot \|S_J\|_{L(X^J)}\,. \tag{5}$$
Доведемо (5). Справедливі нерівності
$$\|(I_1 \otimes \ldots \otimes S_j \otimes \ldots \otimes I_J)w\|_{\otimes_j X^j} \leq$$
$$\leq \inf_{w = \sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{X^1} \cdot \ldots \cdot \|S_j x_n^j\|_{X^j} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{X^J} \leq \|S_j\|_{L(X^j)} \cdot \|w\|_{\otimes_j X^j}$$

для всіх $w \in \otimes_j X^j$. Оскільки множина скінченних сум щільна в $\widetilde{\otimes}_j X^j$, то одержуємо $\|I_1 \otimes \ldots \otimes S_j \otimes \ldots \otimes I_J\|_{L(\otimes_j X^j)} \le \|S_j\|_{L(X^j)}$ для всіх $j = 1, \ldots, J$. Звідси,

$$\|S_1 \otimes \ldots \otimes S_J\|_{L(\otimes_j X^j)} \le \|S_1 \otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_J\|_{L(\otimes_j X^j)} \cdot \ldots \cdot \\ \|I_1 \otimes \ldots \otimes I_{J-1} \otimes S_J\|_{L(\otimes_j X^j)} \le \|S_1\|_{L(X^1)} \cdot \ldots \cdot \|S_J\|_{L(X^J)}\,.$$

В іншу сторону, для заданого $\varepsilon > 0$ існують вектори $x^j \in X^j$ з нормою $\|x^j\|_{x^j} = 1$ такі, що $\|S_j x^j\|_{X^j} \ge \|S_j\|_{L(X^j)} - \varepsilon$. Тоді

$$\|(S_1 \otimes \ldots \otimes S_J)(\otimes_j x^j)\|_{\otimes_j X^J} = \|S_1 x^1\|_{X^1} \cdot \ldots \cdot \|S_J x^J\|_{X^J} \ge \\ \ge \|S_1\|_{L(X^1)} \cdot \ldots \cdot \|S_J\|_{L(X^J)} - \varepsilon\big(\|S_2\|_{L(X^2)} \cdot \ldots \cdot \|S_J\|_{L(X^J)} + \ldots + \\ + \|S_1\|_{L(X^1)} \cdot \ldots \cdot \|S_{J-1}\|_{L(X^{J-1})}\big) + \ldots + (-1)^J \varepsilon^J\,.$$

Враховуючи довільність ε, маємо $\|S_1 \otimes \ldots \otimes S_J\|_{L(\otimes_j X^j)} \ge \|S_1\|_{L(X^1)} \cdot \ldots \cdot \|S_J\|_{L(X^J)}$, і рівність (5) доведена.

Виходячи з (4) бачимо, що кожний лінійний мультиплікативний функціонал $h \in \mathrm{sp}\big(\otimes_j L[T_j]\big)$ має вигляд $h = (h_1, \ldots, h_J)$, де $h_j \in \mathrm{sp}\big(L[T_j]\big)$. Тому співвідношення (3) можна переписати у вигляді

$$\sigma(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J) = \big\{(h_1(T_1), \ldots, h_J(T_J)) \in \mathbb{C}_J :\ h_j \in \mathrm{sp}\big(L[T_j]\big)\big\}\,.$$

В [5] показано, що спектр оператора в довільній банаховій алгебрі може бути обчислений в її замкненій підалгебрі, породженій раціональними функціями від цього оператора із полюсами поза його спектром. Отже, $\sigma(T_j) = \{h_j(T_j) : h_j \in \mathrm{sp}(L[T_j])\}$ і рівність (2) доведена. Для випадку одного оператора співвідношення (3) має вигляд $\sigma(\mathcal{T}_j) = \big\{h(\mathcal{T}_j) \in \mathbb{C} : h \in \mathrm{sp}\big(L[T_j]\big)\big\}$, тому ті ж міркування приводять до рівності (1). •

2. Нехай для кожного $j = 1, \ldots, J$ задано необмежений замкнений лінійний оператор і голоморфну в околі нуля функцію з додатніми коефіцієнтами відповідно

$$A_j : \mathcal{D}(A_j) \subset X^j \to X^j \qquad \text{і} \qquad M_j(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{\mu_k(j)}\,.$$

Припустимо, що область визначення оператора $\mathcal{D}(A_j)$ щільна у просторі X^j.

Лема 2. *Для будь-якого числа $\nu > 0$ область*

$$\mathcal{D}^\nu(A_j) \equiv \Big\{x \in \mathcal{D}(A_j) :\ M_j\big(\frac{A_j}{\nu}\big)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(j)} \big(\frac{A_j}{\nu}\big)^k x\ \in X^j\Big\}$$

сильної абсолютної збіжності в просторі X^j операторного ряду $M_j\big(A_j/\nu\big)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|x\|_{\mathcal{D}^\nu(A_j)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(j)} \Big\|\big(\frac{A_j}{\nu}\big)^k x\Big\|_{X^j} \qquad \text{і} \qquad \|x\|_{X^j} \le \|x\|_{\mathcal{D}^\nu(A_j)} \quad \forall\, x \in \mathcal{D}^\nu(A_j)\,.$$

Доведення. Скористаємося теоремою 1 із роботи [1], згідно з якою множина $\{x \in \mathcal{D}(A_j) : \|x\|_{\mathcal{D}^\nu(A_j)} < \infty\}$ є банаховим простором відносно норми $\|\,.\,\|_{\mathcal{D}^\nu(A_j)}$, неперервно вкладеним в X^j. $\bullet$

Побудуємо тензорний добуток $\otimes_j \mathcal{D}^\nu(A_j) \equiv \mathcal{D}^\nu(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}^\nu(A_J)$ з проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^\nu(A_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathcal{D}^\nu(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{D}^\nu(A_J)}$$

і через $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j) \equiv \mathcal{D}^\nu(A_1) \,\widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes}\, \mathcal{D}^\nu(A_J)$ позначимо його поповнення.

Лема 3. *Для будь-якого числа $\nu > 0$ норма простору $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ має вигляд*

$$\|w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^\nu(A_j)} = \sum_{k_1,\ldots,k_J=1}^\infty \frac{1}{\mu_{k_1}(1) \cdot \ldots \cdot \mu_{k_J}(J)} \Big\| \big[\big(\frac{A_1}{\nu}\big)^{k_1} \otimes \ldots \otimes \big(\frac{A_J}{\nu}\big)^{k_J}\big] w \Big\|_{\otimes_j X^j}, \tag{6}$$

тобто простір $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ рівний області сильної абсолютної збіжності в $\widetilde{\otimes}_j X^j$ операторного ряду $M_1\big(A_1/\nu\big) \otimes \ldots \otimes M_J\big(A_J/\nu\big)$.

Доведення. Справді, наступна рівність перевіряється безпосередньо

$$\sum_{k_1,\ldots,k_J=1}^\infty \frac{1}{\mu_{k_1}(1) \cdot \ldots \cdot \mu_{k_J}(J)} \Big\| \Big[\big(\frac{A_1}{\nu}\big)^{k_1} \otimes \ldots \otimes \big(\frac{A_J}{\nu}\big)^{k_J}\Big] w \Big\|_{\otimes_j X^j} =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_J=1}^\infty \frac{1}{\mu_{k_1}(1) \cdot \ldots \cdot \mu_{k_J}(J)} \inf \Big[\sum_{n=1}^N \Big\|\big(\frac{A_1}{\nu}\big)^{k_1} x_n^1\Big\|_{X^1} \cdot \ldots \cdot \Big\|\big(\frac{A_1}{\nu}\big)^{k_J} x_n^J\Big\|_{X^J}\Big] =$$

$$= \inf \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathcal{D}^\nu(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{D}^\nu(A_J)} = \|w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^\nu(A_j)}\,,$$

де inf береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j X^j$ у вигляді скінченної суми $w = \sum_{n=1}^N \otimes_j x_n^j$. $\bullet$

Лема 4. *Для будь-яких $0 \le \nu \le \gamma$ і $w \in \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ виконуються співвідношення*

$$\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j) \subset \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\gamma(A_j) \subset \widetilde{\otimes}_j X^j \quad i \quad \|w\|_{\otimes_j X^j} \le \|w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^\gamma(A_j)} \le \|w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^\nu(A_j)}\,. \tag{7}$$

Доведення. Згідно з відомою теоремою Гротендіка ([6], III, 6.4), довільний елемент w із поповнення проективного тензорного добутку банахових просторів $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\gamma(A_j)$ можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду $w = \sum_{n=1}^\infty \otimes_j x_n^j$. В силу нерівності із леми 2 маємо

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n^1\|_{X^1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{X^J} \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n^1\|_{\mathcal{D}^\gamma(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{D}^\gamma(A_1)} < \infty\,,$$

тобто ряд абсолютно збігається в просторі $\widetilde{\otimes}_j X^j$. Повнота $\widetilde{\otimes}_j X^j$ забезпечує збіжність у $\widetilde{\otimes}_j X^j$ ряду $w = \sum_{n=1}^{\infty} \otimes_j x_n^j$, тому $w \in \widetilde{\otimes}_j X^j$, і друге вкладення з (7) показано. Перша з нерівностей (7) випливає з означення проективних норм і попередньої нерівності для рядів. Замінюючи у наведених міркуваннях простір $\widetilde{\otimes}_j X^j$ на $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^{\nu}(A_j)$, переконуємося в справедливості решти співвідношень із (7). •

Побудуємо простір рядів

$$l_1[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j); \widetilde{\otimes}_j X^j] \equiv \Big\{ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \in \widetilde{\otimes}_j X^j : w_n \in \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_{\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)} < \infty \Big\}$$

з нормою вигляду

$$\|w\|_{l_1} = \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_{\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)} :\ \text{по всіх}\ \sum_{n=1}^{\infty} w_n = w \Big\}\,.$$

Лема 5. *Якщо для кожного $j = 1, \dots, J$ об'єднання $\bigcup_{\nu>0} \mathcal{D}^{\nu}(A_j)$ є щільним у просторі X^j, то реалізується ізометричний ізоморфізм*

$$\widetilde{\otimes}_j X^j \simeq l_1[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j); \widetilde{\otimes}_j X^j]\,. \tag{8}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що для будь-якого $w \in \bigcup_{\nu>0} \big(\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^{\nu}(A_j)\big)$ справедлива рівність

$$\|w\|_{\otimes_j X^j} = \lim_{n\to\infty} \|w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^n(A_j)}\,. \tag{9}$$

Нехай $w \in \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Користуючись згаданою вище теоремою Гротендіка, можемо вибрати деяке зображення елемента w у вигляді абсолютно збіжного ряду $w = \sum_{k=1}^{\infty} \otimes_j x_k^j$. Цей ряд буде також абсолютно збіжним у кожному із просторів $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^m(A_j)$ при $m \geq n$. Покладемо

$$|w|_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^1\|_{\mathcal{D}^n(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_k^J\|_{\mathcal{D}^n(A_J)}.$$

Оскільки для будь-яких j та $x \in \mathcal{D}^n(A_j)$ виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \|x\|_{\mathcal{D}^n(A_j)} = \|x\|_{X^j}$, то

$$\lim_{n\to\infty} |w|_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^1\|_{\mathcal{D}^n(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_k^J\|_{\mathcal{D}^n(A_J)} = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^1\|_{X^1} \cdot \ldots \cdot \|x_k^J\|_{X^J}\,.$$

Це справджується для довільного зображення. Розглядаючи inf по всіх зображеннях елемента w, одержуємо

$$\inf \big[\lim_{n\to\infty} |w|_n\big] = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^1\|_{X^1} \cdot \ldots \cdot \|x_k^J\|_{X^J} = \|w\|_{\otimes_j X^j}\,.$$

Звідси, враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\inf|w|_n\big) = \lim\limits_{n\to\infty}\|w\|_{\otimes_j\mathcal{D}^n(A_j)} = \|w\|_{\otimes_j X^j}$, приходимо до рівності (9).

З очевидної нерівності $\|w\|_{\otimes_j X^j} \le \|w\|_{l_1}$, де $w \in l_1[\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j);\widetilde{\otimes}_j X^j]$, одержуємо вкладення $l_1[\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j);\widetilde{\otimes}_j X^j] \subset \widetilde{\otimes}_j X^j$.

З іншого боку, $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j) \subset l_1[\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j);\widetilde{\otimes}_j X^j]$ і $\|w\|_{l_1} \le \|w\|_{\otimes_j\mathcal{D}^m(A_j)}$, коли $w \in \widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j)$ для всіх $m \ge n$. Користуючись далі (9), одержуємо наступну нерівність $\|w\|_{l_1} \le \|w\|_{\otimes_j X_j}$ для всіх $w \in \bigcup_{\nu>0}\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$. Таким чином, має місце ізометричне вкладення $\bigcup_{\nu>0}\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big) \subset l_1[\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j);\widetilde{\otimes}_j X^j]$.

З рівності $\bigcup_{\nu>0}\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big) = \widetilde{\otimes}_j\big(\bigcup_{\nu>0}\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$ і умови щільності $\overline{\bigcup_{\nu>0}\mathcal{D}^\nu(A_j)} = X^j$ випливає, що $\overline{\bigcup_{\nu>0}\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)} = \widetilde{\otimes}_j X^j$. Отже, ізометрія (8) встановлена. •

3. Перейдемо до аналізу спектральних властивостей скінченної кількості необмежених операторів $\{A_j\}_{j=1}^J$ над тензорним добутком банахових просторів $\widetilde{\otimes}_j X^j$.

Спектр необмеженого оператора A_j над банаховим простором X^j позначаємо через $\sigma(A_j)$, через $R(\zeta, A_j) = (\zeta I_j - A_j)^{-1}$, де ζ лежить у резольвентній множині $\rho(A_j) \equiv \mathbb{C}\setminus\sigma(A_j)$, — його резольвенту. Кожному A_j над простором $\widetilde{\otimes}_j X^j$ поставимо у відповідність оператор

$$\mathcal{A}_j \equiv I_1 \otimes \ldots \otimes A_j \otimes \ldots \otimes I_J\,.$$

Область визначення оператора $\mathcal{A}_j$, в якій він є замкненим над простором $\widetilde{\otimes}_j X^j$, може бути визначена на основі теореми Гротендіка про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку абсолютно збіжними рядами і рівна підпросторові

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_j) \equiv \Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\otimes_i x_n^i \in \widetilde{\otimes}_i X^i:\ x_n^j \in \mathcal{D}(A_j),\ x_n^i \in X^i \text{ при } i \ne j\Big\}$$

і є щільною в $\widetilde{\otimes}_j X^j$. Спільна область визначення $\bigcap_{j=1}^J\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ набору операторів $\big[\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_J\big]$ також є щільною в просторі $\widetilde{\otimes}_j X^j$ і на ній оператори $\mathcal{A}_j$ комутують між собою.

Лема 6. *Для будь-якого $j = 1,\ldots,J$ справедлива рівність*

$$\sigma(\mathcal{A}_j) = \sigma(A_j)\,, \tag{10}$$

де $\sigma(\mathcal{A}_j)$ — спектр необмеженого оператора $\mathcal{A}_j$ над простором $\widetilde{\otimes}_j X^j$.

Доведення полягає у безпосередній перевірці рівності

$$R(\zeta,\mathcal{A}_j) = I_1\otimes\ldots\otimes R(\zeta,A_j)\otimes\ldots\otimes I_J\,, \quad \text{де} \quad R(\zeta,\mathcal{A}_j) = \big[\zeta(I_1\otimes\ldots\otimes I_J) - \mathcal{A}_j\big]^{-1} \text{ —}$$

резольвента оператора $\mathcal{A}_j$ над простором $\widetilde{\otimes}_j X^j$, визначена при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\sigma(\mathcal{A}_j)$. •

Слідуючи [1], введемо локально опуклу індуктивну границю банахових просторів

$$\mathcal{D}^M(A_j) \equiv \bigcup_{\nu>0}\mathcal{D}^\nu(A_j) = \liminf_{\nu\to+\infty}\mathcal{D}^\nu(A_j)\,.$$

Індуктивна границя $\lim\operatorname{ind}_{\nu\to+\infty}\mathcal{D}^\nu(A_j)$ володіє властивістю регулярності (див. [1], теорема 2) і є повним локально опуклим простором типу (DF) [7, 8].

Розглянемо об'єднання $\bigcup_{\nu>0}\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$. Співвідношення (6) і (7) із леми 4 дозволяють на $\bigcup_{\nu>0}\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$ визначити індуктивну границю $\lim\operatorname{ind}_{\nu\to+\infty}$ $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)$. Аналогічно, як і в [1], можна показати, що остання регулярна, тобто, будь-яка її обмежена підмножина міститься в деякому підпросторі $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)$.

Побудуємо тензорний добуток $\otimes_j\mathcal{D}^M(A_j)\equiv\mathcal{D}^M(A_1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{D}^M(A_J)$ з проективною локально опуклою топологією (див. [6], III, 6). Поповнення простору $\otimes_j\mathcal{D}^M(A_j)$ в цій топології позначимо через $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\equiv\mathcal{D}^M(A_1)\,\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}$ $\mathcal{D}^M(A_J)$.

Лема 7. *Справедливий топологічний ізоморфізм просторів*

$$\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\simeq\lim_{\nu\to+\infty}\operatorname{ind}\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\,. \tag{11}$$

Доведення базується на топологічних ізоморфізмах вигляду

$$\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\simeq\lim_{\nu_j\to+\infty}\operatorname{ind}\big[\mathcal{D}^M(A_1)\,\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\,\mathcal{D}^{\nu_j}(A_j)\,\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\,\mathcal{D}^M(A_J)\big]\,,$$

які для випадку просторів типу (DF) встановлено в роботі [9]. Після чого залишається скористатися очевидним топологічним ізоморфізмом

$$\lim_{\nu_1\to+\infty}\operatorname{ind}\ldots\lim_{\nu_J\to+\infty}\operatorname{ind}\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^{\nu_j}(A_j)\simeq\lim_{\nu\to+\infty}\operatorname{ind}\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\,. \qquad\bullet$$

Припустимо, що індуктивна границя $\mathcal{D}^M(A_j)$ задовольняє наступну умову: існує число $d_j\in(0,+\infty)$ таке, що $\mu_{k+m}(j)/\mu_m(j)\le d_j^k$ для всіх $k\,,m\in\mathbb{Z}_+$.

Крім того, припускаємо, що кожна з індуктивних границь $\mathcal{D}^M(A_j)$ відповідного оператора A_j задовольняє умову щільності $\overline{\mathcal{D}^M(A_j)}=X_j$.

Тоді (див. [1], теорема 4 і наслідок 2) для будь-якого $\nu>0$ простір $\mathcal{D}^\nu(A_j)$ є інваріантним відносно оператора A_j і відповідне звуження $A_{j,\nu}\equiv A_j|\mathcal{D}^\nu(A_j)$ належить алгебрі $L\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$ лінійних обмежених операторів над $\mathcal{D}^\nu(A_j)$. В алгебрі $L\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$ задаємо рівномірну операторну норму. Одиничний оператор $L\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$ позначаємо через $I_{j,\nu}$. Замкнену підалгебру в $L\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$, породжену раціональними функціями від операторів $A_{j,\nu}$ і $I_{j,\nu}$ із полюсами поза спектром $\sigma(A_j)$, позначимо через $L\big[A_{j,\nu}\big]$.

Введемо сукупність алгебр $\big\{L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)\big\}_{\nu>0}$ з рівномірними операторними нормами $\|\,.\,\|_{L(\otimes_j\mathcal{D}^\nu(A_j))}$. У кожній з цих банахових алгебр $L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$, як і в $n^\circ\mathbf{1}$, розглянемо підалгебру $\otimes_jL\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)\equiv L\big(\mathcal{D}^\nu(A_1)\big)\otimes\ldots\otimes L\big(\mathcal{D}^\nu(A_J)\big)$ і її поповнення $\widehat{\otimes}_jL\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)\equiv L\big(\mathcal{D}^\nu(A_1)\big)\widehat{\otimes}\ldots\widehat{\otimes}L\big(\mathcal{D}^\nu(A_J)\big)$ за нормою $\|\,.\,\|_{L(\otimes_j\mathcal{D}^\nu(A_j))}$. Зрозуміло, що $\otimes_jL\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$ містить підалгебру вигляду $\otimes_jL\big[A_{j,\nu}\big]\equiv L\big[A_{1,\nu}\big]\otimes$ $\ldots\otimes L\big[A_{J,\nu}\big]$ і її відповідне поповнення $\widehat{\otimes}_jL\big[A_{j,\nu}\big]\equiv L\big[A_{1,\nu}\big]\,\widehat{\otimes}\ldots\widehat{\otimes}\,L\big[A_{J,\nu}\big]$.

Поставимо у відповідність звуженню $A_{j,\nu}$ оператор із підалгебри $\otimes_jL\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$ вигляду

$$\mathcal{A}_{j,\nu}\equiv I_{1,\nu}\otimes\ldots\otimes A_{j,\nu}\otimes\ldots\otimes I_{J,\nu}\,.$$

Очевидно, $\big[\mathcal{A}_{1,\nu},\ldots,\mathcal{A}_{J,\nu}\big]$ — набір комутуючих операторів у банаховій алгебрі $\widehat{\otimes}_jL\big(\mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$. На основі леми 1, одержуємо рівність

$$\sigma(\mathcal{A}_{1,\nu},\ldots,\mathcal{A}_{J,\nu})=\sigma(A_{1,\nu})\times\ldots\times\sigma(A_{J,\nu})\,, \tag{2'}$$

де $\sigma(\mathcal{A}_{1,\nu},\dots,\mathcal{A}_{J,\nu})$ — сумісний спектр у комутативній банаховій алгебрі $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$, $\sigma(A_{j,\nu})$ — спектр у банаховій алгебрі $L\big[A_{j,\nu}\big]$.

Простір ультрагладких векторів $\mathcal{D}^M(A_j)$ інваріантний відносно оператора A_j, і звуження $A_{j,M}\equiv A_j|\mathcal{D}^M(A_j)$ належить алгебрі $L\big(\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ лінійних неперервних операторів над $\mathcal{D}^M(A_j)$ (див. [1], теорема 3). В алгебрі $L\big(\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ задаємо топологію рівномірної збіжності на обмежених множинах простору $\mathcal{D}^M(A_j)$. Одиничний оператор $L\big(\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ позначаємо через $I_{j,M}$. Замкнену підалгебру в $L\big(\mathcal{D}^M(A_j)\big)$, породжену раціональними функціями операторів $A_{j,M}$ і $I_{j,M}$, позначимо через $L\big[A_{j,M}\big]$.

Розглянемо алгебру $L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ лінійних неперервних операторів над простором $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)$ з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. В алгебрі $L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ побудуємо наступний набір комутуючих операторів

$$\big[\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big]\,,\quad \text{де}\quad \mathcal{A}_{j,M}\equiv I_{1,M}\otimes\ldots\otimes A_{j,M}\otimes\ldots\otimes I_{J,M}\,.$$

Через $L\big[\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big]$ позначимо замикання в $L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ лінійної оболонки всеможливих добутків $r_{1,M}(\mathcal{A}_{1,M})\cdot\ldots\cdot r_{J,M}(\mathcal{A}_{J,M})$ значень раціональних функцій $r_{j,M}$ від відповідних операторів $\mathcal{A}_{j,M}$ (із полюсами поза спектром $\mathcal{A}_M$). Елементи цієї лінійної оболонки будемо позначати далі через $Q=Q\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$.

Лема 8. *Алгебри* $L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ *і* $L\big(\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ *є повними і справедлива рівність*

$$L\big[\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big]=\widehat{\otimes}_j L\big[\mathcal{A}_{j,M}\big]\,,$$

де $\widehat{\otimes}_j L\big[\mathcal{A}_{j,M}\big]\equiv L\big[\mathcal{A}_{1,M}\big]\widehat{\otimes}\ldots\widehat{\otimes}L\big[\mathcal{A}_{J,M}\big]$ *— поповнення в топології* $L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ *тензорного добутку* $\otimes_j L\big[\mathcal{A}_{j,M}\big]\equiv L\big[\mathcal{A}_{1,M}\big]\otimes\ldots\otimes L\big[\mathcal{A}_{J,M}\big]$.

Доведення. Простір $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)$, в силу ізоморфізму (11), є повним борнологічним простором. Тому алгебра $L\big(\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ співпадає з алгеброю всіх обмежених лінійних відображень над $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)$. Остання ж, як відомо (див. [10], I, 10.9), є повною. Аналогічні міркування переконують, що алгебра $L\big(\mathcal{D}^M(A_j)\big)$ також є повною. Решта частина твердження леми прямо випливає з наведеної вище структури розглядуваних алгебр. •

Лема 9. *Справедливий топологічний ізоморфізм алгебр*

$$L\big[\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big]\simeq\lim_{\nu\to+\infty}\mathrm{pr}\,\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]\,, \tag{12}$$

в якому проективна границя визначається гомоморфізмами ${}^{\nu+1}\pi_\nu\colon\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu+1}\big]\to\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$, *породженими звуженнями* $A_{j,\nu+1}\to A_{j,\nu}$ *операторів* $\{A_j\}_{j=1}^J$ *на інваріантні підпростори* $\mathcal{D}^\nu(A_j)$.

Доведення. Множина $Q=Q\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$ є щільною в кожній з алгебр $\big\{\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]\big\}_{\nu>0}$ і простори $\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^\nu(A_j)$ інваріантні відносно операторів Q. Нехай $\{Q_n\}$ — така послідовність функцій, що існують границі $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=Q_\nu$ в алгебрі $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$ та $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=Q_{\nu+1}$ в алгебрі $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu+1}\big]$. Тоді, зокрема, для будь-якого $w \in \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ в просторі $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^{\nu+1}(A_j)$ справедливий граничний перехід $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n w = Q_{\nu+1} w$. З іншого боку, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n w = Q_\nu w$ в просторі $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$. Оскільки вкладення $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j) \subset \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^{\nu+1}(A_j)$ неперервне, то $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n w = Q_\nu w$ в просторі $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^{\nu+1}(A_j)$, тобто, $Q_\nu w = Q_{\nu+1} w$ для всіх $w \in \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$. Це означає, що простір $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ є інваріантним відносно операторів з алгебри $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu+1}\big]$ і звуження операторів на $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ визначає гомоморфізм ${}^{\nu+1}\pi_\nu$.

Замінюючи в наведених вище міркуваннях послідовність $\{Q_n\}$ на таку ж послідовність довільних операторів алгебри $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu+1}\big]$, переконуємося в замкнености гомоморфізма ${}^{\nu+1}\pi_\nu$. За теоремою Банаха про замкнений графік гомоморфізм ${}^{\nu+1}\pi_\nu$ неперервний. Отже, проективна границя в (12) коректно визначена.

Довільний оператор з $L\big[\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}\big]$, що є границею в алгебрі $L\big(\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^M(A_j)\big)$ елементів вигляду Q, позначимо через Q_M. Сукупність операторів $\big[Q_\nu\big]_{\nu>0}$, де $Q_\nu \equiv Q_M{}_{|\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)}$, є за побудовою елементом проективної границі $\lim\mathrm{pr}_{\nu\to+\infty}$ $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$. З (11) випливає, що відображення вигляду

$$\pi:\ L\big[\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}\big] \ni Q_M \to \big[Q_\nu\big] \in \lim_{\nu\to+\infty}\mathrm{pr}\, \widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$$

є ін'єктивним гомоморфізмом алгебр. Оскільки індуктивна границя в (11) регулярна, тобто всі обмежені її підмножини лежать в одному з просторів $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$, то гомоморфізм π здійснює неперервне і відкрите відображення. Сукупність звужень операторів $\big[Q_{|\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)}\big]_{\nu>0}$ є щільною в $\lim\mathrm{pr}_{\nu\to+\infty} \widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$. Тому гомоморфізм π має щільну область значень. Алгебра $L\big[\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}\big]$, в силу леми 8, повна, тому гомоморфізм π сюр'єктивний. Отже, (12) доведено.•

Лема 10. *Мають місце наступні рівності*

$$\begin{aligned} sp\big(L\big[\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}\big]\big) &= \bigcup_{\nu>0} sp\big(L\big[A_{1,\nu}\big]\big)\times\ldots\times sp\big(L\big[A_{J,\nu}\big]\big)\,,\\ \sigma(\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}) &= \bigcup_{\nu>0} \sigma(A_{1,\nu})\times\ldots\times\sigma(A_{J,\nu})\,,\\ \overline{\sigma(\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M})} &= \sigma(A_1)\times\ldots\times\sigma(A_J)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

де $\sigma(\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}) = \big\{\big(h(\mathcal{A}_{1,M}),\ldots,h(\mathcal{A}_{J,M})\big)\in\mathbb{C}^J:\ h\in sp\big(L\big[\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}\big]\big)\big\}$ *— сумісний спектр в алгебрі* $L\big[\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}\big]$, *а* $\overline{\sigma(\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M})}$ *— його замикання в* $\mathbb{C}^J$.

Доведення. Із відомого [11] співвідношення для проективних границь банахових алгебр випливає

$$\mathrm{sp}\big(\lim_{\nu\to+\infty}\mathrm{pr}\,\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]\big) = \bigcup_{\nu>0}\mathrm{sp}\big(\,\widehat{\otimes}_j\ L\big[A_{j,\nu}\big]\big).$$

В силу ізоморфізму (12) маємо

$$\mathrm{sp}\big(\lim_{\nu\to+\infty}\mathrm{pr}\,\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]\big) = \mathrm{sp}\big(L\big[\mathcal{A}_{1,M},\ldots,\mathcal{A}_{J,M}\big]\big)$$

і для доведення першої з рівностей (13) залишається використати співвідношення (4). Застосовуючи цю рівність до набору операторів $\{\mathcal{A}_{j,M}\}_{j=1}^{J}$ і використовуючи (2′), приходимо до другої з рівностей (13). Остання ж є наслідком теореми 5 із [1], яку можна в даному випадку застосувати, оскільки ми припустили щільність $\overline{\mathcal{D}^M(A_j)} = X^j$. •

4. Перейдемо до побудови функціонального числення для необмежених операторів у класі голоморфних функцій багатьох комплексних змінних.

Нехай Ω — відкрита область у комплексному просторі $\mathbb{C}^J$, яка містить множину $\sigma(A_1) \times \ldots \times \sigma(A_J)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ — алгебра голоморфних $\mathbb{C}$-значних функцій $f = f(\zeta_1, \ldots, \zeta_J)$, заданих в Ω, із топологією рівномірної збіжності на компактах. Через $\mathbf{1}$ позначаємо одиничну функцію із $\mathcal{H}(\Omega)$.

Теорема 1. *Нехай для будь-якого $j = 1, \ldots, J$ виконується умова щільності $\overline{\mathcal{D}^M(A_j)} = X^j$. Тоді*

(a) *існує неперервний гомоморфізм алгебр*

$$\mathcal{H}(\Omega) \ni f(\zeta_1, \ldots, \zeta_J) \to f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \ldots, \mathcal{A}_{J,M}\big) \in L\big[\mathcal{A}_{1,M}, \ldots, \mathcal{A}_{J,M}\big], \tag{14}$$

при якому $\mathbf{1} \to I_{1,M} \otimes \ldots \otimes I_{J,M}$ і $\zeta_j \to \mathcal{A}_{j,M}$;

(b) *над простором $\widetilde{\otimes}_j X^j$ існує замикання $\overline{f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \ldots, \mathcal{A}_{J,M}\big)} \equiv f\big(A_1, \ldots, A_J\big)$ оператора $f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \ldots, \mathcal{A}_{J,M}\big)$;*

(c) *спектр оператора $f\big(A_1, \ldots, A_J\big)$ над простором $\widetilde{\otimes}_j X^j$ обчислюється із співвідношення*

$$\sigma\big(f\big(A_1, \ldots, A_J\big)\big) = \overline{f\big(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_J)\big)}, \tag{15}$$

де справа — замикання в $\mathbb{C}$ множини $f\big(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_J)\big) = \{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_J) : \zeta_j \in \sigma(A_j)\ j = 1, \ldots, J\}$.

Доведення. Зафіксуємо деяке $\nu > 0$. До операторів $\{\mathcal{A}_{j,\nu}\}_{j=1}^{J}$ комутативної банахової алгебри $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$ можна застосувати класичне функціональне числення [12]. В силу (2′) сумісний спектр $\sigma(\mathcal{A}_{1,\nu}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu})$ є прямим добутком компактів $\sigma(A_{j,\nu})$, тому числення реалізується неперервним гомоморфізмом вигляду

$$\mathcal{H}(\Omega) \ni f(\zeta_1, \ldots, \zeta_J) \to f\big(\mathcal{A}_{1,\nu}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu}\big) \in L\big(\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)\big), \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} f\big(\mathcal{A}_{1,\nu}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu}\big) = \frac{1}{(2\pi i)^J} \oint\limits_{\omega_{1,\nu}} \ldots \oint\limits_{\omega_{J,\nu}} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_J) R(\zeta_1, \mathcal{A}_{1,\nu}) \times \ldots \times \\ \times R(\zeta_J, \mathcal{A}_{J,\nu})\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_1, \end{aligned} \tag{16}$$

$R(\zeta_j, \mathcal{A}_{j,\nu})$ — резольвента оператора $\mathcal{A}_{j,\nu}$ в $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$ і $\omega_{j,\nu}$ — замкнений контур скінченної довжини, який обходить зліва компакт $\sigma(A_{j,\nu})$. Інтеграли (16) визначені в алгебрі $\widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$, оскільки в силу співвідношень (13) контур $\omega_{j,\nu}$ можна вибрати у перетині області Ω з j-ю координатною площиною і резольвенти $R(\zeta_j, \mathcal{A}_{j,\nu})$ мають вигляд $I_{1,\nu} \otimes \ldots \otimes R(\zeta_j, A_{j,\nu}) \otimes \ldots \otimes I_{J,\nu}$, звідки

$$R(\zeta_1, \mathcal{A}_{1,\nu}) \cdot \ldots \cdot R(\zeta_J, \mathcal{A}_{J,\nu}) = R(\zeta_1, A_{1,\nu}) \otimes \ldots \otimes R(\zeta_J, A_{J,\nu}),$$

де $R(\zeta_j, A_{j,\nu})$ — резольвента оператора $A_{j,\nu}$ у банаховій алгебрі $L\big[A_{j,\nu}\big]$. При цьому, $\mathbf{1} \to I_{1,\nu} \otimes \ldots \otimes I_{J,\nu}$ та $\zeta_j \to \mathcal{A}_{j,\nu}$.

Із структури простору ультрагладких векторів випливають включення $\sigma(A_{j,\nu}) \subset \sigma(A_{j,\nu+1})$ [1], тому, використовуючи теорему Коші, контур $\omega_{j,\nu}$ у формулі (16) можна покладати рівним контуру $\omega_{j,\nu+1}$ для аналогічного інтегрального зображення оператора $f\big(\mathcal{A}_{1,\nu+1}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu+1}\big)$. Оператор $R(\zeta_1, A_{1,\nu+1}) \otimes \ldots \otimes R(\zeta_J, A_{J,\nu+1})$ залишає простір $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ інваріантним, причому $R(\zeta_j, A_{j,\nu+1}) |\mathcal{D}^\nu(A_j) = R(\zeta_j, A_{j,\nu})$ для всіх $\zeta_j \in \omega_{j,\nu+1}$. Звідси, користуючись інтегральними зображеннями (16), отримуємо рівність $f\big(\mathcal{A}_{1,\nu+1}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu+1}\big)|\mathcal{D}^\nu(A_j) = f\big(\mathcal{A}_{1,\nu}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu}\big)$. Це означає, враховуючи довільність чисел $\nu > 0$, що сукупність $\big[f\big(\mathcal{A}_{1,\nu}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu}\big)\big]_{\nu>0}$ є елементом проективної границі $\lim \mathrm{pr}_{\nu\to+\infty} \widehat{\otimes}_j L\big[A_{j,\nu}\big]$.

Покладаючи

$$f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \ldots, \mathcal{A}_{J,M}\big) = \pi^{-1}\big(\big[f\big(\mathcal{A}_{1,\nu}, \ldots, \mathcal{A}_{J,\nu}\big)\big]_{\nu>0}\big),$$

де π^{-1} — обернений до ізоморфізму π із леми 9, приходимо до гомоморфізму (14). Твердження (a) доведено.

Для доведення (b) використаємо лему 5. В силу ізоморфізму (8) замикання оператора $f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \ldots, \mathcal{A}_{J,M}\big)$ досить побудувати на просторі $l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j); \widetilde{\otimes}_j X^j\big]$.

Позначимо через Y'_n і Y' спряжені простори відповідно до $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)$ і $\widetilde{\otimes}_j X^j$ відносно канонічних дуальних пар $\langle\, \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)\,,\, Y'_n\!: \rangle$ і $\langle\, \widetilde{\otimes}_j X^j\,,\, Y'\!: \rangle$. Розглянемо простір послідовностей $l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)\big] = \big\{[w_n] : \, w_n \in \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)\big\}$ з нормою

$$\|[w_n]\|_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_{\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)}.$$

Аналогічно до скалярного випадку, можна показати, що спряженим до $l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n (A_j)\big]$ буде простір $l_\infty\big[Y'_n\big] = \{[y_n] : \, y_n \in Y'_n\}$ з нормою $\|[y_n]\|_\infty = \sup_n \|y_n\|_{Y'_n}$. Оскільки для вкладення $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j) \subset \widetilde{\otimes}_j X^j$ виконуються нерівності (8), то з повноти $\widetilde{\otimes}_j X^j$ випливає, що кожен ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ збігається в $\widetilde{\otimes}_j X^j$ до деякого елемента w.

Отже, можна визначити відображення

$$\varphi : \, l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)\big] \ni [w_n] \to w \in \widetilde{\otimes}_j X^j.$$

Фактор-простір по ядру цього відображення $l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)\big] / \mathrm{Ker}\varphi$, як видно, ізометричний простору $l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j); \widetilde{\otimes}_j X^j\big]$. Спряжений простір до $l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j); \widetilde{\otimes}_j X^j\big]$ знаходимо, виходячи з двоїстості $\langle\, l_1\big[\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^n(A_j)\big]\,,\, l_\infty\big[Y'_n\big]\!: \rangle$. Він збігається з підпростором в $l_\infty\big[Y'_n\big]$ вигляду

$$l_\infty\big[Y'_n; Y'\big] \equiv \Big\{[y_n] \in l_\infty\big[Y'_n\big] : \langle [w_n]\,,\, [y_n]\!: \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\, w_n, y_n\!: \rangle = 0, \forall [w_n] \in \mathrm{Ker}\varphi\Big\}.$$

Підпростір $l^0_\infty\big[Y'_n\big]$ фінітних послідовностей слабо щільний в просторі $l_\infty\big[Y'_n\big]$. Тому підпростір

$$l^0_\infty\big[Y'_n; Y'\big] \equiv \big\{[y_n] \in l^0_\infty\big[Y'_n\big] : \, \langle [w_n]\,,\, [y_n]\!: \rangle = 0\,, \quad \forall\, [w_n] \in \mathrm{Ker}\varphi\big\}$$

слабо щільний в $l_\infty\big[Y_n';Y'\big]$. Покажемо, що $l_\infty^0\big[Y_n';Y'\big]$ лежить в області визначення спряженого оператора $f'\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)\equiv\big[f'\big(\mathcal{A}_{1,n},\dots,\mathcal{A}_{J,n}\big)\big]_{n\in\mathbb{N}}$ до оператора $f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$ відносно двоїстості $\langle\, l_1\big[\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j)\big]\,,\, l_\infty\big[Y_n'\big]\colon\rangle$. Справді, для будь-якого елементу

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n\in\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^M(A_j)\subset l_1\big[\widetilde{\otimes}_j\mathcal{D}^n(A_j)\big]$$

і фінітної послідовності $[y_n]\in l_\infty^0\big[Y_n';Y'\big]$ з K ненульовими членами, маємо

$$\langle\, f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)w\,,\,[y_n]\colon\rangle=\sum_{n=1}^{K}\langle\, f\big(\mathcal{A}_{1,n},\dots,\mathcal{A}_{J,n}\big)w_n\,,\,y_n\colon\rangle=$$
$$=\sum_{n=1}^{K}\langle\, w_n\,,\,f'\big(\mathcal{A}_{1,n},\dots,\mathcal{A}_{J,n}\big)y_n\colon\rangle=\langle\, w\,,\,\big[f'\big(\mathcal{A}_{1,n},\dots,\mathcal{A}_{J,n}\big)y_n\big]\colon\rangle\,,$$

де $\big[f'\big(\mathcal{A}_{1,n},\dots,\mathcal{A}_{J,n}\big)y_n\big]\in l_\infty^0\big[Y_n';Y'\big]$. Ми показали, що область визначення спряженого оператора $f'\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$ слабо щільна в спряженому просторі $l_\infty\big[Y_n';Y'\big]$. Тому можна використати відому теорему ([6], IV, 6.1), згідно з якою замкнене розширення оператора $f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$ існує і збігається з його другим спряженим $f''\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$. Твердження (b) доведено.

За теоремою про відображення сумісного спектру [11], застосованою до проективної границі комутативних банахових алгебр $\lim\mathrm{pr}_{\nu\to+\infty}\widehat{\otimes}_jL\big[A_{j,\nu}\big]$, маємо

$$\sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)\big)=f\big(\sigma(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M})\big)\,,$$

де спектр елемента $f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$ і сумісний спектр $\sigma\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$ обчислені в алгебрі $\lim\mathrm{pr}_{\nu\to+\infty}\widehat{\otimes}_jL\big[A_{j,\nu}\big]$. Користуючись другою з рівностей (13) та неперервністю функції f на $\sigma\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)$, одержуємо включення

$$\overline{f\big(\sigma(A_1)\times\ldots\times\sigma(A_1)\big)}\subset\overline{\sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)\big)}.$$

З останньої рівності випливає, що

$$\overline{\sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)\big)}=\overline{f\big(\sigma(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M})\big)}\subset\overline{f\big(\sigma(A_1)\times\ldots\times\sigma(A_1)\big)}.$$

Отже,

$$\overline{\sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)\big)}=\overline{f\big(\sigma(A_1)\times\ldots\times\sigma(A_1)\big)}.$$

Залишилося показати рівність

$$\sigma\big(f(A_1,\dots,A_J)\big)=\overline{\sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M},\dots,\mathcal{A}_{J,M}\big)\big)}\,.$$

З цією метою узагальнимо деякі міркування, наведені в доведенні теореми 5 із [1].

Нехай $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(f(A_1, \dots, A_J)\big)$, тоді резольвента $R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big)$ належить алгебрі $L\big(\widetilde{\otimes}_j X^j\big)$. Для всіх $w \in \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^M(A_j)$ та $k_1, \dots, k_J \in \mathbb{Z}_+$ виконується рівність

$$\mathcal{A}_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}_J^{k_J} \cdot R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big) w = R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big) \cdot \mathcal{A}_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}_J^{k_J} w.$$

Тому

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{A}_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}_J^{k_J} \cdot R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big) w\|_{\otimes_j X^j} \leq \\ &\qquad \leq \|R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big)\|_{L(\otimes_j X^j)} \|\mathcal{A}_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}_J^{k_J} w\|_{\otimes_j X^j}. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи лему 3, отримуємо

$$\|R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big) w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^\nu(A_j)} \leq \|R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big)\|_{L(\otimes_j X^j)} \|w\|_{\otimes_j \mathcal{D}^\nu(A_j)}.$$

Отже, простір $\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ інваріантний відносно дії $R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big)$. Враховуючи довільність $\nu > 0$, переконуємося, що звуження $R\big(\zeta, f(A_1, \dots, A_J)\big)|\, \widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)$ належить алгебрі $L\big(\widetilde{\otimes}_j \mathcal{D}^\nu(A_j)\big)$, тобто $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \dots, \mathcal{A}_{J,M}\big)\big)$. Оскільки точка $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(f(A_1, \dots, A_J)\big)$ вибрана довільно, то справедливе включення

$$\sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \dots, \mathcal{A}_{J,M}\big)\big) \subset \sigma\big(f(A_1, \dots, A_J)\big).$$

Спектр оператора $f(A_1, \dots, A_J)$ замкнений, тому

$$\overline{\sigma\big(f\big(\mathcal{A}_{1,M}, \dots, \mathcal{A}_{J,M}\big)\big)} \subset \sigma\big(f(A_1, \dots, A_J)\big).$$

Обернене включення випливає з ([1], теорема 5). Теорему доведено. •

Зауваження. Гомоморфізм (14) для випадку $\mu_k(j) = 1$ для всіх $j = 1, \dots, J$ та $k \in \mathbb{Z}_+$, побудовано у роботі [13]. В загальному випадку, гомоморфізм (14) наведений у роботі [7]. В цих роботах, однак, не обчислена комутативна підалгебра, де лежить образ гомоморфізму (14), і не досліджені її спектральні властивості, на яких, власне, базується доведена вище теорема про відображення сумісного спектру.

Твердження (b) і (c) є новими. Причому (c) можна трактувати як узагальнення на випадок багатьох комутуючих необмежених операторів теореми про відображення спектрів типу Данфорда, встановленої для одного такого оператора у роботі [1].

3. Наведемо застосування теореми до теорії груп операторів. Нехай задано комплексний банахів простір X і замкнений лінійний оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ із щільною областю визначення. Оператору A співставимо голоморфну в околі нуля функцію $M(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k / \mu_k$ з додатніми коефіцієнтами і відповідний їй простір $\mathcal{D}^M(A)$ ультрагладких векторів.

Як звичайно (див.[8]), будемо говорити, що група $\mathbb{R} \ni s \to T(s)$ лінійних обмежених операторів над X належить класу (C_0), якщо $T(0) = I$ — одиничний оператор і X-значна функція $\mathbb{R} \ni s \to T(s)x$ неперервна для всіх $x \in X$.

Наступна теорема встановлює критерій того, коли замкнений оператор A є генератором обмеженої групи класу (C_0).

Теорема 2. *Оператор A є генератором обмеженої групи класу (C_0) тоді і тільки тоді, коли виконуються умови :*
 (a) *простір $\mathcal{D}^M(A)$ щільний в X;*
 (b) $\mathrm{Re}\sigma(A) = 0$.

Умова (a) в сторону необхідності є наслідком теореми 3 з роботи [7], умова (b) відома [8]. Достатність випливає з наступних міркувань. Над банаховим простором CB обмежених неперервних функцій $x = x(s)$ на осі $\mathbb{R}$ з рівномірною нормою розглядається оператор $S\colon CB \ni x(s) \to s \cdot x(s) \in CB$. Над поповненням проективного тензорного добутку $CB \widetilde{\otimes} X$ визначаємо значення функції $f(\zeta_1, \zeta_2) = e^{\zeta_1\zeta_2}$ від операторів S і A. Згідно з теоремою 1 $|\sigma\big(f(S,A)\big)| \le 1$ і оператор $f(S,A) = e^{sA} : CB \widetilde{\otimes} X \to CB \widetilde{\otimes} X$ обмежений. Одинична функція $\mathbf{1}$ належить CB і для довільного $x \in X$ рівність $x = 1 \otimes x$ здійснює ізометричне вкладення простору X в $CB\widetilde{\otimes}X$. Звідси, $e^{sA}x \in CB\widetilde{\otimes}X$ для будь-якого $x \in X$, тобто, група e^{sA} належить класу (C_0).

ЛІТЕРАТУРА

1. Лопушанський О.В. *Операторне числення на ультрагладких векторах* // Укр. мат. журн. 1992. 44. №4. С.502–513.
2. Schatten R. *A theory of cross spaces* // Ann. Math. Studies. 1960. V.26.
3. Наймарк М.А. Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664с.
4. Tomijama J. *Tensor products of commutative Banach algebras* // Tŏhoky Math. J. 1960. 17. P.124–132.
5. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри III. Функціональне числення на піврегулярному спектрі. – Львів: Ін-т прик. пробл. механіки і математики НАНУ. Препринт №1-93. 1993. 59с.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. - М.: Мир. 1971. – 359с.
7. Лопушанський О.В. *Операторне числення від тензорно комутуючих операторів на просторах ультрагладких векторів* // Мат. методи і фіз.-мат. поля. – 1992. №53. С.189–194.
8. Grothendieck A. *Sur les espaces (F) et (DF)* // Summa Bras. Math. 1954. №3. P.1–123.
9. Grothendieck A. *Produits tensoriel topologiques et espases nucleaire* // Mem. Amer. Math. Soc. -1955. V.16. №2. P.1–140.
10. Эдвардс Р. Функциональный анализ. -М.: Мир, 1969. 1071с.
11. Mallios A. Topological algebras. -Amsterdam : Nort-Holland, 1986. 535p.
12 Arens R. *Analytic-functional calculus in commutative topological algebras* // Pacific J. Math. – 1961. 11. P.405–429.
13 Зерзайхи Т., Радыно Я.В. *Функции от коммутирующих неограниченных операторов* // Доклады АН БССР – 1989. 33. №8. С.684–686.
14 Roumieu Ch. *Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables*// J. Analyse Math. – 1962–63. 10. P.153–192.
15 Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 830с.
16 Иосида К. Функциональный анализ. -М.: Мир, 1967. – 624с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАНУ, Львів

Надійшло 1.09.96