УДК 517.576

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ БОРЕЛЯ ДЛЯ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

О.Б. Скасків, О.Г. Орищин

O. Skaskiv, O. Oryshchyn. *Generalization of Borel's theorem for the multiple Dirichlet series*, Matematychni Studii, **8**(1997) 43–52.

Let $H_p(\Lambda)$ be the class of entire functions $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$ $(p \geq 1)$ represented by convergent for all $z \in \mathbb{C}^p$ multiple Dirichlet series. We establish conditions that imply the relationship $\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \to 0$, for $F(z) \in H_p(\Delta)$, where $\omega(x)$ is some increasing function such that $\ln x \leq \omega(x) \leq x^c$ $(x \to +\infty)$, $0 < c < 1$.

1. Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \ \ |z| = r,$$

визначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}$. Добре відома наступна теорема Вімана-Валірона.

Теорема 1 [1,2]. *Для кожної цілої функції f і для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться множина $E \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E \frac{1}{r} dr < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E$ виконується*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \big(\ln \mu_f(r)\big)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}. \tag{1}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(r) \tag{2}$$

при $r \to +\infty$ $(r \in [1; +\infty) \setminus E)$ (див. також [3]). Аналоги нерівності (1) у випадку цілої функції двох комплексних змінних, заданої кратним степеневим рядом, одержані І.Ф. Бітляном і А.А. Гольдбергом [4], А. Шуміцкі [5], П. Фентоном [6]. Зокрема, з результатів П. Фентона [6, теорема 1] для цілих функцій від двох комплексних змінних

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50, 30D15.

випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$M_f(r_1, r_2) \le C\mu_f(r_1, r_2) \ln^+ \mu_f(r_1, r_2) \Big(\ln^+ \ln \mu_f(r_1, r_2) \Big)^{2+\varepsilon} \qquad (3)$$

виконується для всіх $r = (r_1, r_2) \notin E$, $r_1, r_2 \ge 1$, де E — множина така, що

$$\iint\limits_{E \cap \Delta_R} \frac{dr_1 dr_2}{r_1 r_2} < 2(1+\varepsilon) \ln R + O(1) \quad (R \to +\infty),$$

$\Delta_R = \{r = (r_1, r_2) : 1 \le r_j < R\}$, C — абсолютна стала, а $M_f(r_1, r_2) = \max\{|f(z_1, z_2)| : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\}$, $\mu_f(r_1, r_2) = \max\{|a_{n,m}| r_1^n r_2^m : n \ge 0, m \ge 0\}$. Якщо тепер $K \subset \Delta_{+\infty}$ — довільна необмежена множина така, що

$$M_f(r_1, r_2) \to +\infty \quad (\max\{r_1, r_2\} \to +\infty,\ r = (r_1, r_2) \in \overline{K}),$$

то із нерівності (3) одержуємо

$$\ln M_f(r_1, r_2) \sim \ln \mu_f(r_1, r_2) \qquad (4)$$

при $\max\{r_1, r_2\} \to +\infty$, $r \in \overline{K} \setminus E$.

Об'єктом розгляду у даній статті є цілі функції $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$ $(p \ge 1)$, зображувані абсолютно збіжними для всіх $z \in \mathbb{C}^p$ кратними рядами Діріхле

$$F(z) = \sum_{\|n\| \ge 0} a_n \mathrm{e}^{<z, \lambda_n>}, \qquad (5)$$

тут $\|n\| = n_1 + n_2 + ... + n_p$ для мультиіндекса $n = (n_1, n_2, ..., n_p)$, а $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + .. + x_p y_p$ для $x = (x_1, .., x_p)$, $y = (y_1, ... y_p)$. Клас таких функцій позначимо через $H_p(\Lambda)$, де $\Lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ — фіксована послідовність $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, ..., \lambda_{n_p}^{(p)})$ така, що $0 \le \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$, $j = 1, 2, ..., p$. Для функції $F \in H_p(\Lambda)$ і для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ покладемо $M(\sigma, F) = \sup\big\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}^p\big\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\big\{|a_n| \mathrm{e}^{<\sigma, \lambda_n>} : n \in \mathbb{Z}_+^p\big\}$. Через $n(t)$ позначимо лічильну функцію послідовності $(\|\lambda_n\|)$, тобто $n(t) = \sum\limits_{\|\lambda_n\| \le t} 1$, крім того, нехай для функції $F \in H_p(\Lambda)$, $n(t, F) = \sum\limits_{\|\lambda_n\| \le t, a_n \ne 0} 1$, де (a_n) — коефіцієнти ряду (5), а $n_j(t) = \sum\limits_{\lambda_k^{(j)} \le t} 1$ — лічильна функція послідовності $(\lambda_k^{(j)})$ — j-тих компонент векторів (λ_n).

У випадку цілих рядів Діріхле від однієї змінної (тобто $p = 1$) відомо, що умова [7]

$$\int^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt < +\infty \qquad (6)$$

є необхідною і достатньою для того, щоб для кожної функції $F \in H_1(\Lambda)$ співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F) \qquad (7)$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in \mathbb{R} \setminus E$, E — множина скінченної міри).

У випадку класу $H_2(\Lambda)$ (тобто $p = 2$ і маємо клас подвійних рядів Діріхле) в [8] встановлено наступний аналог цієї теореми з [7], для формулювання якого нам потрібне наступне поняття.

Конусом зростання максимального члена $\mu(\sigma, F)$ функції $F \in H_p(\Lambda)$ назвемо конус

$$\gamma_F = \Big\{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(t\sigma, F) = +\infty\Big\}.$$

Теорема 2 [8,9]. *Нехай $F \in H_2(\Lambda)$ і виконується умова (6). Тоді для кожного кута $K \subset \mathbb{R}^2$ з вершиною у початку координат такого, що $\left(\overline{K} \setminus \{(0,0)\}\right) \subset \gamma_F$ співвідношення (7) виконується при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E)$, де E — множина така, що плоска міра перетину E із смугою $\left\{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : |\sigma_2 - \sigma_1| \le d\right\}$ має скінченну міру при кожному фіксованому $d > 0$.*

У цій статті встановимо умови справедливості в класі $H_p(\Lambda)$ співвідношення

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \to 0, \tag{8}$$

більш загального, ніж (7), де $\omega(x)$ — деяка зростаюча функція така, що $\ln x \le \omega(x) \le x^c (x \to +\infty)$, $0 < c < 1$.

В окремих випадках покажемо непокращуваність (необхідність) одержуваних умов. За рахунок більш точного врахування внутрішніх властивостей рядів з $H_p(\Lambda)$, описання виняткових множин одержуємо у більш ефективній формі, ніж в [4,6,8,9].

Нижче застосовуємо наступні позначення. Через L позначимо клас додатних, неспадних до $+\infty$ функцій на $[0, +\infty)$, а L_1 — клас функцій $k(t) \in L$ таких, що $\int_0^{+\infty} t^{-2} k(t) dt < +\infty$. Через L_2 позначаємо клас неперервно диференційовних на $[0, +\infty)$ функцій $\omega(t) \in L$ таких, що $\omega'(t) \downarrow$, $\frac{1}{t} = O(\omega'(t))$ $(t \to +\infty)$, а через L_3 підклас L_2, який складається з функцій $\omega(t)$ таких, що для кожної функції $p(t) \to +\infty$, $\frac{\omega'(tp(t))}{\omega'(t)} \to 0$ $(t \to +\infty)$. Через L_4 позначаємо клас двічі неперервно диференційовних функцій таких, що

$$\omega'(t) \downarrow \ (t \to +\infty), \ h'(t) \nearrow \ (t \to +\infty), \ \ln\left(1 + \frac{h'(t)}{t}\right) = o(t) \quad (t \to +\infty),$$

а через L_5 позначаємо клас диференційовних функцій $\omega \in L$ і таких, що для кожного $c > 0$

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{\omega'(cx + \omega^{-1}(x + c))}{\omega'(\omega^{-1}(x))} > 0,$$

де $\omega^{-1}(x)$ — функція обернена до $\omega(x)$, $h(t)$ — функція обернена до $\dfrac{1}{\omega'(t)}$.

Нехай далі S_r — циліндр, у який переходить циліндр

$$S'_r = \left\{x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p : x_2^2 + ... + x_p^2 \le r^2\right\}$$

при повороті системи координат, при якому піввісь Ox_1 переходить у промінь $\left\{x \in \mathbb{R}^p : x_1 = x_2 = ... + x_p\right\} \stackrel{\text{def}}{=} l_0$.

Основний результат цієї статті міститься у наступній теоремі.

Теорема 3. *Нехай $\omega(t) \in L_3$ і $h(t)$ — функція обернена до $\frac{1}{\omega'(t)}$. Якщо $F \in H_p(\Lambda)$ і виконується умова*

$$\int^{+\infty} \frac{h(\ln n(t, F))}{t^2} dt < +\infty, \tag{9}$$

то для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат такого, що $(\overline{K} \setminus O) \subset \gamma_F$ співвідношення (8) справджується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \backslash E$), де E — множина така, що

$$\mu_p(E \cap S_r) = O(r^{p-1}) \ (r \to +\infty),$$

а μ_p — міра Лебега в $\mathbb{R}^p$.

Сформульована теорема 3 відрізняється від наведених вище результатів не тільки формальним переходом до більшої кількості змінних та розглядом рядів Діріхле і співвідношення (8), але й по суті. Так, у випадку степеневих рядів новим моментом є врахування тільки відмінних від нуля коефіцієнтів, а також сильніше описання виняткової множини. Те ж стосується рядів Діріхле, а також у цьому випадку новим моментом є врахування лише відмінних від нуля коефіцієнтів. Центральною у доведенні теореми 3 є наступна лема.

Лема 1. *Нехай $k(t) \in L_1$. Тоді знайдеться множина E така, що для кожного $\sigma \notin E$ існує $\nu \in \mathbb{Z}_+^p$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+^p$*

$$|a_n| exp\ \langle \sigma, \lambda_n \rangle \le \mu(\sigma, F) exp\ \left\{ - \int\limits_{\|\lambda_\nu\|}^{\|\lambda_n\|} t^{-2} \Big(\|\lambda_n\| - t \Big) k(4t) dt \right\},$$

а для множини E виконується $\mu_p(E \cap S_r) = O(r^{p-1})$ $(r \to +\infty)$.

Доведення. Визначимо $\beta(u) = \int\limits_0^u t^{-2} k(t) dt$, $\beta_k = \exp\left\{ - \int\limits_0^{\|\lambda_k\|} \beta(u) du \right\}$, $\tau_k = \beta\Big(\|\lambda_k\|\Big) e_1$, $e_1 = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$. Розглянемо ряд Діріхле

$$B(\sigma) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{\beta_n} \exp\langle \sigma, \lambda_n \rangle.$$

Очевидно, що $B \in H_p(\Lambda)$. Тому, якщо розглянути звуження $B|_b$ на будь-який промінь $\ell_b = \ell_0 + b$, де $b \in \mathbb{R}^p$, то одержимо також $B|_b \in H_1\big(\|\Lambda\|\big)$, тобто $B|_b$ — цілий ряд Діріхле з показниками $\big(\|\lambda_n\|\big)$. Отже, на кожному з променів ℓ_b одержуємо цілий ряд Діріхле одного і того ж вигляду

$$g(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} g_j \mathrm{e}^{t\alpha_j}, \ g_j = g_j(b), \ \{\alpha_j\} = \{\|\lambda_n\|\}.$$

При цьому, оскільки, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a_0 \neq 0$, то і $g_0 \neq 0$. Тому максимальний член $\mu(t, g) = g_0$, $t \in (-\infty, R_1)$ при деякому $R_1 = R_1(b)$. Нехай тепер $(R_j(b))$ — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(t, g)$, занумерована так, що $\nu(t, g) = j$ при $t \in [R_j, R_{j+1})$, у випадку $R_j \neq R_{j+1}$, і $\nu(R_{j+1}, g) = j + p$ у випадку $R_{j+1} = ... = R_{j+p} < R_{j+p+1}$.

Якщо тепер $(t-\beta(\alpha_k)) \in [R_k, R_{k+1})$, то звідси для всіх j за означенням $\mu(t,g)$ маємо

$$\frac{|a_{n(j)}|}{|a_{n(k)}|}\exp\{t(\alpha_j-\alpha_k)\}\exp\langle b, \lambda_{n(j)}-\lambda_{n(k)}\rangle \le \frac{\beta_{n(j)}}{\beta_{n(k)}}\exp\{\beta(\alpha_k)(\alpha_j-\alpha_k)\}, \quad (10)$$

де $n(s)$ означає мультиіндекс такий, що $\|\lambda_{n(s)}\| = \alpha_s$. Вибір таких мультиіндексів взагалі неоднозначний, але тут вважаємо зафіксованим так, щоб для кожного λ_n знайшлося відповідне йому α_j.

Отже, нерівність (10) виконується для всіх

$$t \in \bigcup_{k=1}^{+\infty}[R_k+\beta(\alpha_k), R_{k+1}+\beta(\alpha_k)) \cup (-\infty, R_1+\beta(\alpha_0)),$$

а множина тих t, для яких (10) не виконується, міститься у множині $E(b) = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}[R_k+\beta(\alpha_{k-1}),\, R_k+\beta(\alpha_k))$, міра якої для всіх $b\in\mathbb{R}^p$ має оцінку

$$\mu_1(E(b)\cap\mathbb{R}) \le \sup\,\{\beta(u): u\ge 0\} \stackrel{\rm def}{=} A < +\infty.$$

Залишилось тепер зауважити, що (10) переходить у нерівність із леми. Нехай тепер $E'(b)$ — множина, у яку перейде $E(b)$ при вказаному вище при описанні S_r повороті, а D_r — $(p-1)$-вимірна куля з центром у початку координат. Тоді, якщо $E' = \bigcup\limits_{b\in\mathbb{R}^{p-1}} E'(b)$, то

$$\mu_p(E\cap S_r) = \mu_p(E'\cap S_r') \le \int\limits_{D_r}\Bigg(\int\limits_{E'\cap\mathbb{R}} dx\Bigg)d\mu_{p-1} \le A\mu_{p-1}(D_r) \le A(2r)^{p-1},$$

тобто лему доведено, оскільки мультиіндекс $n(k)$ у нерівності (10) є мультиіндексом максимального члена (правий бік нерівності (10) менший від одиниці).

Доведення теореми 3. За умовою (9), існує функція $\ell(t)$ така, що $\ell(t)\uparrow+\infty$ $(t\to+\infty)$ і $k(t)=\ell(t)h(\ln n(t,F))\in L_1$. Оскільки, $\omega(t)\in L_2$, то $\ln t = O(\omega(t))$ $(t\to+\infty)$, тому одночасно $k_1(t)=\ell(t)\ln n(t,F)\in L_1$, а також

$$N(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x \dfrac{\ell(t)\ln n(t,F)}{t^2}dF, & x\ge 1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

$N(x)\in L_1$ і, отже, за лемою для $\sigma\notin E_1$

$$\sum\nolimits_1 \stackrel{\rm def}{=} \sum_{||\lambda_n\|| > 2||\lambda_\nu||} |a_n|e^{\sigma\lambda_n} \le \mu(\sigma,F) \sum_{||\lambda_n|| > 2||\lambda_\nu||}{}' \exp\Big\{-\int\limits_{||\lambda_\nu||}^{||\lambda_n||}(||\lambda_n||-t)t^{-2}N(4t)dt\Big\} \le$$

$$\le \mu(\sigma,F)\sum_{||\lambda_n\|| > 2\|\lambda_\nu||}\exp\Big\{-N(2||\lambda_n||)(2-\ln 2)\Big\}.$$

Позначення $\sum'$ означає сумування тільки по n таких, що $a_n \neq 0$. Отже, за умовою (9)

$$\sum 1 \Big/ \mu(\sigma, F) = \int\limits_{2\|\lambda_\nu\|}^{+\infty} \exp\Big\{ -\tilde{N}(2t)\Big\} dn(t, F) = o(1) \tag{11}$$

при $\|\lambda_\nu\| \to +\infty$, де $\tilde{N}(t) = N(t)(2 - \ln 2)$. При цьому слід використати стандартний прийом (див. [7]). Використовуючи тепер лему з функцією $k(t) = \ell(t)h(\ln n(t, F))$, для $\sigma \notin E_2$ при $\|\lambda_n\| = 0$, маємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \int\limits_0^{\|\lambda_\nu\|} t^{-1} k(4t) dt \geq k(2\|\lambda_\nu\|) \ln 2, \tag{12}$$

при цьому для спрощення міркувань і, не зменшуючи загальності, вважаємо $|a_0| = 1$. Залишилось об'єднати (11) і (12). При $\|\lambda_\nu\| \to +\infty$ маємо

$$\begin{aligned} \omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) &\leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \Big\{ \ln M(\sigma, F) - \ln \mu(\sigma, F) \Big\} \leq \\ &\leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \Big\{ \ln n(2\|\lambda_\nu\|, F) + o(1) \Big\} \leq \\ &\leq \omega'\Big(\ell(2\|\lambda_\nu\|) h(\ln n(2\|\lambda_\nu\|, F)) \ln 2 \Big) \Big\{ \ln n(2\|\lambda_\nu\|, F) + o(1) \Big\}. \end{aligned}$$

Останній вираз прямує до нуля, якщо для кожної функції $p(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$ $\omega'(p(t)h(t)) \cdot t \to 0$ $(t \to +\infty)$. Останнє випливає з $\omega(t) \in L_3$.

Залишилось зауважити, що в нерівності з леми $\nu = \nu(\sigma)$ — мультиіндекс максимального члена і отже, (див. також [10]), $\|\lambda_{\nu(\sigma)}\| \to +\infty$ при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K$, тут K — конус, описаний у формулюванні теореми). Крім того, очевидно, згідно з лемою

$$\mu_p\Big((E_1 \cup E_2) \cap S_r \Big) \leq \mu_p(E_1 \cap S_r) + \mu_p(E_2 \cap S_r) = O(r^{p-1}) \ (r \to +\infty).$$

Теорему 3 доведено.

Одержимо деякі наслідки теореми 3, а також покажемо їх непокращуваність.

Наслідок 1. *Для того, щоб для кожної функції $F \in H_p(\Lambda)$ співвідношення (7) справджувалось при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$, $\mu_p(E \cap S_r) = O(r^{p-1})$) необхідно і досить, щоб виконувалась умова (6), де K — довільний конус, як в теоремі 3.*

Доведення. Достатність негайно одержуємо з теореми 3, покладаючи $\omega(t) \equiv \ln t$. Для доведення необхідності зауважимо, що якщо умова (13) не виконується, то оскільки $n(t) \leq n_1(t) \cdot n_2(t) \cdots n_p(t)$, де $n_j(t)$ — лічильна функція j-тих компонент $(\lambda_k^{(j)})$ векторної послідовності (λ_n), можемо вважати, не зменшуючи загальності, що

$$\int^{+\infty} \frac{\ln n_1(t)}{t^2} dt = +\infty.$$

Пригадуючи цитований вище результат з [7] (в [7] власне показано, що у цьому випадку існує $f_1 \in H_1(\Lambda^{(1)})$, $\Lambda^{(1)} = (\lambda_k^{(1)})$ така, що $\ln f_1(\sigma_1) \geq (1+h)\ln\mu(\sigma_1, f_1)$ $(\sigma_1 \geq \sigma_1^0)$ для деякого $h > 0$), вже елементарно одержуємо потрібне твердження. Справді, спочатку будуємо $(p-1)$ функцію $f_j(t) \in H_1(\Lambda^{(j)})$, $\Lambda^{(j)} = (\lambda_k^{(j)})$ з додатними коефіцієнтами і таку, що

$$\ln\mu(t, f_j) \leq \ln\mu(t, f_1)\ (t \geq 0),\ j = \overline{1, p-1}.$$

А потім вибираємо $f(\sigma) = f_1(\sigma_1)\cdot f_2(\sigma_2)\cdots f_p(\sigma_p)$. Звідси, для $\sigma_1 \geq \max\{\sigma_2, \sigma_3,$ $..., \sigma_p\}$ і $\sigma_1 \geq \sigma_1^0$

$$\ln F(\sigma) \geq (1+h)\ln\mu(\sigma_1, f_1) + \ln\mu(\sigma_2, f_2) + \cdots + \ln\mu(\sigma_p, f_p) \geq$$
$$\geq \Big(1 + \frac{h}{p}\Big)\Big\{\ln\mu(\sigma_1, f_1) + \ln\mu(\sigma_2, f_2) + \cdots + \ln\mu(\sigma_p, f_p)\Big\}.$$

Залишилось зауважити, що, очевидно, $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, f_1)\cdot\mu(\sigma_2, f_2)\cdots\mu(\sigma_p, f_p)$. Тобто, на множині $E = \big\{\sigma \in \mathbb{R}^p : \sigma_1 \geq \sigma_1^0, \sigma_1 \geq \max\{\sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_p\}\big\}$ виконується нерівність $\ln F(\sigma) \geq \big(1 + \frac{h}{p}\big)\ln\mu(\sigma, F)$. Завершує доведення зауваження, що $\mu_p(E \cap S_r) = +\infty$ $(r > 0)$. Наслідок 1 доведено.

Наступна теорема показує непокращуваність (необхідність) умови (9) в класі $H_1(\Lambda_1)$.

Теорема 4. *Нехай* $\omega \in L_4$, *а послідовність* $\Lambda_1 = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 << \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ *така, що*

$$\int^{+\infty} \frac{h(\ln n(t))}{t^2}dt = +\infty. \tag{13}$$

Тоді знайдеться функція $f \in H_1(\Lambda_1)$ *така, що*

$$\omega(\ln f_1(x)) - \omega(\ln\mu(x, f_1)) \geq b > 0\ (x \geq x_0).$$

Доведення. Із умови (13) випливає розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n}\Big(h(\ln(n+1)) - h(\ln n)\Big) = +\infty. \tag{14}$$

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $h(0) = 0$ і

$$h(\ln(n+1)) = O(\lambda_n)\ (n \to +\infty). \tag{15}$$

Визначимо $c_n = \beta\Big(h(\ln(n+1)) - h(\ln n)\Big)$, $\beta > 0$,

$$\ln|a_n| = -\sum_{s=1}^{n}\frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s}c_s \quad (n \geq 1), \quad a_0 = 1,$$

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\mathrm{e}^{s\lambda_n}.$$

Зауважимо, що завдяки (14), (15) і $t=O(h(t))$ $(t\to+\infty)$ елементарно випливає $f_1\in H_1(\Lambda_1)$. Оскільки

$$\chi_n=\frac{1}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\ln(a_{n-1}/a_n)=\sum_{s=1}^{n-1}\frac{c_s}{\lambda_s}\uparrow+\infty\quad(n\to+\infty),$$

То для $x\in[\chi_n,\chi_{n+1})$ (див. [11])

$$\ln\mu(x,F)=\ln a_n+x\lambda_n\le\ln a_n+\lambda_n\chi_{n+1}=\beta h(\ln(n+1)),\tag{16}$$

а для $m\le n-1$

$$\ln a_m+x\lambda_m\ge\chi_n\lambda_m-\sum_{s=1}^{m}\frac{\lambda_m-\lambda_s}{\lambda_s}c_s\ge\beta h(\ln(m+1)).\tag{17}$$

Виберемо

$$m_1=\frac{nh'(\ln(n+1))-\ln(n+1)}{h'(\ln(n+1))+\ln(n+1)},\ m=[m_1]\le n-1.$$

Тоді, завдяки умові $\ln\left(1+\dfrac{h'(t)}{t}\right)=o(t)$ $(t\to+\infty)$

$$\begin{aligned}\ln(n-m)\ge\ln(n-m_1)&=\ln(n+1)-\ln\left(1+\frac{h'(\ln(n+1))}{\ln(n+1)}\right)=\\&=(1+o(1))\ln(n+1)\ (n\to+\infty).\end{aligned}\tag{18}$$

Оскільки

$$\ln\frac{n+1}{m+1}\le\ln\frac{n+1}{m_1}\le\frac{n-m_1+1}{m_1}\le2\frac{n-m_1}{m_1}=2\frac{(n+1)\ln(n+1)}{nh'(\ln(n+1))-\ln(n+1)},$$

то

$$\begin{aligned}&h(\ln(n+1))-h(\ln(m+1))\le h'(\ln(n+1))\ln\frac{n+1}{m+1}=\\&=2\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{h'(\ln(n+1))}{h'(\ln(n+1))-\frac{1}{n}\ln(n+1)}\ln(n+1)=\\&=(2+o(1))\ln(n+1)\quad(n\to+\infty).\end{aligned}\tag{19}$$

Якщо тепер вибрати $\beta<\dfrac{1}{2}$, то із (18) і звідси одержуємо при $n\to+\infty$

$$\ln(n-m)-\beta\Big(h(\ln(n+1))-h(\ln(m+1))\Big)\ge(1-2\beta+o(1))\ln(n+1).\tag{20}$$

Зауважимо, що для $x \in [\chi_n, \chi_{n+1})$ послідовність $(a_m e^{x\lambda_m})$ монотонно зростаюча для $m \le n$, тому $f_1(x) \ge \sum\limits_{s=m}^{n} a_s e^{x\lambda_s} \ge (n-m)a_m e^{x\lambda_m}$. Враховуючи (16)-(20), одержуємо при $n \to +\infty$

$$\omega(\ln f_1(x)) - \omega(\ln \mu(x, f_1)) \ge \omega(\ln(n-m) + \beta h(\ln(m+1)))-$$
$$-\,\omega(\beta h(\ln(n+1))) \ge \frac{(1-2\beta+o(1))\ln(n+1)}{h^{-1}(\ln(n-m)+\beta h(\ln(m+1)))}.$$

Зауважуючи, що $\min\{h'(t) : t \ge 1\} = h'(1) = p > 0$ і $h\big((1+\frac{1}{p})t\big) \ge h(t) + \frac{1}{p}th'(t) \ge h(t)+t$, а також $h^{-1}\Big(\ln(n-m)+\beta h(\ln(m+1))\Big) \le h^{-1}(\ln n + h(\ln n)) \le \left(1+\frac{1}{p}\right)\ln n$, негайно одержуємо $\omega(\ln f_1(x)) - \omega(\ln \mu(x, f_1)) \ge c_1 > 0$ $(x \ge x_0)$. Теорему 4 доведено.

Безпосередньо з теорем 3 і 4 одержуємо.

Наслідок 2. *Нехай $\omega \in L_3 \cap L_4$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_1(\Lambda)$ співвідношенння (8) виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні множини скінченної міри необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\int^{+\infty} \frac{h(\ln n(t))}{t^2}\,dt < +\infty. \tag{21}$$

Наслідок 3. *Нехай $\omega \in L_3 \cap L_4 \cap L_5$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_p(\Lambda)$ співвідношення (8) виконувалось при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$, $\mu_p(E \cap S_r) = O(r^{p-1})$ $(r \to +\infty)$) необхідно і досить, щоб виконувалась умова (21), де K — довільний конус такий, як в теоремі 3.*

Доведення повторює в цілому доведення наслідку 1. Достатність випливає з теореми 3. Якщо ж умова (21) не виконується, то оскільки за умовою $\omega \in L_5$, $h(x)$ — опукла функція, то з нерівності Єнсена, оскільки $n(t) \le n_1(t)...n_p(t)$, випливає, що знайдеться j таке, що $\int^{\infty} t^{-2}h(\ln n_j(t))dt = +\infty$. Не зменшуючи загальності, вважаємо $j = 1$. За теоремою 4, існує функція f_1 така, що

$$\omega(\ln f_1(\sigma_1)) - \omega(\ln \mu(\sigma_1, f_1)) \ge c > 0 \ (\sigma_1 \ge \sigma_1^0). \tag{22}$$

Побудуємо функції $f_j \in H_1(\Lambda^{(j)})$, $\Lambda^{(j)} = (\lambda_k^{(j)})$, з додатними коефіцієнтами і такі, що $\ln \mu(t, f_j) \le \ln \mu(t, f_1)$ $(t \ge 0)$, $j = \overline{1, p-1}$. Виберемо тепер функцію $F(\sigma) = f_1(\sigma_1)f_2(\sigma_2)...f_p(\sigma_p)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_p)$ і визначимо множину $E = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \sigma_1 \ge \sigma_1^0, \sigma_1 \ge \max\{\sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_p\}\}$.

Використовуючи (22), для $\sigma \in E$ маємо

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \ge \omega\Big(\omega^{-1}(c + \omega(\ln \mu(\sigma_1, f_1))) + \sum_{j=2}^{p} \ln \mu(\sigma_j, f_j)\Big)-$$
$$\omega\Big(\sum\nolimits_{j=1}^{p} \ln \mu(\sigma_j, f_j)\Big) \ge \Big\{\omega^{-1}(c + \omega(\ln \mu(\sigma_1, f_1))) - \ln \mu(\sigma_1, f_1)\Big\}\omega'\Big(\omega^{-1}(c+$$
$$\omega(\ln \mu(\sigma_1, f_1))) + \sum_{j=2}^{p} \ln \mu(\sigma_j, f_j)\Big) \ge \frac{\omega'\Big(\omega^{-1}(c + \omega(\ln \mu(\sigma_1, f_1))) + (p-1)\ln \mu(\sigma_1, f_1)\Big)}{\omega'(\ln \mu(\sigma_1, f_1))}.$$

Залишилось пригадати умову $\omega \in L_5$. Наслідок 3 доведено.

Зауваження. *Умову* $\omega \in L_3 \cap L_4 \cap L_5$ *задовольняють, наприклад, функції* $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\omega(t) = (\ln t)^{1+\alpha}$, $\alpha \geq 0$.

На завершення відзначимо, що теорема 4, а також варіант теореми 3 при $p = 1$ належать О.Б. Скасківу, йому ж належить постановка задачі при $p \geq 2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Valiron G. *Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere* // Ann Fac. Sci. - Univ. Toulouse.- 1914. - V. 5. - A. 117–257.
2. Wiman A. *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytishen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorischen Reihe* // Acta Math. - 1914.- V. 37. - P. 305–326.
3. Borel E. Leçons sur les fonctions entieres.- Paris: Gauthier-Villars, 1921.
4. Битлян И.Ф., Гольдберг А.А. *Теоремы Вимана-Валирона для целых функций многих комплексных переменных* // Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. мат., мех. и астр. - 1959. - Вып. 2, № 13. - С. 27–41.
5. Schumitzky A. *A probabilistic approach to the Wiman-Valiron theory for entire functions of several complex variables* // Complex variables.- 1989. - V. 13. - P. 85–98.
6. Fenton P.C. *Wiman-Valiron theory in two variables* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1995.- V. 347, № 11, P.4403–4412.
7. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем. заметки. - 1985.- Т. 37, № 1. - С. 41–47.
8. Гречанюк Н.И. *О поведении максимального члена кратного ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Укр. мат. журн. - 1989. - Т. 41. № 8. - С. 1047–1053.
9. Гречанюк Н.И. Максимум модуля и максимальный член целого двойного ряда Дирихле.: Дис. ... канд. физ.-мат. н. - Львов, 1989. - 125 с.
10. Скасків О.Б., Луцишин М.Р. *Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле* // Укр. мат. журн.- 1992.- Т. 44. № 9.- С. 1296–1298.
11. Шеремета М.Н. *О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Мат. заметки.- 1985. - Т. 47. № 1 - С. 119–123.
12. Маергойз Л.С. *Об одном результате Валирона* // Теория функций, функцион. анализ и их прил. (Харьков) - 1978. - Вып. 29.- С. 89–98.

Львівський університет

Надійшло 9.01.97