УДК 515.12

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE RADUL SUR LES ENSEMBLES ABSORBANTS

Robert Cauty

R. Cauty. *Solution of a problem of Radul on absorbing sets*, Matematychni Studii, **7**(1997) 201–204.

A problem of Radul on absorbing sets resolved.

1. Introdution. Nous suivons la terminologie et les notations de [1]. En particulier, si A est un sous-ensemble d'un espace K, nous notons $W(K,A)$ le sous-espace du produit K^ω formé des points n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées dans $X \setminus A$. Pour tout ordinal dénombrable α, nous notons $\mathcal{M}_\alpha$ (resp. $\mathcal{A}_\alpha$) la collection des espaces qui sont des boréliens absolus de classe multiplicative (resp. additive) α.

Dans [5], T. Radul a prouvé que si K est un rétracte absolu compact et si $A \in \mathcal{M}_2$ est un sous-ensemble homotopiquement dense de K qui est réunion dénombrable de Z-ensembles, alors le couple $\big(K^\omega, W(K,A)\big)$ est homéomorphe à (Q, Λ_3), et il a posé le problème de savoir si ce résultat se généralisait aux classes boréliennes supérieures: si $A \in \mathcal{M}_\xi \setminus \bigcup_{\alpha<\xi} \mathcal{M}_\alpha$ est un sous-ensemble homotopiquement dense de K qui est réunion dénombrable de Z-ensembles, le couple $\big(K^\omega, W(K,A)\big)$ est-il homéomorphe à $(Q, \Lambda_{\xi+1})$? (voir aussi [1], problème 5, p.144). Nous nous proposons ici de montrer que la réponse à cette question est négative.

Soit C un ensemble de Cantor linéairement indépendant dans l'espace de Hilbert l^2 tel que, pour tout sous-ensemble infini A et C, le sous-espace vectoriel engendré par A soit dense dans l^2 (voir [2], proposition 2.2, p.267). Compactifions l^2 en l'identifiant au pseudo-intérieur du cube de Hilbert Q par un homéomorphisme arbitraire, mais fixé.

Théorème. *Soient A un sous-ensemble infini de C de F le sous-espace vectoriel de l^2 engendré par A. Alors, le couple $\big(Q^\omega, W(Q,F)\big)$ n'est pas $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_3)$-universel.*

Puisque F est homotopiquement dense dans l^2, qui est homotopiquement dense dans Q, F est homotopiquement dense dans Q. Comme tout sous-espace vectoriel partout dense de l^2 contenu dans un sous-ensemble σ-compact, F est réunion dénombrable de Z-ensembles. Enfin, il est connu que si $A \in \mathcal{M}_\xi \setminus \bigcup_{\alpha<\xi} \mathcal{M}_\alpha$, alors $F \in \mathcal{M}_\xi \setminus \bigcup_{\alpha<\xi} \mathcal{M}_\alpha$ ([4], lemme 6.6). Puisque $(Q, \Lambda_{\xi+1})$ est $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_{\xi+1})$-universal

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C55, 54F65, 57N20.

et que $\mathcal{A}_{\xi+1}$ contient $\mathcal{M}_3$ si $\xi \geq 3$, nous obtenons donc ainsi un contreexemple au problème de Radul pour tout $\xi \geq 3$.

2. Démonstration du théorème. Soit σ le sous-ensemble du cube de Hilbert $Q = [-1,1]^\omega$ formé des points n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Alors, $W(Q,\sigma)$ appartient à $\mathcal{A}_3$ (en fait, $\big(Q^\omega, W(Q,\sigma)\big) \cong (Q, \Lambda_3)$ d'après le résultat de Radul), donc le théorème résultera du lemme suivant.

Lemme. *Il n'existe aucune fonction continue $\varphi\colon Q^\omega \to Q^\omega$ telle que $\varphi^{-1}\big(W(Q,F)\big) = Q^\omega \setminus W(Q,\sigma)$.*

La démonstration est une variante de l'argument de [3]. Supposons au contraire qu'il existe une fonction continue $\varphi = (\varphi_p)_{p=0}^\infty\colon Q^\omega \to Q^\omega$ vérifiant

$$\varphi^{-1}\big(W(Q,F)\big) = Q^\omega \setminus W(Q,\sigma).$$

Soit E le sous-espace vectoriel de l^2 engendré par C. Soit $E_0 = \{0\} \subset E$. Pour m,k entiers ≥ 1, soit $E_{m,k}$ l'énsemble des points de E de la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ où les x_i sont des points de C vérifient $d(x_i,x_j) \geq 1/k$ pour $i \neq j$ et les λ_i vérifiant $\frac{1}{k} \leq |\lambda_i| \leq k$ pour tout i. Les $E_{m,k}$ sont des compacts. Pour $n \geq 1$, posons

$$E_n = \{0\} \cup \bigcup \{E_{m,k}/m \leq n \text{ et } k \leq n\}.$$

Alors, $\{E_n\}_{n=0}^\infty$ est une suite croissante de fermés recouvrant E.

Pour tout $r \geq 0$, soit (Q_r,σ_r) une copie de (Q,σ); soit $Q^\omega = \prod_{r=0}^\infty Q_r$. Pour tout r, prenons une suite croissante de compacts $\{C_r^p\}_{p=0}^\infty$ telle que $\sigma_r = \bigcup_{p=0}^\infty C_r^p$.

Nous allons construire par récurrence, pour tout $p \geq 0$, une partition de l'ensemble $\{0,1,\dots,p\}$ en trois sous-ensembles $H_i(p)$, $1 \leq i \leq 3$, une suite croissante $\{r_p\}$ d'entiers et, pour $0 \leq r \leq r_p$, un sous-ensemble $B_p(r)$ de Q_r, de façon que les conditions suivantes soient vérifiées pour $0 \leq q \leq p$ et tout r vérifiant $r_{q-1} < r \leq r_q$ $(r_{-1} = -1)$:

(1) pour $i = 1,2$, si $q \in H_i(p)$, alors $q \in H_i(p')$ pour tout $p' \geq p$,
(2) si $q \in H_1(p)$, alors il existe un point y_r^0 de σ_r tel que $B_{p'}(r) = \{y_r^0\}$ pour tout $p' \geq p$,
(3) si $q \in H_2(p)$, alors il existe un point y_r^0 de $Q_r \setminus \sigma_r$ tel que $B_{p'}(r) = \{y_r^0\}$ pour tout $p' \geq p$,
(4) si $q \in H_3(p)$, $B_p(r)$ est un ouvert de Q_r de diamètre $\leq 1/p$ disjoint de C_r^p,
(5) si $p \geq 1$ et $q \in H_3(p) \cap H_3(p-1)$, alors $\overline{B_p(r)} \subset B_{p-1}(r)$,
(6) si $p \geq 1$ et $q \in H_3(p) \cap H_i(p-1)$, où $i \in \{1,2\}$, alors $y_r^0 \in B_{p-1}(r)$.

Soit $Y_{-1} = Q^\omega$. Pour $p \geq 0$, nous posons

$$Y_p = \Big(\prod_{r=0}^{r_p} B_p(r)\Big) \times \Big(\prod_{r=r_{p+1}}^{\infty} Q_r\Big).$$

Les conditions (2),(3),(5) et (6) entraînent que $\{Y_p\}$ est une suite décroissante. Remarquons aussi que Y_p est homéomorphe à un ouvert de Q. Nous voulons que Y_p vérifie les conditions suivantes:

(7) si $q \in H_1(p)$, alors $\varphi_q(Y_p) \subset F$,

(8) si $q \in H_2(p)$, alors $\varphi_q(Y_p) \subset E \setminus F$,
(9) si $q \in H_3(p)$, alors $\varphi_q(Y_p) \cap E_p = \varnothing$.

Supposons que $p = 0$ ou que $p \geq 1$ et que nos objets sont construits jusqu'à l'ordre $p-1$. Si $p = 0$, posons $l = 0$, et si $p \geq 1$ soit l le nombre d'éléments de $H_3(p-1)$. Soit $q_0 = p$ et, si $l \geq 0$, soient $q_1, \dots, q_l$ les éléments de $H_3(p-1)$. Nous allons construire une suite finie décroissante

$$Y_{p-1} = U_{-1} \supset U_0 \supset \cdots \supset U_l$$

d'ouverts de Y_{p-1} et, lors de la construction de U_j, nous déterminerons auquel des ensembles $H_i(p)$ appartient q_j (les éléments de $\{0, \dots, p\} \setminus \{q_0, \dots, q_l\}$ sont classés dans $H_1(p)$ ou $H_2(p)$ conformément à (1)). Soit $j \geq 0$, et supposons U_{j-1} construit. Pour construire U_j, distinguons deux cas:

a) $\varphi_{q_j}^{-1}(Q \setminus E) \cap U_{j-1} \neq \varnothing$. Comme E_p est fermé, nous pouvons trouver un ouvert $U_j \subset U_{j-1}$ tel que $\varphi_{q_j}(U_j) \subset Q \setminus E_p$. Nous convenons qu'alors $q_j \in H_s(p)$.

b) $U_{j-1} \subset \varphi_{q_j}^{-1}(E)$. Alors, la Q-variété U_{j-1} est la réunion des fermés $\varphi_{q_j}^{-1} \cap U_{j-1}$ et $\varphi_{q_j}^{-1}(E_{m,k}) \cap U_{j-1}$ $(m, k \geq 1)$, donc nous pouvons trouver des entiers m et k et un ouvert connexe non vide $U_j \subset U_{j-1}$ tels que $\varphi_{q_j}(U_j) \subset E_{,k}$ (l'argument qui suit se simplifie si $\varphi_{q_j}(U_j) \subset E_0$). Munissons l'espace 2^C des compacts non vides de C de la topologie de Vietoris. Tout point x de $E_{m,k}$ s'écrit, de façon unique à l'ordre près, $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, où les x_i sont des points distincts de C et les λ_i non nuls, et il est facile de voir que la fonction

$$x \rightsquigarrow \operatorname{supp}(x) = \{x_1, \dots, x_m\} \colon E_{m,k} \to 2^C$$

est continue. Puisque U_j est connexe et 2^C de dimension zéro, la fonction continue $\operatorname{supp} \circ \varphi_{q_j}$ est constante sur U_j. Soit $\operatorname{supp} \circ \varphi_{q_j}(z) = \{x_1^0, \dots, x_m^0\}$ pour $z \in U_j$. Si $\{x_1^0, \dots, x_m^0\} \subset A$, alors $\varphi_{q_j}(U_j) \subset F$, et nous plaçons q_j dans $H_1(p)$. Si l'un des points $x_1^0, \dots, x_m^0$ n'appartient pas à A, alors $\varphi_{q_j}(U_j) \subset E \setminus F$, et nous plaçons q_j dans $H_2(p)$.

U_l, étant ouvert dans Y_{p-1}, contient un ouvert de la forme $\prod_{r=0}^\infty V_r$ où $V_r = B_{p-1}(r) = \{y_r^0\}$ si $r_{q-1} < r \leq r_q$ et $q \in H_1(p-1) \cup H_2(p-1)$, tandis que V_r est ouvert dans Q_r pour les autres valeurs de r, et qu'il existe un $r_p > r_{p-1}$ tel que $V_r = Q_r$ pour $r > r_p$. Pour $q \in H_1(p)$ (resp. $H_2(p)$) et $r_{q-1} < r \leq r_q$, prenons y_r^0 conformément à (2) (resp. (3)) si $q \in H_1(p-1)$ (resp. $H_2(p-1)$); si $q \notin H_1(p-1)$ (resp. $H_2(p-1)$), fixons un ouvert $B_p(r)$ de Q_r contenu dans V_r, de diamètre $\leq 1/p$, disjoint de C_r^p et tel que $\overline{B_p(r)} \subset B_{p-1}(r)$ si $q \in H_3(p-1)$.

La $p^{\text{ème}}$ étape de la construction est maintenant achevée. Les conditions (1)–(6) sont vérifiées par construction. Remarquant que

$$Y_p \subset U_l \subset \ldots \subset U_0 \subset Y_{p-1},$$

les conditions (7)–(9) résultent du choix des U_j pour $q \in \{q_0, \dots, q_l\}$ et du fait que Y_{p-1} vérifie (7) et (8) si $q \notin \{q_0, \dots, q_l\}$.

Définissons maintenant trois sous-ensembles R_1, R_2, R_3 de $\mathbb{N}$ et des points $y_r \in Q_r$. Pour $r \geq 0$, soit p tel que $r_{p-1} < r \leq r_p$. Convenons que $r \in R_1$ (resp. R_2) s'il existe $p' \geq p$ tel que $p \in H_1(p')$ (resp. $H_2(p')$), et posons alors $y_r = y_r^0$, de sorte que $y_r \in \sigma_r$ si $r \in R_1$ et $y_r \in Q_r \setminus \sigma_r$ si $r \in R_2$. Soit $R_3 = \mathbb{N} \setminus (R_1 \cup R_2)$. Si $r \in \mathbb{R}_3$, nous avons $p \in H_3(p')$ pour tout $p' \geq p$, et il résulte de (4) et (5) que $\bigcap_{p'=p}^{\infty} B_{p'}(r)$ est un point y_r de $Q_r \setminus \sigma_r$. Posant $y = \{y_r\}$, nous voyons que le point y appartient à $W(Q, \sigma)$ si, et seulement si, $R_1 \cup R_3$ est fini.

D'autre part, $y \in Y_p$ pour tout p. D'après (7) (resp. (8)), $\varphi_p(y) \in F$ (resp. $E \setminus F$) si $p \in R_1$ (resp. R_2). Il résulte de (9) que $\varphi_p(y) \in Q \setminus E \subset Q \setminus F$ si $p \in R_3$. Par conséquent, $\varphi(y)$ appartient à $W(Q, F)$ si, et seulement si, $R_2 \cup R_3$ est fini, et nous arrivons à contradiction que $y \in W(Q, \sigma)$ si, et seulement si, $\varphi(y) \in W(Q, F)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Banakh, T. Radul, M. Zarichnyi, *Absorbing sets in infinite dimensional manifolds*, VNTL Publishers, Lviv, 1996.

[2] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Warszawa, 1975.

[3] R. Cauty, *Sur l'universalité des produits de rétractes absolus*, Bull. Polish. Acad. Sci. **44** (1996), 453–456.

[4] R. Cauty, T. Dobrowolski, *Applying coordinate products to the topological identification of normed space*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), 625–649.

[5] T. Radul, *Absorbing sets in countable powers of absolute retracts*, preprint.

Université Paris VI, UFR 920

Boîte courrier 172

4, Place Jussieu

75252 Paris Cedex 05, France

Получено 10.01.97