УДК 517.432

РЕГУЛЯРНІ $\mathcal{U}$-ІНВАРІАНТНІ РОЗШИРЕННЯ ЕРМІТОВИХ ОПЕРАТОРІВ

О.В. Кужель

A.V. Kuzhel. *Regular $\mathcal{U}$-invariant extensions of Hermitian operators*, Matematychni Studii, **7**(1997) 193–200.

The aim of the work is an investigation of a wide class of extensions of Hermitian operators — regular $\mathcal{U}$-invariant extensions.

1. Попередні поняття та результати. Нехай A — ермітів оператор з індексом дефекту (m,m) $(m \le \infty)$, що діє в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$; $\mathcal{U}$ — деяка множина унітарних в $\mathcal{H}$ операторів і така, що коли $U \in \mathcal{U}$, то й $U^* \in \mathcal{U}$.

Означення. Оператор A називається $\mathcal{U}$-інваріантним[1], якщо він переставний з будь-яким оператором U із $\mathcal{U}$.

В роботі Філіпса [2] показано, що розширення за Фрідріхсом $\mathcal{U}$-інваріантного напівобмеженого симетричного оператора A є $\mathcal{U}$-інваріантне. З іншого боку, у тій же роботі побудовано приклад $\mathcal{U}$-інваріантного (відносно деякої комутативної множини $\mathcal{U}$) симетричного оператора з індексом дефекту (1,1), у якого не існує $\mathcal{U}$- інваріантних самоспряжених розширень.

В роботі А.Н. Кочубея [1] питання про існування $\mathcal{U}$-інваріантних самоспряженних розширень симетричного оператора розв'язується в термінах характеристичної функції А.В. Штрауса.

Тут наводиться, відмінне від початкового, обгрунтування теореми Р. Філіпса, а також встановлюються умови існування регулярних (див. п. 4), зокрема, самоспряжених $\mathcal{U}$-інваріантних розширень ермітових (не обов'язково щільно заданих) $\mathcal{U}$-інваріантних операторів.

В п.5 аналізується приклад $\mathcal{U}$-інваріантного симеричного оператора A, у якого не існує $\mathcal{U}$-інваріантних самоспряжених розширень. При цьому вказується на особливість побудованого дисипативного розширення A_λ оператора A, що означається рівністю (27), яка полягає у тому, що точковий спектр оператора A_λ повністю заповнює верхню півплощину.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A20, 47B15.

Дослідження, представлені в цій публікації, створено за сприянням Міжнародної Соросівської програми освіти в галузі точних наук Міжнародного фонду Відродження, грант SPU 041036.

[1]Термін $\mathcal{U}$-інваріантний запозичено із роботи А.Н. Кочубея [1].

2. Деякі загальні властивості $\mathcal{U}$-інваріантних ермітових операторів.

Твердження 1. *Нехай A — ермітів $\mathcal{U}$-інваріантний оператор. Тоді при будь-яких $U \in \mathcal{U}$ та $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$U\colon \mathfrak{D}_A \to \mathfrak{D}_A, \qquad U\colon \mathfrak{N}_\lambda \to \mathfrak{N}_\lambda, \tag{1}$$

де $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектний підпростір оператора A.

Доведення. Перше співвідношення із (1) випливає із рівності $AU = UA$ ($\forall U \in \mathcal{U}$). Для обгрунтування другого співвідношення із (1) зазначимо, що при довільних $x \in \mathfrak{D}_A$ та $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ $\big((A-\lambda I)x, Ux_\lambda\big) = \big(U^*(A-\lambda I)x, x_\lambda\big) = \big((A-\lambda I)U^*x, x_\lambda\big) = 0$ і, отже, $U\colon \mathfrak{N}_\lambda \to \mathfrak{N}_\lambda$.■

Лема 2. *Замикання $\mathcal{U}$-інваріантного оператора теж є $\mathcal{U}$-інваріантний оператор.*

Доведення. Нехай A є $\mathcal{U}$-інваріантний оператор і $\bar{A}$ — його замикання. Тоді, якщо $x_n \in \mathfrak{D}_A$, $x_n \to x$ і $Ax_n \to y$, то $x \in \mathfrak{D}_{\bar{A}}$ і $y = \bar{A}x$.

Нехай, далі, $U \in \mathcal{U}$. Тому, що $Ux_n \to Ux$ і $Ux_n \in \mathfrak{D}_A$, то $AUx_n = UAx_n \to Uy$. Але тоді $Ux \in \mathfrak{D}_{\bar{A}}$ і $\bar{A}Ux = Uy = U\bar{A}x$, тобто $\bar{A}U = U\bar{A}$.■

Теорема 3. *Якщо у замкненого $\mathcal{U}$-інваріантного оператора A є хоча б одна дійсна точка регулярного типу, то у оператора A існує $\mathcal{U}$-інваріантне самоспряжене розширення.*

Доведення. Нехай $\lambda \in \pi(A) \cap \mathbb{R}$, де $\pi(A)$ — множина точок регулярного типу (див. напр., [4],§1). Тоді лінеали $\mathfrak{D}_A$ та $\mathfrak{N}_\lambda$ лінійно незалежні. Розглянемо на лінеалі $\mathfrak{D}_{\widetilde{A}} = \mathfrak{D} \dotplus \mathfrak{N}_\lambda$ ермітів оператор $\widetilde{A}$, що означається рівністю

$$\widetilde{A}(x_0 + x_\lambda) = Ax_0 + \lambda x_\lambda \quad (x_0 \in \mathfrak{D},\ x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda).$$

На підставі твердження 1 оператор $\widetilde{A}$ є $\mathcal{U}$-інваріантним. Крім того, міркуючи подібно, як і в [4] при доведенні теореми фон Неймана (§3), переконуємося, що ермітів оператор $\widetilde{A}$ щільно означений, і його дефектні числа дорівнюють нулю. Замикання цього оператора є самоспряжений оператор, який, за лемою 2, є $\mathcal{U}$-інваріантним.■

3. Напівобмежені оператори. Теорема Філіпса.

Теорема 4. *Фрідріхсове розширення $\mathcal{U}$-інваріантного напівобмеженого симетричного оператора є $\mathcal{U}$-інваріантне.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що оператор A задовольняє умову (див. [4],§3)

$$(Ax, x) \geq (x, x) \qquad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

Нехай $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярний добуток, означений на лінеалі $\mathfrak{D}_A$ рівністю

$$(x, y)_0 = (Ax, y) \qquad \big(\{x, y\} \subset \mathfrak{D}_A\big). \tag{2}$$

Якщо $U \in \mathcal{U}$, то із (1) маємо $U\colon \mathfrak{D}_A \to \mathfrak{D}_A$. При цьому

$$(Ux, Uy)_0 = (AUx, Uy) = (UAx, Uy) = (x, y)_0.$$

Отже, U є унітарний оператор у передгільбертовому просторі $\mathfrak{D}_A$. Розширюючи оператор U за неперервністю на весь простір $\mathcal{D}_0$, отримаємо унітарний оператор U_0, що діє в $\mathcal{D}_0$ (відносно простору $\mathcal{D}_0$ див. [4], §3). При цьому, якщо $x \in \mathcal{D}_0$ і $x_n \to x$ ($x_n \in \mathfrak{D}_A$), то

$$||Ux_n - Ux|| = ||x_n - x|| \le ||x_n - x||_0 = ||Ux_n - U_0x||_0 \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

і тому $Ux_n \to Ux$. А це означає, що $U_0x = Ux$, тобто U_0 є звуженням оператора U на лінеал $\mathcal{D}_0$.

Отже, оператор $U_0 = U|_{\mathcal{D}_0}$ є унітарний оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{D}_0$. Крім того, тому що $U^* \in \mathcal{U}$, то, за аналогією з попереднім, $U^*\colon \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$. При цьому, якщо $y \in \mathfrak{D}_A$ і $x \in \mathcal{D}_0$, то

$$(U^*x, y)_0 = (x, Uy)_0 = (x, U_0y)_0 = (U_0^*x, y)_0,$$

звідки випливає, що $U_0^* = U^*|_{D_0}$.

Нехай $\widetilde{A}$ — розширення за Фрідріхсом оператора A. Тоді, як відомо,

$$\widetilde{A}x = A^*x \qquad (\mathfrak{D}_{\widetilde{A}} = \mathfrak{D}_{A^*} \cap \mathcal{D}_0).$$

Крім того, при будь-яких x із $\mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$ та y із $\mathcal{D}_0$ $(\widetilde{A}x, y) = (x, y)_0$. Тому

$$(U\widetilde{A}x, y) = (\widetilde{A}x, U_0^*y) = (x, U_0^*y)_0 = (U_0x, y)_0 = (\widetilde{A}Ux, y),$$

звідки отримуємо рівність $U\widetilde{A} = \widetilde{A}U$.■

4. Умова існування регулярних $\mathcal{U}$-інваріантних розширень в термінах формул фон Неймана. Оператор B називається регулярним (або правильним) розширенням ермітового оператора A, якщо

$$(Ax, y) = (x, By) \qquad (x \in \mathfrak{D}_A, y \in \mathfrak{D}_B)$$

(детальніше див. [4,5]).

Нехай A — ермітовий $\mathcal{U}$-інваріантний оператор, B — регулярне розширення оператора A і $\lambda \notin \sigma_p(B)$ ($\mathrm{Im}\lambda \neq 0$). Тоді довільний вектор x із $\mathfrak{D}_B$ можна подати у вигляді (див. [4,5])

$$x = x_0 + x_\lambda + \Phi x_\lambda \qquad (x_0 \in \mathfrak{D}_A, x_\lambda \in \mathfrak{D}_\Phi), \tag{3}$$

де оператор Φ діє із $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$. При цьому

$$Bx = Ax_0 + \overline{\lambda}x_\lambda + \lambda\Phi x_\lambda. \tag{4}$$

Теорема 5. *Регулярне розширення B $\mathcal{U}$-інваріантного ермітового оператора A, яке означається рівностями (3) та (4), є $\mathcal{U}$-інваріантним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{U}$-інваріантним є оператор Φ в формулах (3) і (4).*

Доведення. Нехай оператор B є $\mathcal{U}$-інваріантним. Тоді при довільних U із $\mathcal{U}$ та $x \in \mathfrak{D}_B$ вектор $y = Ux \in \mathfrak{D}_B$. При цьому, на підставі рівності (3) та твердження 1,

$$y = y_0 + y_\lambda + U\Phi U^* y_\lambda, \tag{5}$$

де $y_0 = Ux_0 \in \mathfrak{D}_A$, $y_\lambda = Ux_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$. Враховуючи тепер, що при фіксованому $\lambda \notin \sigma_p(B)$ оператор Φ в (3) визначається однозначно, робимо висновок, на підставі рівностей (3) та (5), що $U\Phi U^* = \Phi$, тобто

$$U\Phi = \Phi U \qquad (\forall U \in \mathcal{U}). \tag{6}$$

Очевидно, що і навпаки — якщо оператор Φ задовольняє умову (6), то оператор B, що означається рівностями (3) і (6), є $\mathcal{U}$-інваріантним.■

Теорема 6. *Нехай існує регулярне $\mathcal{U}$-інваріантне розширення B $\mathcal{U}$-інваріантного ермітового оператора A, яке означається рівностями (3) та (4). Якщо при цьому оператор Φ у вказаних рівностях обмежений, означений на всьому просторі $\mathfrak{N}_\lambda$ і $0 \in \rho(\Phi)$, то існує також і самоспряжене $\mathcal{U}$-інваріантне розширення оператора A.*

Доведення. Нехай $\Phi = V|\Phi|$ — полярне зображення оператора Φ і $U \in \mathcal{U}$. За умовою оператор B є $\mathcal{U}$-інваріантним розширенням оператора A. Тому, на підставі теореми 5, оператор U переставний з Φ. Але тоді оператор $|\Phi| = \sqrt{\Phi^*\Phi}$, що діє в підпросторі $\mathfrak{N}_\lambda$, також переставний з U. Крім того, враховуючи умову теореми, оператор $|\Phi|$ відображає $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_\lambda$. Тому V є унітарним оператором, що відображає $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$. Крім того, очевидно, V переставний з U $(U \in \mathcal{U})$.

Розглянемо оператор S, що означається у такий спосіб: довільний вектор x із $\mathfrak{D}_S$ можна подати у вигляді

$$x = x_0 + x_\lambda + Vx_\lambda \qquad (x_0 \in \mathfrak{D}_A, x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda).$$

При цьому

$$Sx = Ax_0 + \overline{\lambda}x_\lambda + \lambda Vx_\lambda.$$

Означений так оператор є самоспряженим і комутує з U, тобто S — самоспряжене $\mathcal{U}$-інваріантне розширення оператора A.■

5. Умова існування самоспряжених $\mathcal{U}$-інваріантних розширень в термінах характеристичної функції А.В. Штрауса. Нехай A — замкнений ермітовий оператор, λ $(\mathrm{Im}\lambda < 0)$ — фіксоване число і $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектний підпростір оператора A. Як можна показати, (див. [3]), оператор A_λ, що означається на лінеалі $\mathfrak{D}_{A_\lambda} = \mathfrak{D}_A \dotplus \mathfrak{N}_\lambda$ рівністю

$$A_\lambda(x_0 + x_\lambda) = Ax_0 + \overline{\lambda}x_\lambda, \tag{7}$$

де $x_0 \in \mathfrak{D}_A$, а $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, є максимальним дисипативним оператором. Якщо при цьому оператор A є $\mathcal{U}$-інваріантний, то, очевидно, оператор A_λ теж є $\mathcal{U}$-інваріантним.

Нехай μ $(\mathrm{Im}\mu < 0)$ — фіксоване число. Тому що $\mu \in \rho(A_\lambda)$, то з урахуванням формул фон Неймана, вектор $x = x_0 + x_\lambda$ із $\mathfrak{D}_{A_\lambda}$ можна подати у вигляді

$$x = y_0 + y_\mu + \Phi y_\mu, \tag{8}$$

де $\mathfrak{D}_\Phi = \mathfrak{N}_\mu$ (на підставі того, що оператор A_λ максимальний); $\Phi\colon \mathfrak{N}_\mu \to \mathfrak{N}_{\overline{\mu}}$ і, очевидно, при фіксованому μ оператор Φ залежить від λ $(\Phi = \Phi_\lambda)$. При цьому

$$A_\lambda x = Ay_0 + \overline{\mu}y_\mu + \mu\Phi y_\mu. \tag{9}$$

Із рівностей (8) та (9) випливає, що

$$(A_\lambda - \mu I)x = (A - \mu I)y_0 + (\overline{\mu} - \mu)y_\mu. \tag{10}$$

Застосовуючи до обох частин рівності (10) оператор $(A_\lambda - \mu I)^{-1}$ та враховуючи рівність $Ay_0 = A_\lambda y_0$, дістанемо:

$$x = y_0 + (\overline{\mu} - \mu)(A_\lambda - \mu I)^{-1}y_\mu. \tag{11}$$

Із рівностей (11) та (8) випливає, що

$$\Phi_\lambda y_\mu = -(A_\lambda - \overline{\mu}I)(A_\lambda - \mu I)^{-1}y_\mu. \tag{12}$$

У праці А.В. Штрауса [3] оператор

$$C(\lambda) = (A_\lambda - \overline{\mu}I)(A_\lambda - \mu I)^{-1} \tag{13}$$

названо характеристичною функцією ермітового оператора A. Отже, у випадку оператора A_λ оператор Φ_λ із відповідних формул фон Неймана лише знаком відрізняється від характеристичної функції $C(\lambda)$ ермітового оператора A.

Теорема 7. *Нехай при деяких фіксованих λ ($Im\lambda < 0$) та μ ($Im\mu < 0$) $0 \in \rho(C(\lambda))$. Тоді існує самоспряжене $\mathcal{U}$-інваріантне розширення $\mathcal{U}$-інваріантного ермітового оператора A.*

Доведення. Справді, якщо A є $\mathcal{U}$-інваріантний ермітів оператор і $U \in \mathcal{U}$, то, на підставі рівності (7), A_λ переставний з U. Але тоді із рівності (13) випливає, що оператор $C(\lambda)$ теж переставний з U. Для завершення обгрунтування теореми залишається скористатися рівністю $\Phi_\lambda = -C(\lambda)$ та теоремами 5 і 6.■

6. Симетричний $\mathcal{U}$-інваріантний оператор, у якого не існує U-інваріантних самоспряжених розширень. Розглянемо у просторі $\mathcal{H} = l_2(-\infty, +\infty)$ оператор V, який означається у такий спосіб:

$$\mathfrak{D}_V = \{x \in \mathcal{H} | x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{0}, x_1, x_2, \dots)\}, \tag{14}$$

$$Vx = (\dots, x_{-3}, x_{-2}, \boxed{x_{-1}}, 0, x_1, x_2, \dots). \tag{15}$$

Отже, для довільних x та y із $\mathfrak{D}_v$ $(Vx, Vy) = (x, y)$, тобто V — ізометричний оператор. При цьому, як не важко переконатися, $1 \notin \sigma_p(V)$. Це дає можливість розглянути оператор A:

$$A = i(V + I)(V - I)^{-1} \qquad (\mathfrak{D}_A = \Delta_{V-I}), \tag{16}$$

який є ермітовим (як перетворення Келі ізометричного оператора).

Покажемо, що оператор A щільно означений і, отже, є симетричним оператором. Справді, нехай вектор $h = (\dots, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, \dots)$ ортогональний лінеалу $\mathfrak{D}_A$. Тоді $\big((V - I)x, h\big) = 0$, тобто

$$(Vx, h) = (x, h) \qquad (\forall x \in \mathfrak{D}_V). \tag{17}$$

Розглянемо вектор $e_m = (\dots, \delta_{(-2)m}, \delta_{(-1)m}, \boxed{\delta_{0m}}, \delta_{1m}, \delta_{2m}, \dots)$, де $m \in \mathbb{Z}$, а δ_{km} — символ Кронекера. При довільному цілому $m \neq 0$ вектор $e_m \in \mathfrak{D}_V$. Підставляючи в (17) $x = e_m$ ($m \neq 0$), отримаємо, що $h_{m+1} = h_m$ і, отже,

$$h_0 = h_{-1} = h_{-2} = \dots = a, \quad h_1 = h_2 = h_3 = \dots = b,$$

що можливо лише при $a = b = 0$. Отже, $h = 0$. А це означає, що A — симетричний оператор.

Нехай $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектний підпростір оператора A і $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$. Тоді

$$\big((A - \lambda I)x, x_\lambda\big) = 0 \qquad (\forall x \in \mathfrak{D}_A). \tag{18}$$

Нехай $x \in \mathfrak{D}_A$. Тоді $x = (V - I)f$, де $f \in \mathfrak{D}_V$. Крім того, на підставі рівності (16), $A = iI + 2i(V - I)^{-1}$. Тому

$$(A - \lambda I)x = (i - \lambda)x + 2i(V - I)^{-1}x = (i - \lambda)(V - I)f + 2if = (i - \lambda)Vf + (\lambda + i)f. \tag{19}$$

Але тоді, враховуючи рівності (18) та (19), отримаємо, що

$$(i - \lambda)(Vf, x_\lambda) + (\lambda + i)(f, x_\lambda) = 0. \tag{20}$$

Зокрема, при $\lambda = i$ рівність (20) перепишеться у вигляді $(f, x_i) = 0$ $(\forall f \in \mathfrak{D}_V)$. Тому

$$x_i = (\dots, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, \dots). \tag{21}$$

Отже, $\mathfrak{N}_i = \langle x_i \rangle$, де вектор x_i означається рівністю (21).

Подібно, при $\lambda = -i$ $\quad (Vf, x_{-i}) = 0$ $(\forall f \in \mathfrak{D}_V)$, і тому $\mathfrak{N}_{-i} = \langle x_{-i} \rangle$, де вектор x_{-i} означається рівністю

$$x_{-i} = (\dots, 0, 0, \boxed{0}, 1, 0, 0, \dots) \tag{22}$$

Розглянемо множину унітарних операторів U_θ, які означаються у такий спосіб. Якщо

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{H}, \tag{23}$$

то

$$U_\theta x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, \theta x_1, \theta x_2, \dots), \tag{24}$$

де $\theta \in \mathbb{C}$, $|\theta| = 1$ і $\theta \neq 1$. На підставі рівностей (14)–(16) оператор U_θ є $\mathcal{U}$-інваріантним, при цьому

$$U_\theta x_i = x_i, \quad U_\theta x_{-i} = \theta x_{-i}, \tag{25}$$

де x_i та x_{-i} — вектори із дефектних підпросторів оператора A, що означається рівностями (21)–(22).

Припустимо, що існує $\mathcal{U}$-інваріантне самоспряжене розширення S оператора A. Тоді, якщо $x \in \mathfrak{D}_S$, то

$$x = x_0 + x_i + \Phi x_i, \quad Sx = Ax_0 - ix_i + i\Phi x_i,$$

де Φ — унітарний оператор, що відображає $\mathfrak{N}_i$ в $\mathfrak{N}_{-i}$. При цьому дефектні підпростори оператора A одновимірні. Тому

$$\Phi x_i = a x_{-i} \qquad (|a| = 1). \tag{26}$$

Крім того, на підставі теореми 5, оператор Φ теж повинен бути $\mathcal{U}$-інваріантним. Але, враховуючи рівності (25) та (26),

$$\Phi U_\theta x_i = \Phi x_i, \quad U_\theta \Phi x_i = \theta \Phi x_i$$

і, отже, рівність $\Phi U_\theta x_i = U_\theta \Phi x_i$ можлива лише при $\Phi x_i = 0$. Отримали суперечність.

Таким чином, на підставі попереднього, не існує $\mathcal{U}$-інваріантних самоспряжених розширень розглядуваного $\mathcal{U}$-інваріантного симетричного оператора A. У той же час регулярні $\mathcal{U}$-іваріантні розширення оператора A існують. Таким, наприклад, є дисипативний оператор A_λ, що означається на лінеалі $\mathfrak{D}_{A_\lambda} = \mathfrak{D}_A \dotplus \mathfrak{N}_\lambda$ рівністю

$$A_\lambda(x_0 + x_\lambda) = Ax_0 + \overline{\lambda} x_\lambda \qquad (x_0 \in \mathfrak{D}_A, x \in \mathfrak{N}_\lambda), \tag{27}$$

де $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектний підпростір оператора A, а λ $(\mathrm{Im}\lambda < 0)$ — фіксована точка.

Відмітимо одну особливість оператора A_λ у розглядованому випадку.

Теорема 8. *Нехай симетричний оператор A означається рівністю (16). Тоді точковий спектр оператора A_λ, що означається рівністю (27), заповнює верхню півплощину.*

Доведення. Нехай $\lambda \neq i$. Тоді, на підставі рівності (20),

$$(Vf, x_\lambda) = K_\lambda (f, x_\lambda), \tag{28}$$

де $K_\lambda = (\lambda + i)(\lambda - i)^{-1}$. При цьому

$$(|K_\lambda| - 1)\mathrm{Im}\lambda > 0 \qquad (\mathrm{Im}\lambda \neq 0). \tag{29}$$

Нехай $x_\lambda = (\dots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \boxed{\varphi_0}, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$. Міркуючи так само, як і при аналізі рівності (18), переконуємося, що при довільному цілому $m \neq 0$, $\varphi_{m+1} = K_\lambda \varphi_m$ і, отже,

$$\varphi_n = (\overline{K}_\lambda)^{n-1}\varphi_1, \quad \varphi_{-n} = (\overline{K}_\lambda)^{-n}\varphi_0 \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{30}$$

Нехай $\mathrm{Im}\lambda > 0$. Тоді, враховуючи співвідношення (29), $|K_\lambda| > 1$. Тому, з урахуванням першої рівності із (30) $|\varphi_n| \geq |\varphi_1|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), що можливо лише при $\varphi_1 = 0$. Отже, при $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\varphi_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Крім того, тому що $(\overline{K}_\lambda)^{-1} = K_{\overline{\lambda}}$, то $\varphi_{-n} = (K_{\overline{\lambda}})^n \varphi_0$. Але тоді (при $\mathrm{Im}\lambda > 0$ та $\varphi_0 = 1$)

$$x_\lambda = (\dots, (K_{\overline{\lambda}})^2, K_{\overline{\lambda}}, \boxed{1}, 0, 0, \dots). \tag{31}$$

При цьому, оскільки $|K_{\overline{\lambda}}| < 1$, то

$$||x_\lambda||^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |K_{\overline{\lambda}}^n|^2 = (1 - |K_{\overline{\lambda}}|^2)^{-1}.$$

Зокрема, при $\lambda = i$, $K_{\overline{\lambda}} = 0$ і вектор x_λ збігається з вектором x_i, що означається рівністю (21).

Аналогічно, при $\mathrm{Im}\lambda < 0$, $|K_\lambda| < 1$. Тому, враховуючи другу рівність із (30), дістанемо, що при будь-якому цілому $n \geq 0$, $\varphi_{-n} = 0$. Але тоді при $\varphi_1 = 1$ (і $\mathrm{Im}\lambda < 0$)

$$x_\lambda = (\dots, 0, 0, \boxed{0}, 1, \overline{K}_\lambda, \overline{K}_\lambda^2, \dots). \tag{32}$$

При цьому $||x_\lambda||^2 = (1 - |K_\lambda|^2)^{-1}$ і при $\lambda = -i$ вектор x_λ збігається з вектором x_{-i} (рівність (22)).

Нехай λ_0 ($\mathrm{Im}\lambda_0 > 0$) — фіксоване число. Враховуючи, що оператор A_λ, означений рівністю (27), дисипативний, робимо висновок, що $\mu = \overline{\lambda}_0 \notin \sigma_p(A_\lambda)$. Тому, з урахуванням формул фон Неймана, довільний вектор $x = x_0 + x_{\overline{\lambda}}$ із $\mathfrak{D}_{A_\lambda}$ можна подати у вигляді $x = y_0 + y_\mu + \Phi y_\mu$, тобто

$$x = y_0 + y_{\overline{\lambda}_0} + \Phi y_{\overline{\lambda}_0} \qquad (y_0 \in \mathfrak{D}_A, y_{\overline{\lambda}_0} \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}_0}),$$

де $y_{\overline{\lambda}_0} = a x_{\overline{\lambda}_0}$, $\Phi y_{\overline{\lambda}_0} = b x_{\lambda_0}$ (a, b — деякі комплексні числа). Отже, остаточно,

$$x = y_0 + a x_{\overline{\lambda}_0} + b x_{\lambda_0}, \tag{33}$$

де $y_0 \in \mathfrak{D}_A$, а вектори x_{λ_0} та $x_{\overline{\lambda}_0}$, на підставі рівностей (31), (32) та $\overline{K_{\overline{\lambda}}} = K_\lambda^{-1}$, можуть бути записані у вигляді

$$x_{\lambda_0} = (\dots, K_{\overline{\lambda}_0}^2, K_{\overline{\lambda}_0}, \boxed{1}, 0, 0, \dots), \tag{34}$$

$$x_{\overline{\lambda}_0} = (\dots, 0, 0, \boxed{0}, 1, K_{\lambda_0}^{-1}, K_{\lambda_0}^{-2}, \dots). \tag{35}$$

Враховуючи рівності (27), (33) та формули фон Неймана, отримуємо

$$Ax_0 + \overline{\lambda}x_\lambda = Ay_0 + a\lambda_0 x_{\overline{\lambda}_0} + b\overline{\lambda}_0 x_{\lambda_0}. \tag{36}$$

При цьому

$$x_0 = (V - I)\varphi, \quad y_0 = (V - I)\psi \qquad \big(\{\varphi, \psi\} \subset \mathfrak{D}_V\big) \tag{37}$$

і, на підставі (16), $Ax_0 = i(V + I)\varphi, \quad Ay_0 = i(V + I)\psi$.
Але тоді рівність (36) перепишеться так:

$$i(V + I)\varphi + \overline{\lambda}x_\lambda = i(V + I)\psi + a\lambda_0 x_{\overline{\lambda}_0} + b\overline{\lambda}_0 x_{\lambda_0}. \tag{38}$$

Домножаючи (33) на i та віднімаючи від (38), отримаємо, враховуючи рівності $x = x_0 + x_{\overline{\lambda}}$ та (37), що

$$2i\varphi + (\overline{\lambda} - i)x_\lambda = 2i\psi + a(\lambda_0 - i)x_{\overline{\lambda}_0} + b(\overline{\lambda}_0 - i)x_{\lambda_0}. \tag{39}$$

Нехай $P\colon \mathcal{H} \to \mathfrak{D}_V^{\perp}$ — ортопроектор в $\mathcal{H}$. Тоді $P\varphi = P\psi = 0$ і, враховуючи рівності (32), (35) та (34),

$$Px_\lambda = Px_{\overline{\lambda}_0} = 0, \quad Px_{\lambda_0} = e_0, \tag{40}$$

де $e_0 = (\dots, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, \dots)$. Застосовуючи оператор P до обох частин рівності (39) та враховуючи рівність (40), отримаємо рівність $b(\overline{\lambda}_0 - i)e_0 = 0$, звідки випливає, що $b = 0$.

Отже, для будь-якого λ_0 із верхньої півплощини $\Phi y_{\overline{\lambda}_0} = bx_{\lambda_0} = 0$. Але тоді

$$x = y_0 + y_{\overline{\lambda}_0}, \quad A_\lambda x = Ay_0 + a\lambda_0 x_{\overline{\lambda}_0}. \tag{41}$$

А якщо врахувати, що $y_{\overline{\lambda}_0} = ax_{\overline{\lambda}_0}$, то при $y_0 = 0$ із рівностей (41) випливає, що $A_\lambda x_{\overline{\lambda}_0} = \lambda_0 x_{\overline{\lambda}_0}$, тобто $\lambda_0 \in \sigma_p(A_\lambda)$.

Отже, вся верхня півплощина належить точковому спектрові оператора A_λ. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Кочубей А.Н. *О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов* // Функцион. анализ и его прил. 1979. Т.13, №4. С.77–78.
2. Филлипс Р.С. *Расширение дуальных подпространств, инвариантных относительно алгебры* // Математика (сб. переводов) 1964. Т.8. №6. С.81–108.
3. Штраус А.В. *О расширениях и характеристической функции симметрического оператора* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т.32. №1. С.186–207.
4. Кужель А.В. Расширения эрмитовых операторов. — К.: Вища школа, 1989. 55с.
5. Kuzhel A. Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators. — Kluwer Academic Publishers, 1996, 273p.

Сімферопольський університет

Надійшло 22.02.96