УДК 517.576

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЧАСТКОВИХ СУМ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

О.Г. Орищин, О.Б. Скасків

O.G. Oryshchyn, O.B. Skaskiv. *On the convergence rate of the partial sums of entire Dirichlet series*, Matematychni Studii, **7**(1997) 167–174.

Let $H(\Lambda)$ be the class of absolutely convergent in the whole plane Dirichlet series. For $F \in H(\Lambda)$ put $\sigma_n(F) = \max\{\frac{1}{S_n(x)} - \frac{1}{F(x)} : x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{x\lambda_k}$. Necessary and sufficient conditions are found for $\sup_n\{-\ln\sigma_n(F)/h(n)\} = +\infty$, where $h(x)$ is some increasing function. Similar results are obtained for different subclasses of $H(\Lambda)$ determined by restrictions onto the growth of the sum of series.

Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_0 = 1, \quad a_n \geq 0 \quad (n \geq 1) \tag{1}$$

позначимо $\sigma_n^*(f) = \max\left\{\frac{1}{S_n^*(x)} - \frac{1}{f(x)} : x \geq 0\right\}$, $S_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Оцінки величини $\sigma_n^*(f)$ використовуються у раціональній апроксимації цілих функцій (див., наприклад, [1–3]). У [2] (доведення теореми 7) показано, що для кожної цілої функції f вигляду (1) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{1}{\ln n} \ln \frac{1}{\sigma_n^*(f)} = +\infty$, а в [3] доведено, що якщо $a_n = 0$ при $n \neq n_k$ і

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n_k} < +\infty, \tag{2}$$

то

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k} \ln \frac{1}{\sigma_{n_k}^*(f)} = +\infty, \tag{3}$$

і висловлена гіпотеза, що умова (2) є також і необхідною для справедливості (3) для кожної цілої функції (1), заданої лакунарним рядом з показниками (n_k).

Безпосереднім узагальненням цілих функцій вигляду (1) є абсолютно збіжні в $\mathbb{C}$ ряди Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad a_0 = 1, \quad a_n \geq 0 \quad (n \geq 1), \tag{4}$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ ($n \to +\infty$). Клас таких рядів Діріхле позначимо через $H(\Lambda)$, $\Lambda = (\lambda_n)$, а якщо L — клас додатних неперервних зростаючих на $[0, +\infty)$ функцій і $\Psi \in L$, то через $H_a(\Lambda, \Psi)$ позначимо клас функцій $F \in H(\Lambda)$ таких, що для деякого $c \in (0, +\infty)$ і всіх $n \geq n_0$ $|a_n| \leq \exp\{-\lambda_n \Psi(c\lambda_n)\}$. Для

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50, 30D15.

$F\in H(\Lambda)$ покладемо $\sigma_n(F)=\max\{\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}: x\in\mathbb{R}\}$, $S_n(x)=\sum_{k=0}^n a_k e^{x\lambda_k}$. Встановленню оцінок величини $\sigma_n(F)$ присвячено статті [4,5]. Зокрема, в [5] показано, що для того, щоб для кожної функції $F\in H(\Lambda)$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{\ln n}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty \tag{5}$$

необхідно й досить, щоб

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\lambda_n}<+\infty. \tag{6}$$

У класі $H_a(\Lambda,\Psi)$ умова (6) уточнюється. У [5] показано, що умова

$$(\forall b>0)\ :\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\psi(bt)}\sum_{\lambda_n\le t}\frac{1}{n\lambda_n}=0 \tag{7}$$

є достатньою для справедливості співвідношення (5) для кожної функції $F\in H_a(\Lambda,\Psi)$, і помилково стверджується (з посиланням на приклад з [6]), що вона також є необхідною. Фактично в [5] показано, що умова

$$(\forall b>0):\quad \underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{\psi(bt)}\sum_{\lambda_n\le t}\frac{1}{n\lambda_n}=0 \tag{8}$$

необхідна для справедливості (5) для кожної функції $F\in H_a(\Lambda,\Psi)$, а для побудованої в [6] функції (як вказав нам М.М. Шеремета) виконується $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1}{\ln n}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}<+\infty$.

Метою нашої статті є доведення досить загальних результатів, використовуючи які, ми, зокрема, отримаємо справедливість вказаної вище гіпотези з [3] і усунемо розбіжності в результатах з [5].

Для $\Phi\in L$ позначаємо

$$H_1(\Lambda,\Phi)=\big\{F\in H(\Lambda):\ \ln\mu(x,F)=O(x\Phi(x))\quad (x\to+\infty)\big\},$$
$$H_2(\Lambda,\Phi)=\big\{F\in H(\Lambda):\ \big(\exists\, x_j\uparrow+\infty\big)\big(\ln\mu(x_j,F)=O(x_j\Phi(x_j))\big)\big\},$$

де $\mu(x,F)=\max\{a_n e^{x\lambda_n}:\ n\ge 0\}$. Через Λ_1 позначаємо послідовність Λ, для якої виконується умова $\sup\{\ln n(t)/t:\ t\ge x\}=O\{\ln n(x)/x\}$ $(x\to+\infty)$.

Предметом розгляду цієї статті є умови справедливості співвідношення

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{h(\ln n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty, \tag{9}$$

де $h\in L$. Основний результат статті міститься у наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай $h\in L$ – функція така, що $x=O(h(x))$ $(x\to+\infty)$. Тоді для функції $F\in H(\Lambda)$ виконується співвідношення (9), як тільки справджується хоча б одна з наступних трьох умов:*

1) $$\int_0^{+\infty}\frac{h(\ln n(t))}{t^2}dt<+\infty; \tag{10}$$

2) $$\Phi\in L,\ F\in H_1(\Lambda_1,\Phi),\ (\forall b>0):\quad \underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}\int^{b\Phi(x)}t^{-2}h\big(\ln n(t)\big)dt=0; \tag{11}$$

3) $$\Phi\in L,\ F\in H_2(\Lambda_1,\Phi),\ (\forall b>0):\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int^{b\Phi(x)}t^{-2}h\big(\ln n(t)\big)dt=0. \tag{12}$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що оскільки $\ln\mu(r,F)-\ln\mu(x,F)=\int_x^r\lambda_{\nu(t)}dt$, де $\nu(t)=\max\{n:|a_n|e^{t\lambda_n}=\mu(t,F)\}$ — центральний індекс ряду (4), то $(r-x)\lambda_{\nu(x)}\le\ln(\mu(r,F)/\mu(x,F))\le(r-x)\lambda_{\nu(r)}$ для $x\le r$ і, отже, для $n\ge\nu(r)$ і $r\ge x$

$$a_n e^{r\lambda_n}/\mu(r,F)\ge a_n e^{x\lambda_n}/\mu(x,F). \tag{13}$$

Нехай тепер $r_j\uparrow+\infty$ $(j\to+\infty)$ — деяка послідовність. Визначимо $n_j=\max\{n:\lambda_{\nu(r_j)}\le\lambda_n\le2\lambda_{\nu(r_j)}\}$. Використовуючи (13), для $x\le r_j$ одержуємо при $n=n_j$

$$\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}\le\sum_{\lambda_k>2\lambda_{\nu(r_j)}}\frac{a_k e^{x\lambda_k}}{\mu(x,F)}\le\sum_{\lambda_k>2\lambda_{\nu(r_j)}}\frac{a_k e^{r_j\lambda_k}}{\mu(r_j,F)}.$$

З іншого боку, для $x\ge r_j$ при $n=n_j$ маємо $\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}\le\frac{1}{S_n(r_j)}\le\frac{1}{\mu(r_j,F)}$. Тобто

$$\sigma_n(F)\le\max\Big\{\frac{1}{\mu(r_j,F)},\sum_{\lambda_k>2\lambda_{\nu(r_j)}}\frac{a_k e^{r_j\lambda_k}}{\mu(r_j,F)}\Big\}\quad(n=n_j). \tag{14}$$

Для завершення доведення нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 1. *Нехай $k(t)$ — додатна при $t\ge t_0$ функція така, що $\int_0^\infty k(t)dt<+\infty$. Тоді для кожної функції F вигляду (4) знайдеться множина E_1 скінченної міри така, що для всіх $n\ge0$ і всіх $x\in[0,+\infty)\setminus E_1$*

$$|a_n|e^{x\lambda_n}\le\mu(x,F)exp\Big\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}(\lambda_n-t)k(t)dt\Big\}, \tag{15}$$

де $\nu=\nu(x)$ – центральний індекс ряду (4).

Доведення леми повторює відповідне місце доведення із [7] з посиланням на [8, теор.1].

Лема 2. *Нехай $\Phi\in L$, $k(t)$ — додатна при $t\ge t_0$ функція, $F\in H_1(\Lambda,\Phi)$ і для кожного $b>0$*

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{b\Phi(x)}k(t)dt=0. \tag{16}$$

Тоді існує множина E_2 нульової нижньої лінійної щільності (тобто $dE_2\overset{\text{def}}{=}\varliminf\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\times meas(E_2\cap[0,x])=0$) така, що для всіх $n\ge0$ і всіх $x\in[0,+\infty)\setminus E_2$

$$|a_n|e^{x\lambda_n}/\mu(x,F)\le exp\Big(-\min\Big\{\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}(\lambda_n-t)k(t)dt,\frac{1}{2}\lambda_n\int_{\lambda_\nu}^{2\lambda_\nu}k(t)dt\Big\}\Big), \tag{17}$$

$$\ln\mu(x,F)\ge\int_0^{\lambda_\nu}tk(t)dt, \tag{18}$$

де $\nu=\nu(x)$ – центральний індекс ряду (4).

Лема 3. *Нехай $\Phi\in L$, $k(t)$ – додатна при $t\ge t_0$ функція, $F\in H_2(\Lambda,\Phi)$ і для кожного $b>0$*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{b\Phi(x)}k(t)dt=0. \tag{19}$$

Тоді знайдеться множина E_3 $(dE_3=0)$ така, що для всіх $n\ge0$ і всіх $x\in[0,+\infty)\setminus E_3$ виконується (17) і (18).

Леми 2 і 3 є варіантами теорем 1.1 і 1.2 з [9], що в свою чергу є перенесеннями на цілі ряди Діріхле лем 1 і 2, встановлених в [10] для лакунарних степеневих рядів в подібній ситуації (порівняй також з [11], [12]).

Продовжимо доведення теореми 1 у випадку 1). Якщо виконується умова (10), то знайдеться функція $c(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ така, що $\int_0^{+\infty} t^{-2}c(t)h(\ln n(4t)) < +\infty$, тому вибираючи в лемі 1 $k(t) = t^{-2}c(t)h(\ln n(4t))$ для всіх $x \notin E_1$ із (15), одержуємо

$$\sum_{\lambda_k > 2\lambda_{\nu(x)}} \frac{a_k e^{x\lambda_k}}{\mu(x,F)} \le \sum_{\lambda_k > 2\lambda_{\nu(x)}} \exp\Big\{-c(\lambda_{\nu(x)})(1-\ln 2)h\big(\ln n(2\lambda_n)\big)\Big\} = \\ = O\big(e^{-c_1(\lambda_{\nu(x)})h(\ln n(2\lambda_{\nu(x)}))}\big), \quad (20)$$

де $c_1(\lambda_{\nu(x)}) = K_1 c(\lambda_{\nu(x)}) - 1$, $K_1 > 0$ — стала; при цьому ми скористались нерівністю

$$\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} c(t)h\big(\ln n(4t)\big)dt \ge c(\lambda_\nu)\int_{\lambda_n/2}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} c(t)h\big(\ln n(4t)\big)dt \ge \\ \ge c(\lambda_\nu)h\big(\ln n(2\lambda_n)\big)\int_{\lambda_n/2}^{\lambda_n} \frac{(\lambda_n - t)}{t^2}dt,$$

а також умовою $x = O(h(x))$. Із леми 1, також для всіх $x \notin E_1$ при $n = 0$ маємо

$$\ln \mu(x,F) \ge \int_0^{\lambda_{\nu(x)}} \frac{1}{t} c(t)h\big(\ln n(4t)\big)dt \ge c_2(\lambda_{\nu(x)})h\big(\ln n(2\lambda_{\nu(x)})\big), \quad (21)$$

де $c_2(t) = c\big(\frac{t}{2}\big)\ln 2$. Вибираючи тепер $\{r_j\} \subset [0,+\infty) \setminus E_1$ із (14) за допомогою (20) і (21) одержуємо співвідношення (9). Теорему 1 у випадку 1) доведено.

Випадки 2),3) розглядаємо одночасно. Зауважимо спочатку, що у випадку 2) знайдеться функція $c(t)\uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ така, що умова (16) леми 2 виконується з функцією $k(t) = t^{-2}c(t)h(\ln n(4t))$. Подібна ситуація у випадку 3) із умовою (19) леми 3. Тобто, знайдеться функція $c(t)\uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ така, що умова (19) виконується з функцією $k(t) = t^{-2}c(t)h(\ln n(4t))$. Отже, випадки 2),3) відрізняються лише застосуванням нерівностей (17),(18) зовні різних множин ($x \notin E_2$ або $x \notin E_3$). Із нерівності (18) маємо (21) при $x \notin E_2$ (або E_3). За допомогою нерівності (17) для всіх $x \notin E_2$ (або E_3)

$$\sum(x) = \sum_{\lambda_k > 2\lambda_\nu} \frac{a_k e^{x\lambda_k}}{\mu(x,F)} \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2^j \le \frac{\lambda_k}{\lambda_\nu} < 2^{j+1}} \exp\Big\{-c_3(\lambda_\nu)\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}h\big(\ln n(4\lambda_\nu)\big)\Big\},$$

де $\nu = \nu(x)$, $c_3(t) = \frac{1}{8}c(t)$. При цьому ми скористались тим, що при $\lambda_k \ge 2\lambda_\nu$

$$\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_k} (\lambda_k - t)t^{-2}c(t)h\big(\ln n(4t)\big)dt \ge c(\lambda_\nu)h\big(\ln n(4\lambda_\nu)\big)\Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu} - 1 - \ln\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}\Big) \ge \\ \ge \frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}c(\lambda_\nu)h\big(\ln n(4\lambda_\nu)\big)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\Big).$$

Зауважимо, що за умовою, яка визначає Λ_1, знайдеться стала $0 < A < +\infty$ така, що $\ln n(t2^{j+1}) \le A2^j \ln n(4t)$, $j \ge 1, t \ge t_0$, тому, оскільки $t = O(h(t))$,

$t \to +\infty$, маємо

$$\begin{aligned}\sum(x) &\le \sum_{j=1}^{\infty} \exp\Big\{ \ln n(2^{j+1}\lambda_\nu) - c_3(\lambda_\nu)2^j h\big(\ln n(4\lambda_\nu)\big)\Big\} \le \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} \exp\Big\{ -2^j\big(c_3(\lambda_\nu)h\big(\ln n(4\lambda_\nu)\big) - A\ln n(4\lambda_n)\big)\Big\} \le \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} \exp\Big\{-2^{j-1}c_3(\lambda_\nu)h\big(\ln n(4\lambda_\nu)\big)\Big\}=O\Big(\exp\Big\{-c_3h\big(\ln n(4\lambda_\nu)\big)\Big\}\Big)\end{aligned} \tag{22}$$

при $x \to +\infty$ ($x \notin E_2$ або $x \notin E_3$). Завершується доведення як і у випадку 1), оскільки, завдяки тому, що $dE_k = 0$ ($k = 2, 3$), знайдуться послідовності $\{r_j^{(k)}\} \subset [0, +\infty) \setminus E_k$ ($k = 2, 3$) такі, що $r_j^{(k)} \uparrow +\infty$ ($j \to \infty$) і одночасно виконуються нерівності (21) і (22), які застосовуємо до нерівності (14). Теорему 1 доведено.

Із наступної теореми одержуємо необхідність умови (10) для справедливості співвідношення (9) в усьому класі $H(\Lambda)$.

Теорема 2. *Нехай $h \in L$ – функція така, що $h(0) = 0$, $x = O(h(x))$ $(x \to +\infty)$. Для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і такої, що одночасно*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(\ln(n+1)) - h(\ln n)}{\lambda_n} = +\infty, \tag{23}$$

$$h(\ln(n+1)) = O(\lambda_n) \quad (n \to +\infty), \tag{24}$$

знайдеться функція $F \in h(\Lambda)$, для якої

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{h(\ln n)} \ln \frac{1}{\sigma_n(F)} < +\infty. \tag{25}$$

Доведення. Нехай $c_n = \beta(h(\ln(n+1)) - h(\ln n))$, $\beta > 0$. Визначимо коефіцієнти функції F вигляду (4) за допомогою рівностей $\ln a_n = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s} c_s$ $(n \ge 1)$; $a_0 = 1$. Оскільки,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s} c_s = \lambda_n \sum_{s=1}^{n} \frac{c_s}{\lambda_s} - \beta h\big(\ln(n+1)\big), \tag{26}$$

а також $x = O(h(x))$, то із (23) і (24) маємо негайно $F \in H(\Lambda)$. Оскільки $\chi_n \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \ln \frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{c_s}{\lambda_s} \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, то

$$\ln \mu(\chi_n, F) = \ln a_n + \lambda_n \chi_n = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s} c_s + \lambda_n \sum_{s=1}^{n-1} \frac{c_s}{\lambda_s} = \sum_{s=1}^{n-1} c_s = \beta h(\ln n). \tag{27}$$

Для кожного $N \ge 1$, $\sigma_N(F) \ge \frac{1}{S_N(\chi_{N+1})} - \frac{1}{F(\chi_{N+1})} \ge \frac{1}{S_N(\chi_{N+1})} - \frac{1}{S_{N+1}(\chi_{N+1})} =$
$= \frac{\mu(\chi_{N+1}, F)}{S_N(\chi_{N+1}) S_{N+1}(\chi_{N+1})} \ge \frac{1}{(N+1)(N+2)\mu(\chi_{N+1}, F)}$.

Враховуючи рівність (27) і умову $x = O(h(x))$ $x \to +\infty$, звідси виводимо при $N \to +\infty$

$$\ln \frac{1}{\sigma_N(F)} \le 2\ln(N+1) + \beta h\big(\ln(N+1)\big) + o(1) \le ch\big(\ln(N+1)\big), \qquad (28)$$

де $0 < c < +\infty$, тобто одержуємо (25). Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Для функції $h \in L$ ряд (23) розбіжний тоді і лише тоді, коли розбіжний інтеграл (10). Тобто із теорем 1 і 2 одержуємо наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай $h \in L$ така функція, що $x = O(h(x))$ $(x \to +\infty)$ і для послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ виконується умова (24). Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ справджувалось співвідношення (9) необхідно і досить, щоб виконувалась умова (10).*

Зауваження 2. Можна показати, що умова (24) у теоремах 2 і 3 зайва, оскільки у випадку $h'(x) = o(\mathrm{e}^x)$ $(x \to +\infty)$ для кожної послідовності, для якої виконується умова (23), знайдеться послідовність (λ_n^*), для якої умови (23) і (24) виконуються одночасно. У цьому випадку, якщо $\lambda_n \notin (\lambda_j^*)$, то покладаємо $a_n = 0$, решту коефіцієнтів вибираємо як і при доведенні теореми 2.

Теорема 4. *Нехай $\Phi \in L$, а $h \in L$ – диференційовна на $[0, +\infty)$ функція така, що $h'(x) \uparrow$, $h'(x) = O(e^x)$, $x = O(h(x))$ $(x \to +\infty)$, $h(0) = 0$. Для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ такої, що для деяких b, $b_1 > 0$*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \le b\Phi(t)} \frac{1}{\lambda_n}\big(h\big(\ln(n+1)\big) - h(\ln n)\big) > b_1, \qquad (29)$$

а також

$$\frac{\lambda_n}{\ln n}\int_0^{\lambda_n} \frac{h(\ln n(t))dt}{t^2} \to +\infty \quad (n \to +\infty), \qquad (30)$$

існує функція $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ така, що виконується (25).

Доведення. Зберігаємо всі позначення з доведення теореми 2, а також використовуємо ту ж конструкцію функції F вигляду (4). Якщо буде встановлено, що $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ при виконанні умов теореми 4, то решта міркувань із доведення теореми 2 зберігаються і тому з (28) випливатиме (25). Зауважимо спочатку, що із (26) за допомогою (30) одержуємо

$$\frac{-\ln a_n}{\ln(n+1)} = \frac{\beta\lambda_n}{\ln(n+1)}\Big\{\int_0^{\lambda_n}\frac{dh(\ln n(t))}{t} - h\big(\ln(n+1)\big)\Big\} = \frac{\beta\lambda_n}{\ln(n+1)}\int_0^{\lambda_n}\frac{h(\ln n(t))}{t^2}dt \to +\infty$$

$(n \to +\infty)$ і тому при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ при $n \to +\infty$, $\ln a_n + x\lambda_n = (1 + o(1))\ln a_n = -E_n \ln n$, де $E_n \to +\infty$, тобто $F \in H(\Lambda)$.

Із умови (29) випливає $\lambda_n \le b\Phi\big(\frac{1}{\beta b_1}\varkappa_{n+1}\big)$ $(n \to +\infty)$. Оскільки, завдяки умові $h'(x) = O(\mathrm{e}^x)$ $x \to +\infty$, $\varkappa_{n+1} - \varkappa_n = \beta\frac{1}{\lambda_n}\big(h(\ln(n+1)) - h(\ln n)\big) = o(1)$ $(n \to +\infty)$, то $\lambda_n \le b\Phi\big(\frac{2}{\beta b_1}\varkappa_n\big)$ $(n \to +\infty)$, і тому для $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$

$$\ln\mu(x,F) = O(1) + \int_0^x \lambda_{\nu(t)}dt \le x\lambda_n + O(1) \le bx\Phi\Big(\frac{2x}{b_1\beta}\Big) + O(1) \quad (n \to +\infty).$$

Вибираючи тепер $\beta = b_1/2$, маємо $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$. Теорему 4 доведено.

Із пункту 2) теореми 1 і теореми 4 одержуємо відразу наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай $\Phi \in L$ і функція h така, як в теоремі 4. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_1(\Lambda_1, \Phi)$ справджувалось співвідношення (9), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (11).*

Доведення. Достатність умови (11) міститься в пункті 2) теореми 1. Для того, щоб переконатись в необхідності (11) зауважимо, що якщо умова (11) не виконується, то оскільки для послідовності Λ_1 виконується $\ln n = O(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, а також враховуючи нерівність

$$\sum_{\lambda_n \le b\Phi(t)} \frac{c_n}{\lambda_n} = \int_0^{b\Phi(t)} \frac{dh(\ln n(x))}{x} \ge \int_0^{b\Phi(t)} \frac{h(\ln n(x))}{x^2} dx,$$

отримуємо справедливість умов (30) і (29), і, отже, можна скористатись теоремою 4.

Подібно до теореми 4 встановлюється наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай $\Phi \in L$, а функція h така, як в теоремі 4. Для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ такої, що виконується умова (30) і для деяких b, $b_1 > 0$*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \le b\Phi(t)} \frac{1}{\lambda_n}\big(h\big(\ln(n+1)\big) - h(\ln n)\big) > b_1, \tag{31}$$

існує функція $F \in H_2(\Lambda, \Phi)$ така, що справджується співвідношення (25).

Доведення. Зберігаючи позначення із доведення теореми 2, подібно як і при доведенні теореми 4, показуємо за допомогою умови (30), що $F \in H(\Lambda)$. Після цього, повторюючи міркування із доведення теореми 2, встановлюємо справедливість співвідношення (25). Залишається показати, що $F \in H_2(\Lambda, \Phi)$. За умовою (31) знайдеться послідовність $t_j \uparrow +\infty$, для якої $t_j < b\Phi\big(\frac{1}{b_1}\int_0^{t_j} dh(\ln n(x))/x\big)$.

Нехай n_j — така, що $t_j \in [\lambda_{n_j}, \lambda_{n_j+1})$. Тоді $\lambda_{n_j} < b\Phi\big(\frac{1}{\beta b_1}\chi_{n_j+1}\big)$ і, отже, при $x_j = \chi_{n_j+1}$

$$\ln\mu(x_j, F) = O(1) + \int_0^{x_j} \lambda_{\nu(t)} dt \le O(1) + x_j\lambda_{\nu(x_j-0)} \le O(1) + x_j\lambda_n \le O\Big(x_j\Phi\Big(\frac{1}{b_1\beta}x_j\Big)\Big).$$

Залишається вибрати $\beta = 1/b_1$. Теорему 6 доведено.

Подібно до теореми 5, із пункту 3) теореми 1 і теореми 6 негайно одержуємо наступну теорему.

Теорема 7. *Нехай $\Phi \in L$ і функція h — така, як в теоремі 4. Для того, щоб для функції $F \in H_2(\Lambda_1, \Phi)$ справджувалось співвідношення (9), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (12).*

При $h(x) = x$ одержуємо з теорем 5 і 7 наступні наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $\Phi \in L$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_1(\Lambda_1, \Phi)$ справджувалось співвідношення (5), необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$(\forall b > 0): \quad \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \le b\Phi(t)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0. \tag{32}$$

Наслідок 2. *Нехай $\Phi \in L$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_2(\Lambda_1, \Phi)$ справджувалось співідношення (5) необхідно і досить, щоб*

$$(\forall b > 0): \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \le b\Phi(t)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0.$$

Зауваження 3. Якщо вибрати $\psi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)$, де функція $\varphi(t)$ обернена до функції $\Phi \in L$, то $H_a(\Lambda, \Psi) \supset H_1(\Lambda, \Phi)$. Якщо ж вибрати функцію Φ обернену до функції $\psi(t) \in L$, то $H_a(\Lambda, \Psi) \subset H_1(\Lambda, \Phi)$. Умови ж (32) і (8) при такому узгодженому виборі Ψ, Φ є рівносильними. У відповідності із зауваженням 3, із наслідку 1 отримуємо

Наслідок 3. *Нехай $\Psi \in L$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_a(\Lambda_1, \Psi)$ справджувалось співвідношення (5), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (8).*

Якщо в теоремі 3 вибрати $h(x) = \mathrm{e}^x$, то, оскільки умова $\int^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2} dt < +\infty$ і умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty \tag{33}$$

є рівносильні, одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 4. *Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ — така, що $n = O(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ справджувалось*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sigma_n(F)} = 0, \tag{34}$$

необхідно і досить, щоб виконувалась умова (33).

Останній наслідок містить твердження, яке узагальнює твердження цитованої вище гіпотези М.М. Шеремети [3]. Твердження наслідків 1 і 2 раніше встановлені спільно О.Б. Скасківим і С. Херате (див. [9]). О.Б. Скасківу у даній статті належать також постановка задачі і ідея побудови прикладів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Erdős P., Reddy A.R. *Rational approximation on the positive real axis* // Proc. London Math. Soc. 1975, V.31. P.439–456.
2. Erdös P., Reddy A.R. *Rational approximation* // Adv. in Math. Soc. 1976. V.21. P.78–109.
3. Шеремета М.Н. *Рациональная аппроксимация на* $[0, +\infty)$ *целых функций произвольного роста с неотрицательными коэффициентами* // Укр. мат. ж. 1979. Т.31, №36, С.303–311.
4. Шеремета М.Н. *О скорости сходимости частных сумм целого ряда Дирихле* // ТФФА и их прил. (Харьков) 1983. Вып.40. С.141–145.
5. Sheremeta M.N. *On the convergence rate of the partial sums of positive entire Dirichlet series* // Anal. Math. 1991. V.17. №1. P.47–53.
6. Шеремета М.Н. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. 1987. Т.42. №2. С.215–226.
7. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем. заметки. 1985. Т.37. №1. С.41–47.
8. Шеремета М.Н. *Метод Вимана-Валирона для рядов Дирихле* // Укр. мат. ж. 1978. Т.30. №4. С.488–497.
9. Херате С. Асимптотические свойства целых рядов Дирихле; Дис... канд. физ.-мат. н. — Львов, 1992. 86с.
10. Skaskiv O.B. *On the Polya conjecture concerning the maximum and minimum of the modulus of an entire function of finite order given by a lacunary power series* // Anal. Math. 1990. V.16. №2. P.143–157.
11. Fenton P.C. *Wiman-Valyron theory for entire functions of finite lower growth* // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V.252. P.221–232.
12. Хом'як М.М. *Метод Вимана-Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле, с условием на рост на некоторой последовательности* // Укр. мат. ж. 1983. Т.35. №4. С.527–533.

Львівський ун-т, мех.-мат. ф-т.

Надійшло 1.12.96