УДК 512.547.2

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИМ ЧЛЕНОМ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

П.В. Філевич

P. Filevych. *Correlations between the maximum modulus and maximum term of random entire functions*, Matematychni Studii, **7**(1997) 157–166.

Let $\{X_n\}$ be a uniformly bounded sequence of independent random variables with the zero mean value. For entire functions of the form $\Sigma a_n X_n(t) z^n$ it is proved that Wiman's inequality can be improved to $M_f(r,t) \le \mu_f(t)\ \ln^{1/4}\mu_f(r)\ \ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r)$, for almost every t and all $r>1$ except a set $E(\delta,t)$ of finite logarithmic measure.

Нехай для цілої функції

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

$M_f(r)=\max\{|f(z)| : |z|=r\}$ і $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n : n\ge 0\}$ – відповідно її максимум модуля і максимальний член. Через $K(f,Z)$ позначимо клас функцій вигляду $f(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n(t) z^n$, де $Z=\{Z_n\}$ — послідовність випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза $(\Omega,\mathcal{A},P)$ (див. [1], с.9). Тут $\Omega=[0;1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω, P — міра Лебега на прямій. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини $Z_n=X_n+iY_n$ обчислюються відповідно за формулами:

$$MZ_n=\int_\Omega X_n(t)P(dt)+i\int_\Omega Y_n(t)P(dt),\ DZ_n=M(|Z_n-MZ_n|^2).$$

Будемо говорити, що деяка властивість виконується *для майже всіх функцій з класу* $K(f,Z)$ (або, що одне і те ж, *майже напевне в* $K(f,Z)$), якщо лебегова міра тих $t\in[0;1]$, при яких $f(z,t)$ володіє цією властивістю, дорівнює 1.

Як стверджує класична теорема Вімана-Валірона, при довільному $\delta>0$

$$M_f(r)\le\mu_f(r)\ \ln^{1/2+\delta}\mu_f(r) \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B20, 30D20.

для всіх $r \in (0;+\infty)\setminus E(\delta)$, де $E(\delta)$ — множина скінченної логарифмічної міри, тобто

$$\text{ln-meas}\, E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E\cap(1;+\infty)} d(\ln r) < +\infty.$$

Простий теоретико-ймовірнісний підхід до одержання оцінок вигляду (2) запропонував П. Розенблум [2]. Зокрема ним встановлена гнучкіша за (2) нерівність: якщо (1) — ціла функція, а $\psi_1(x)$ і $\psi_2(x)$ неспадні функції такі, що $\int_0^\infty \frac{dx}{\psi_k(x)} < +\infty$, $k=1,2$, то, для всіх $r \in (1;+\infty)\setminus E$, $\text{ln-meas}\, E < +\infty$,

$$\frac{\mathfrak{M}_f(r)}{\sqrt{\psi_2(\psi_1(\ln \mathfrak{M}_f(r)))}} \le K\mu_f(r), \qquad K \equiv \text{const},$$

де $\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{n=0}^\infty |a_n| z^n$.

Вибираючи $\psi_1(x) = \psi_2(x) = (x+2)\ln^{1+\varepsilon}(x+2)$ і враховуючи що максимальні члени функцій $f(z)$ і $\mathfrak{M}_f(z)$ збігаються, отримуємо для довільного $\delta > 0$ нерівність

$$M_f(r) \le \mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r)\ \ln^{1/2}\mu_f(r)\ \ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r), \tag{3}$$

$r \in (1;+\infty)\setminus E(\delta)$, $\text{ln-meas}\, E(\delta) < +\infty$.

Приклад функції $f(z) = e^z$, для якої

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\ \ln^{1/2}\mu_f(r)} = \sqrt{2\pi}, \tag{4}$$

вказує на те, що у нерівності (2) показник $\frac{1}{2}$ замінити меншим числом, взагалі кажучи, не можна. Але, як це видно з результатів роботи П. Ердеша і А. Реньї [3], властивість функції $f(z) = e^z$ не є типовою для цілих функцій.

Теорема A ([3]). *Нехай $f(z)$ — ціла функція вигляду* (1)*. Тоді для довільного $\delta > 0$ майже напевне в $K(f,R)$ і $K(f,H)$, де R — послідовність незалежних випадкових величин, що приймають значення $+1$ і -1 з однаковою ймовірністю $\frac{1}{2}$, а $H = \{e^{2\pi i\omega_n}\}$, де $\{\omega_n\}$ — послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0;1]$ випадкових величин, виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r)\ \ln^{1/4}\mu_f(r)\ \ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r), \tag{5}$$

$r \in (1;+\infty)\setminus E(\delta,t)$, $\text{ln-meas}\, E(\delta,t) < +\infty$.

Зауважимо, що показник $\frac{1}{4}$ в нерівності (5) замінити меншим числом, взагалі кажучи, не можна. Це випливає з наступної теореми.

Теорема B ([3]). *Якщо $f(z) = e^z$, то для довільного $\varepsilon > 0$ майже напевне в $K(f,R)$ і $K(f,H)$ справедлива рівність*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r,t)}{\mu_f(r)\ \ln^{1/4-\varepsilon}\mu_f(r)} = \infty.$$

Обидві послідовності Z з теорем A і B ($Z = R, H$) мають такі властивості:
(a) $|Z_n| = 1$ ($n \ge 0$) для майже всіх t;

(b) Z_n — незалежні випадкові величини;

(c) $MZ_n = 0$ $(n \geq 0)$.

Умова (a) забезпечує для майже всіх функцій з класу $K(f, Z)$ один і той самий максимальний член, що вказує на природність її присутності. У зв'язку з цим, а також з теоремою B про непокращуваність нерівності (5), виникає таке запитання: чи існує послідовність випадкових величин Z, для якої $|Z_n| = 1$ при $n \geq 0$ для майже всіх t, така, що при довільному $\delta > 0$ майже напевне в $K(f, Z)$ виконується нерівність

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r)\ \ln^{\alpha} \mu_f(r)\ \ln^{1+\delta} \ln \mu_f(r),$$

$r \in (1; +\infty) \setminus E(\delta, t)$, $\text{ln-meas}\, E(\delta, t) < +\infty$, де $\alpha < \frac{1}{4}$? Негативну відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема 1. *Для довільної послідовності випадкових величин Z такої, що $|Z_n| = 1$ $(n \geq 0)$ для майже всіх t, існує ціла функція $f(z)$ така, що при довільному $\varepsilon > 0$ майже напевне в $K(f, Z)$*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{M_f(r, t)}{\mu_f(r)\ \ln^{1/4-\varepsilon} \mu_f(r)} = \infty.$$

Припустимо тепер, що послідовність Z володіє властивістю (a). Чи можна у цьому випадку для кожної послідовності Z, яка задовольняє (b) і (c), отримати такий ж висновок, як і для послідовностей R, H у теоремі A?

Виявляється, що відповідь на це запитання позитивна. Це випливає з наведеної нижче теореми 2.

Означення ([4]). Послідовність X дійсних випадкових величин називається мультиплікативною системою (МС), якщо $MX_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k} = 0$ для довільних $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $k \geq 1$.

Теорема 2. *Якщо Z — рівномірно обмежена послідовність випадкових величин така, що кожна з послідовностей $\{\operatorname{Re} Z_n\}$ і $\{\operatorname{Im} Z_n\}$ є МС, а $f(z)$ — ціла функція вигляду (1), то для довільного $\delta > 0$ майже напевне в $K(f, Z)$ виконується нерівність (5) для всіх $r \in (r_0(t); +\infty) \setminus E(\delta)$, $\text{ln-meas}\, E(\delta) < +\infty$.*

Наслідком з теорем 1 і 2 є наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай Z — послідовність випадкових величин, що задовольняє умови теореми 2, причому $|Z_n| = 1$ $(n \geq 0)$ для майже всіх t. Тоді для того, щоб для всіх цілих функцій $f(z)$ вигляду (1) при довільному $\varepsilon > 0$ майже напевне в $K(f, Z)$ виконувалась нерівність*

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r)\ \ln^{\alpha} \mu_f(r)\ \ln^{1+\varepsilon} \ln \mu_f(r),$$

$r \in (1; +\infty) \setminus E(\varepsilon, t)$, $\text{ln-meas}\, E(\varepsilon, t) < +\infty$, необхідно і досить, щоб $\alpha \geq \frac{1}{4}$.

Характерною ознакою всіх наведених до цього моменту результатів є те, що вони сформульовані для послідовностей випадкових величин з нульовими математичними сподіваннями. У зв'язку з цим М. М. Шеремета поставив наступне запитання: чи можна отримати аналог теореми A для послідовності R'

незалежних випадкових величин, що приймають значення $+1$ з ймовірністю p і значення -1 з ймовірністю $1-p$, $\frac{1}{2} < p < 1$? Нижче дамо негативну відповідь на загальніше запитання.

Нехай $\mathfrak{X}$ — клас рівномірно обмежених дійсних послідовностей X, для яких

$$MX_{i_1}X_{i_2}...X_{i_k} = MX_{i_1}MX_{i_2}...MX_{i_k}$$

при довільних $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $k \geq 1$. Зауважимо, що довільна рівномірно обмежена МС належить до $\mathfrak{X}$. З іншого боку, якщо $X \in \mathfrak{X}$, то послідовність $\{X_n - MX_n\}$ є рівномірно обмеженою МС.

Якщо тепер припустити, що $\inf\{|MZ_n| : n \geq 0\} > 0$, то при

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|MZ_n|}{MZ_n} z^n$$

для майже всіх функцій

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|MZ_n|}{MZ_n} (Z_n - MZ_n) z^n$$

при $r > r_0(t)$, за теоремою 2, виконується нерівність

$$\max_{\varphi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|MZ_n|}{MZ_n} (Z_n - MZ_n) r^n e^{in\varphi} \right| \leq \mu_f(r) \ \ln^{3/8} \mu_f(r).$$

Тому, згідно (4), для майже всіх t при $r > r_0(t)$

$$M_f(r,t) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |MZ_n| r^n - \max_{\varphi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|MZ_n|}{MZ_n} (Z_n - MZ_n) r^n e^{in\varphi} \right| \geq C\mu_f(r) \ \ln^{1/2} \mu_f(r).$$

З наведених міркувань можна зробити висновок, що уточнення нерівності (2) можливе для майже всіх функцій з $K(f,Z)$ лише за умови, коли послідовність $\{MZ_n\}$ у певний спосіб наближається до нуля. Таку умову вказано у наступній теоремі.

Теорема 4. *Якщо* $\{\operatorname{Re} Z_n\}$, $\{\operatorname{Im} Z_n\} \in \mathfrak{X}$, *а* $|MZ_n| \leq O(n^{-\alpha})$ $(n \to +\infty)$, *де* $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$, *то для довільного* $\delta > 0$ *майже напевне в* $K(f,Z)$ *виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r) \ \ln^{1/2-\alpha} \mu_f(r) \ \ln^{1+\delta} \ln \mu_f(r), \tag{6}$$

$r \in (1;+\infty) \setminus E(\delta,t)$, $\text{ln-meas}\, E(\delta,t) < +\infty$.

На непокращуваність нерівності (6) вказує наступна теорема.

Теорема 5. *Для довільної послідовності* Z *такої, що* $\{\operatorname{Re} Z_n\}$, $\{\operatorname{Im} Z_n\} \in \mathfrak{X}$ *і* $|MZ_n| \geq Cn^{-\alpha}$ $(n \geq n_0)$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{4}$, *існує ціла функція* $f(z)$ *вигляду* (1) *така, що майже напевне в* $K(f,Z)$ *виконується нерівність* $M_f(r,t) \geq \frac{C}{8}\mu_f(r) \ \ln^{1/2-\alpha} \mu_f(r)$, $r \geq r_0(t)$.

1.

Твердження теореми справджується для послідовності H незалежних рівномірно розподілених на колі $\{z : |z| = 1\}$ випадкових величин (теорема B) при $f(z) = e^z$.

Розглянемо випадкову функцію

$$g(z,t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z_n(t) H_n(s) z^n.$$

При кожному фіксованому $t = t_0$, для якого $|Z_n| = 1$ $(n \geq 0)$, послідовність $\{Z_n(t_0)H_n\}$ є знову ж послідовністю незалежних рівномірно розподілених на одиничному колі випадкових величин, тобто майже напевне (за s)

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_g(r,t,s)}{\mu_g(r)\ \ln^{1/4-\varepsilon} \mu_g(r)} = +\infty. \tag{7}$$

Позначимо через T множину точок $(t; s)$ з $[0; 1] \times [0; 1]$, для яких виконується (7). За теоремою Фубіні плоска міра множини T дорівнює 1. Оскільки ця множина вимірна, то за теоремою, оберненою до теореми Фубіні, існує таке s_0, що для майже всіх $t \in [0; 1]$ при $s = s_0$ виконується (7). Залишилось покласти $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(s_0) z^n$.

Наступні допоміжні результати використовуватимемо при доведенні теорем 2, 4 і 5.

Означення ([4]). Якщо послідовність X є МС і, крім того, $MX_i^2 X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k} = 0$ для довільних $i_1 < i_2 < ... < i_k$ $(k \geq 1)$, $i \neq i_m$ $(m = 1, 2, ..k)$, то X називається сильно мультиплікативною системою (СМС).

Лема 1 ([4], Corollary 1). *Якщо X є МС, Y є СМС,*

$$\sup_{t\in[0;1]} |X_i(t)| \leq D^2 Y_i / \sup_{t\in[0;1]} |Y_i(t)|$$

для кожного i, а $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ — опукла функція, то $Mg(X_1, ..., X_N) \leq Mg(Y_1, ..., Y_N)$.

Лема 2. *Якщо X є МС, рівномірно обмеженою числом 1, то для довільних $a_0, ..., a_N \in \mathbb{R}$ і довільного $\alpha > 0$*

$$M \exp\Big(\alpha \Big| \sum_{n=0}^{N} X_n a_n \Big| \Big) \leq 2e^{\alpha^2 S_N^2}, \tag{8}$$

де $S_N = \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\right)^{1/2}$.

Доведення. Використовуючи лему 1 з $Y=R$ та $g(x_0,...,x_N)=\exp\bigl(\alpha\bigl|\sum_{n=0}^N a_nx_n\bigr|\bigr)$, і враховуючи, що $DR_n=1$, маємо для довільної послідовності $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$:

$$M\exp\Bigl(\alpha\Bigl|\sum_{n=0}^N X_na_n\Bigr|\Bigr)\le M\exp\Bigl(\alpha\Bigl|\sum_{n=0}^N R_na_n\Bigr|\Bigr)=\int_0^1\exp\Bigl(\alpha\Bigl|\sum_{n=0}^N R_na_n\Bigr|\Bigr)P(dt)\le$$

$$\int_0^1\exp\Bigl(\alpha\sum_{n=0}^N R_na_n\Bigr)P(dt)+\int_0^1\exp\Bigl(-\alpha\sum_{n=0}^N R_na_n\Bigr)P(dt)\le 2\prod_{n=0}^N\frac{e^{\alpha a_n}+e^{-\alpha a_n}}{2}\le 2e^{\alpha^2S_N^2}.$$

Лему доведено.

Лема 3 ([1], с.75). *Якщо* $p(\psi)=\sum_{k=0}^N b_k\cos(k\psi+\psi_k)$ $(N\ge 2)$, *то існує сегмент довжини* $1/N^2$, *на якому* $|p(\psi)|>1/2\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi)|$.

Зауваження. Аналогічне твердження має місце і для $p(\psi)=\sum_{k=0}^N b_k\sin(k\psi+\psi_k)$ при $N\ge 2$.

Лема 4. *Нехай* X *є МС, яка рівномірно обмежена числом 1. Тоді для кожного* $\beta>0$

$$P\Bigl(\max_{0\le\psi\le2\pi}\Bigl|\sum_{k=0}^N a_ke^{ik\psi}X_k(t)\Bigr|\ge A_\beta S_N\ln^{1/2}N\Bigr)\le\frac{1}{N^\beta},\qquad N\ge 2,\tag{9}$$

де A_β *— стала, залежна лише від* β.

Доведення. Нехай $p(\psi,t)=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^N a_ke^{ik\psi}X_k(t)$. Згідно леми 3, для кожного $t\in[0;1]$ існує сегмент $I(t)$ довжини $1/N^2$, на якому $\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|\le 2|p(\psi,t)|$. Отже, для довільного $\alpha>0$,

$$e^{\alpha\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|}\le N^2\int_{I(t)}e^{2\alpha|p(\psi,t)|}d\psi\le N^2\int_0^{2\pi}e^{2\alpha|p(\psi,t)|}d\psi.$$

Використовуючи нерівність Маркова $P(V\ge\lambda)\le MV/\lambda$, $\lambda>0$, де V — невід'ємна випадкова величина, маємо за (8):

$$P\Bigl(\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|\ge\lambda\Bigr)=P\Bigl(e^{\alpha\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|}\ge e^{\alpha\lambda}\Bigr)\le e^{-\alpha\lambda}Me^{\alpha\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|}\le$$

$$e^{-\alpha\lambda}N^2M\int_0^{2\pi}e^{2\alpha|p(\psi,t)|}d\psi=e^{-\alpha\lambda}N^2\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{2\alpha|p(\psi,t)|}d\psi P(dt)\le N^6e^{4\alpha^2S_N^2-\alpha\lambda}.$$

Покладемо $\alpha=\lambda/(8S_N^2)$. Тоді

$$P\Bigl(\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|\ge\lambda\Bigr)\le N^6e^{-\lambda^2/(16S_N^2)}.\tag{10}$$

Нехай $q(\psi,t)=\mathrm{Im}\sum_{k=0}^N a_ke^{ik\psi}X_k(t)$. Подібно до (10) отримуємо нерівність

$$P\Bigl(\max_{0\le\psi\le2\pi}|q(\psi,t)|\ge\lambda\Bigr)\le N^6e^{-\lambda^2/(16S_N^2)}.\tag{11}$$

Якщо при деякому t виконується нерівність $V_1(t)+V_2(t)\ge\lambda$, то при цьому ж t виконується хоча б одна з нерівностей $V_1(t)\ge\lambda/2$ або $V_2(t)\ge\lambda/2$. Тому

$$\mathrm{P}(V_1(t)+V_2(t)\ge\lambda)\le P(V_1(t)\ge\lambda/2)+P(V_2(t)\ge\lambda/2).$$

Отже, скориставшись нерівностями (10) і (11), отримаємо:

$$P\Big(\max_{0\le\psi\le2\pi}\Big|\sum_{k=0}^{N}a_k e^{ik\psi}X_k(t)\Big|\ge\lambda\Big)\le P\Big(\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|+\max_{0\le\psi\le2\pi}|q(\psi,t)|\ge\lambda\Big)\le$$
$$P\Big(\max_{0\le\psi\le2\pi}|p(\psi,t)|\ge\lambda/2\Big)+P\Big(\max_{0\le\psi\le2\pi}|q(\psi,t)|\ge\lambda/2\Big)\le N^7e^{-\lambda^2/(64S_N^2)}.$$

Залишилось покласти $\lambda=\sqrt{64(\beta+7)}S_N\ln^{1/2}N$.

Лема 5. *Нехай $k(r)$ — неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $(1;+\infty)$ функція, а $E\subset(1;+\infty)$ — відкрита множина така, що існує нескінченна послідовність $1<p_1<\ldots<p_n\to+\infty$ $(n\to+\infty)$ зовні E. Тоді знайдеться нескінченна послідовність $1<r_1\le\ldots\le r_n\to+\infty$ $(n\to+\infty)$ така, що для довільного $n\in\mathbb{N}$:*
1) $r_n\notin E$;
2) $\ln k(r_n)\ge n/2$;
3) якщо $(r_n;r_{n+1})\not\subset E$, то $k(r_{n+1})\le ek(r_n)$.

Доведення. Оскільки кожна відкрита в $\mathbb{R}$ множина є об'єднанням не більш як зліченної кількості інтервалів, то $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j;b_j)$, причому інтервали $(a_j;b_j)$ попарно не перетинаються.

Покладемо $r_1=\inf\{r:k(r)\ge e,r\in E\}$. Якщо r_p вже визначено, то r_{p+1} визначаємо у наступний спосіб. Нехай r_p^* корінь рівняння $k(r)=ek(r_p)$. Якщо $r_p^*\notin E$, то беремо $r_{p+1}=r_p^*$, а якщо $r_p^*\in(a_j,b_j)$, то нехай $r_{p+1}=a_j$, $r_{p+2}=b_j$. Очевидно, що $r_n\notin E$. Оскільки

$$\ln k(r_{p+1})>\ln k(r_{p-1}^*)=1+\ln k(r_{p-1}),$$

то, за індукцією, $\ln k(r_n)\ge\frac{n}{2}$. І, нарешті, якщо $(r_n;r_{n+1})$ не міститься в E, то $k(r_{n+1})\le k(r_n^*)=ek(r_n)$. Лему доведено.

Лема 6. *Нехай $g(x)$ — додатна, диференційовна, неспадна при $x>0$ функція, а $\varphi(x)$ — додатна, неспадна, неперервна при $x\ge0$ функція така, що $\int_0^\infty\frac{dx}{\varphi(x)}<+\infty$. Тоді $g'(\ln r)\le\varphi(g(\ln r))$ для всіх $r\in(1;+\infty)\setminus E$, $\text{ln-meas}\,E<+\infty$.*

Доведення. Нехай $E\subset(1;+\infty)$ множина, на якій $g'(\ln r)>\varphi(g(\ln r))$, а $H=\{x\ge0:e^x\in E\}$. Тоді

$$\text{ln-meas}\,E=\int_E d(\ln r)\le\int_E\frac{g'(\ln r)d(\ln r)}{\varphi(g(\ln r))}=\int_H\frac{g'(x)dx}{\varphi(g(x))}=\int_{g(H)}\frac{dx}{\varphi(x)}<+\infty.$$

Лему доведено.

Нехай для цілої функції $f(z)$ вигляду (1) $\mathfrak{M}_f(r)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$, $g(x)=\ln\mathfrak{M}_f(e^x)$, $A(r)=g'(\ln r)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n|a_n|r^n/\mathfrak{M}_f(r)$, а $B^2(r)=g''(\ln r)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2|a_n|r^n/\mathfrak{M}_f(r)-A^2(r)$. З леми 6 і нерівності Розенблума (3), вибираючи $\varphi(x)=(x+2)\ln^{1+\delta}(x+2)$, отримуємо наступне твердження.

Лема 7. *Для довільного $\delta>0$ виконуються нерівності*

$$A(r)\le \ln\mu_f(r)\ \ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r),\ \ B^2(r)\le \ln\mu_f(r)\ \ln^{2+\delta}\ln\mu_f(r), \tag{12}$$

$r\in(1;+\infty)\setminus E(\delta)$, ln-meas $E(\delta)<+\infty$.

Лема 8. *Для всіх $r>0$* $\quad 3\sqrt{3}B(r)+\frac{3}{2}\ge\frac{\mathfrak{M}_f(r)}{\mu_f(r)}$.

Доведення. Нехай $T(r)$ — довільна додатна неперервна при $r>0$ функція. Якщо V — випадкова величина з розподілом $P(V=n)=|a_n|r^n/\mathfrak{M}_f(r)$, то $A(r)$ — математичне сподівання MV цієї величини, а $B^2(r)$ — її дисперсія DV. Скориставшись нерівністю Чебишева $P(|V-MV|\ge c)\le DV/c^2$, маємо при $c=T(r)B(r)$

$$\sum_{|n-A(r)|\ge T(r)B(r)}|a_n|r^n\le\frac{\mathfrak{M}_f(r)}{T^2(r)}. \tag{13}$$

Оскільки $\sum_{|n-A(r)|<C(r)}|a_n|r^n\le(2T(r)B(r)+1)\mu_f(r)$, то

$$2T(r)B(r)+1\ge\frac{1}{\mu_f(r)}\left(\mathfrak{M}_f(r)-\frac{\mathfrak{M}_f(r)}{T^2(r)}\right).$$

Залишилось вибрати $T(r)\equiv\sqrt{3}$.

Лема 9. *Для довільного $\delta>0$*

$$A(r)\ge B^2(r)\ \ln^{-1-\delta}\ln\mu_f(r),$$

$r\in(1;+\infty)\setminus E(\delta)$, ln-meas $E(\delta)<+\infty$.

Доведення. Нехай $\Phi(x)=(x+2)/\ln^{1+\delta}(x+2)$, $x\ge0$, а $\varphi(x)$ обернена до $\Phi(x)$. Тоді

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\varphi(y)}\le\int_0^{+\infty}\varphi^{-1}\left(\frac{x+2}{\ln^{1+\delta}(x+2)}\right)d\left(\frac{x+2}{\ln^{1+\delta}(x+2)}\right)=$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{1+\delta}(x+2)}-(1+\delta)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{2+\delta}(x+2)}<+\infty.$$

Оскільки з леми 6 випливає нерівність

$$A(r)\ge\Phi(B^2(r)),$$

$r\in(1;+\infty)\setminus E(\delta)$, ln-meas $E(\delta)<+\infty$, то залишається скористатись лемою 7.

Лема 10. *Нехай $\{b_n\}$ — послідовність невід'ємних дійсних чисел така, що $b_n\le O(n^{-\alpha})$ $(n\to+\infty)$, $0\le\alpha\le\frac14$. Тоді для довільної цілої функції $f(z)$ вигляду* (1) *при довільному $\delta>0$ виконується нерівність*

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n|a_n|r^n\le\mu_f(r)\ \ln^{1/2-\alpha}\mu_f(r)\ \ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r),$$

$r \in (1; +\infty) \setminus E(\delta)$, ln-meas $E(\delta) < +\infty$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $b_n \le 1$ $(n \ge 0)$. Тоді, згідно (13),

$$H(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|n-A(r)| \ge T(r)B(r)} b_n |a_n| r^n \le \frac{\mathfrak{M}_f(r)}{T^2(r)},$$

де $T(r)$ — довільна додатна неперервна при $r > 0$ функція.

Виберемо $T(r) = \frac{A(r)}{2B(r)}$. Тоді, за лемами 8 і 9, $H(r) \le \mu_f(r) \ \ln^{2+2\delta} \ln \mu_f(r)$, $r \in (1; +\infty) \setminus E(\delta)$, ln-meas $E(\delta) < +\infty$.

Далі, за лемами 8 та 9 і нерівністю (3), маємо

$$\sum_{|n-A(r)| < T(r)B(r)} b_n |a_n| r^n \le C_1 \frac{\mathfrak{M}_f(r)}{A^\alpha(r)} \le$$
$$C_2 \mathfrak{M}_f^{1-2\alpha}(r) \mu_f^{2\alpha}(r) \ \ln^{(1+\delta)\alpha} \mu_f(r) \le \mu_f(r) \ \ln^{1/2-\alpha} \mu_f(r) \ \ln^{1+\delta} \ln \mu_f(r),$$

$r \in (1; +\infty) \setminus E(\delta)$, ln-meas $E(\delta) < +\infty$. З останньої нерівності та нерівності для $H(r)$ отримуємо необхідну нам нерівність. Лему доведено.

Лема 11. *Якщо $\{b_n\}$ — послідовність невід'ємних дійсних чисел така, що $b_n \ge C n^{-\alpha}$ $(n \ge n_0)$, $C > 0$, $0 \le \alpha < \frac{1}{4}$, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n r^n}{n!} \ge \frac{C e^r}{4 r^\alpha}$$

для всіх $r \ge r_0$.

Доведення. Легко показати, що для функції $f(z) = e^z$, $A(r) = B^2(r) = r$. Виберемо в нерівності (13) $T(r) = r^{1/4}$. Тоді

$$\sum_{|n-r| \ge r^{3/4}} \frac{r^n}{n!} \le \frac{e^r}{r^{1/2}} \le \frac{e^r}{2}, \ r \ge r_1.$$

Отже, при $r \ge r_2$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n r^n}{n!} \ge \sum_{|n-r| < r^{3/4}} \frac{b_n r^n}{n!} \ge C \sum_{|n-r| < r^{3/4}} \frac{r^n}{n! n^\alpha} \ge \frac{C}{2r^\alpha} \left(e^r - \frac{e^r}{2} \right) = \frac{C e^r}{4 r^\alpha}.$$

Лему доведено.

2, 4 5

Доведення теореми 2. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $Z = X$, де X — МС, рівномірно обмежена числом 1.

Розглянемо випадкову величину V з розподілом

$$P(V = n) = \frac{|a_n| r^n}{\mathfrak{M}_f(r)}.$$

Легко побачити, що $A(r)$ співпадає з математичним сподіванням MV цієї величини, а $B^2(r)$ — з її дисперсією DV.

Записавши для випадкової величини V нерівність Маркова, отримуємо:

$$\sum_{n\geq c}\frac{|a_n|r^n}{\mathfrak{M}_f(r)} = P(V\geq c)\leq \frac{A(r)}{c}.$$

Покладемо $c = C(r)$, де $C(r) = A(r)\ln\mu_f(r)$. Тоді, згідно (3),

$$\sum_{n\geq C_1(r)}|a_n|r^n \leq \sum_{n\geq C(r)}|a_n|r^n \leq \mu_f(r), \tag{14}$$

$r\in(1;+\infty)\setminus E(\delta)$, де множина $E(\delta)$ – це об'єднання винятковиx множин, зовні яких виконуються нерівності (3) та (12), а $C_1(r) \stackrel{\text{def}}{=} \ln^3\mu_f(r)$.

Візьмемо в лемі 5 $k(r) = \mu_f(r)$, а $E = E(\delta)$ і нехай $\{r_k\}$ – послідовність, для якої справедливі висновки цієї леми. Позначимо через F_k множину тих $t\in[0,1]$, для яких

$$\max_{0\leq\psi\leq 2\pi}\Big|\sum_{n\leq[C_1(r_k)]}a_n r_k^n e^{in\psi}X_n(t)\Big| \geq A_\beta S_{[C_1(r_k)]}(r_k)\ln^{1/2}[C_1(r_k)]$$

($[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x).

Використовуючи послідовно (9) з $\beta = 1$ та лему 5, маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(F_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[C_1(r_k)]}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}<+\infty.$$

Отже, за лемою Бореля-Кантелі ([1], с.18) для майже всіх $t\in[0;1]$ при $k>k_0(t)$

$$W(r_k) < AS_{[C_1(r_k)]}(r_k)\ln^{1/2}[C_1(r_k)], \tag{15}$$

де $W(r) = \max_{0\leq\psi\leq2\pi}|\sum_{n\leq[C_1(r)]}a_n r^n e^{in\psi}X_n(t)|$.

Скориставшись нерівностями $S^2_{[C_1(r)]}(r)\leq\mathfrak{M}_f(r)\mu_f(r)$ та (3), отримуємо з (15) нерівність

$$W(r_k)<\mu_f(r_k)\,\ln^{1/4}\mu_f(r_k)\,\ln^{1+\delta/2}\ln\mu_f(r_k),\ k>k_1(t). \tag{16}$$

Оскільки

$$M_f(r,t)\leq\sum_{n\geq C_1(r)}|a_n|r^n + W(r),$$

то, за (14) і (16),

$$M_f(r_k,t)<\mu_f(r_k)\ \ln^{1/4}\mu_f(r_k)\ \ln^{1+3\delta/4}\ln\mu_f(r_k),\ k>k_2(t).$$

Нехай $r\geq r_{k_2(t)}$ — довільне число зовні множини E, $r\in(r_p;r_{p+1})$. Згідно леми 5,

$$\mu_f(r_{p+1})\leq e\mu_f(r_p)\leq e\mu_f(r).$$

Отже, за двома останніми нерівностями,

$$M_f(r,t) \le M_f(r_{p+1},t) < \mu_f(r)\ \ln^{1/4}\mu_f(r)\ \ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r)$$

для майже всіх $t \in [0;1]$ при $r \ge r_0(t)$ зовні множини скінченної логарифмічної міри $E(\delta)$. Теорему доведено.

Доведення теореми 4. Оскільки

$$M_f(r,t) \le \max_{0\le\psi\le 2\pi}\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(Z_n - MZ_n\Big)r^n e^{in\psi}\Big| + \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||MZ_n|r^n,$$

то залишається скористатись теоремою 2 і лемою 10.

Доведення теореми 5. Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|MZ_n|}{n!MZ_n}z^n$. Тоді

$$M_f(r,t) \ge \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|MZ_n|r^n - \max_{0\le\psi\le 2\pi}\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{|MZ_n|}{MZ_n}\Big(Z_n - MZ_n\Big)r^n e^{in\psi}\Big|.$$

Оскільки $\ln\mu_f(r) \sim r$ при $r \to +\infty$, то далі слід використати теорему 2 і лему 11.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ж.-П. Кахан, Случайные функциональные ряды. — М.: Наука, 1973. 302с.
2. P.C. Rosenbloom, *Probability and entire functions* // Stud. Math. Anal. Related Topics. Stanford: Calif. Univ. Press. 1962. P.325–332.
3. P. Erdös, A.R ényi, *On random entire functions* // Zastos. Mat. – 1969. V.10. P.47–55.
4. J. Jakubowski, S. Kwapień, *On multiplicative systems of functions* // Bull. L'Acad. Pol. Sci. 1979. V.27. P.689–694.

Львівський університет, мех.-мат. ф-т.

Надійшло 26.11.96
Після переробки 10.01.97