Математичні Студії. Т.7, №2 Matematychni Studii. V.7, No.2

УДК 512.546

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ С КОНЕЧНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

Е.Г. Зеленюк

Zeleniuk Ye.H. *On topological groups with finite ultrafilter semigroups*, Matematychni Studii, **7**(1997) 139–144.

It is proved that any countable non-discrete topological group with finite number of converging to the unit ultrafilters contains an open boolean semigroup.

В работе [1] в предположении континуум-гипотезы для каждого натурального числа $n \geq 1$ на счетной булевой группе были построены три различные групповые топологии с ровно n свободными, сходящимися к нулю ультрафильтрами. Булевой называется группа периода 2. Эти примеры решают ряд проблем о топологических группах с экстремальными свойствами. В данной работе доказано, что в классе абелевых и в классе счетных групп каждая недискретная топологическая группа с конечным числом свободных, сходящихся к единице ультрафильтров, содержит открытую счетную булеву подгруппу. Метод доказательства берет начало с работы [2]. Все топологии предполагаются хаусдорфовыми.

§1. Локальные левотопологические группы и их автоморфизмы

Левотопологической группой называется группа, снабженная топологией, в которой непрерывны левые сдвиги. Топологическое пространство X с выделенным элементом e (единицей) и частичной бинарной операцией (умножением) называется *локальной левотопологической группой*, если существует левотопологическая группа G такая, что: 1) e — единица, 2) X — открытая окрестность $e \in G$, 3) частичное умножение на X — это в точности частичная операция, индуцированная на X умножением на G.

Локальная левотопологическая группа X называется *регулярной (счетного характера)*, если пространство X регулярно (имеет счетную базу окрестностей единицы). Регулярность пространства означает наличие в каждой точке базы из замкнутых окрестностей. Для счетных пространств регулярность эквивалентна нульмерности — наличию в каждой точке базы из открыто-замкнутых окрестностей. Существуют не регулярные левотопологические группы.

Пример. Пусть (G, τ) — левотопологическая группа, содержащая последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ неединичных элементов, сходящуюся к единице, τ' — топология на G, базу которой образуют множества вида $x \cdot (\mathcal{U} \setminus \{a+n : n < \omega\})$,

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22A05, 54H11, 54D80.

где $x \in G$, $\mathcal{U}$ — открытая окрестность единицы в (G,τ). Тогда (G,τ') — левотопологическая группа, любая замкнутая окрестность единицы которой содержит почти всю последовательность $\{a_n : n < \omega\}$. Следовательно, (G,τ') не регулярна.

Пусть X, Y — локальные левотопологические группы. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомоморфизмом*, если для любого $x \in X$ найдется окрестность $\mathcal{U}$ единицы $e_X \in X$ такая, что для всех $z \in \mathcal{U}$ произведения $x \cdot z$, $f(x) \cdot f(z)$ определены и $f(x \cdot z) = f(x) \cdot f(z)$. Если $f\colon X \to Y$ — гомоморфизм, то $f(e_X) = e_Y$. Иньективный гомоморфизм называется *изоморфизмом.* Топологический изоморфизм локальной левотопологической группы на себя называется *автоморфизмом. Порядком* автоморфизма $f\colon X \to X$ называется $\inf\sup\{|O(x)| : x \in \mathcal{U}\}$, где $O(x)$ — орбита x относительно f, а inf берется по всевозможным окрестностям единицы $\mathcal{U}$. Автоморфизм порядка > 1 называется *нетривиальным.* Автоморфизм называется *однородным*, если орбиты всех неединичных элементов равномощны.

Лемма 1. *Пусть G — недискретная топологическая группа без открытых булевых подгрупп. Тогда группа G обладает нетривиальным автоморфизмом. Если группа G либо абелева либо периодическая, то на G существует нетривиальный автоморфизм конечного порядка.*

Доказательство. Для каждого элемента $a \in G$ рассмотрим автоморфизм $x \mapsto a^{-1}xa$. Предположим, что каждый такой автоморфизм тривиален. Это означает, что для любого элемента $a \in G$ найдется окрестность единицы $\mathcal{U}$ такая, что $az = za$ для всех $z \in \mathcal{U}$. Покажем, что отображение $x \mapsto x^{-1}$ будет автоморфизмом. Пусть x — произвольный элемент из G, $\mathcal{U}$ — окрестность единицы такая, что $xz = zx$ для всех $z \in \mathcal{U}$, тогда $(xz)^{-1} = z^{-1}x^{-1} = x^{-1}z^{-1}$. Так как G без открытых булевых подгрупп, то этот автоморфизм нетривиален.

Лемма 2. *Пусть X — недискретная локальная левотопологическая группа, f — автоморфизм на X конечного порядка m. Существует недискретная левотопологическая группа X_0, однородный автоморфизм f_0 на X_0 порядка m и непрерывный изоморфизм $h\colon X_0 \to X$ такие, что $h \circ f_0 = f \circ h$. Причем, если X регулярна, то X_0 также можно выбрать регулярной.*

Доказательство. Выделяя в X достаточно малую открытую окрестность единицы, можно считать, что для любого $x \in X$ имеем $|O(x)| \le m$. Рассмотрим множество $M = \{x \in X : |O(x)| = m\}$. Оно открыто. Следовательно, для любого $x \in M$ найдется окрестность единицы $\mathcal{U}$ такая, что $x \cdot \mathcal{U} \subset M$. Кроме этого, $e \in \overline{M}$. Пусть $X_0 = \{e\} \cup M$, $h\colon X_0 \to X$ — естественное вложение, $f_0 = f|X_0$. Снабдим X_0 топологией, объявив окрестностями точки $x \in X_0$ множества вида $x \cdot (\mathcal{U} \cap X_0)$, где $\mathcal{U}$ — достаточно малая окрестность $e \in X$. Тогда X_0 — недискретная локальная левотопологическая группа, причем, если X регулярна, то регулярна и X_0, $h\colon X_0 \to X$ — неперерывный изоморфизм, $f_0\colon X_0 \to X_0$ — однородный автоморфизм порядка m, $h \circ f_0 = f \circ h$.

Пусть $\mathbb{Z}(m+1) = \{0, 1, \ldots, m\}$ — циклическая группа порядка m, g — подстановка на $\mathbb{Z}(m+1)$, заданная циклом $(1, \ldots, m)$, $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ — прямая сумма ω экземпляров $\mathbb{Z}(m+1)$, снабженная обычной топологией суммы, l, r — отображения, сопоставляющие каждому ненулевому элементу из $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ номер первой и последней ненулевой координаты. Подстановка g на $\mathbb{Z}(m+1)$ естественно индуцирует подстановку на $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$. Будем обозначать ее также g. Очевидно, что g — гомеоморфизм, $g(0) = 0$, орбиты всех ненулевых элементов m-элементны и для любых $a, b \in \bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ таких, что $r(a) < l(b)$, имеем $g(a+b) = g(a) + g(b)$. Следовательно, g — однородный автоморфизм порядка m на локальной левотопологической группе $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$.

Теорема 1. *Пусть X — счетная недискретная регулярная локальная левотопологическая группа, l — однородный автоморфизм на X порядка m. Существует непрерывный изоморфизм h группы X на $\bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ такой, что:*
1) если $x, y \in X$ и $r\big(h(x)\big) + 1 < l\big(h(y)\big)$, то произведение $x \cdot y$ определено и $h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$,
2) $h \circ f = g \circ h$.

Если X счетного характера, то непрерывный изоморфизм h можно сделать топологическим.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть X — счетное регулярное пространство, f — автогомеоморфизм на X, относительно которого каждый элемент из X имеет m-элементную орбиту. Существует разбиение X на открыто-замкнутые множества $A_1, \dots, A_m$ такие, что $f(A_1) = A_2, f(A_2) = A_3, \dots, f(A_m) = A_1$.*

Доказательство. Занумеруем элементы множества X натуральными числами: $X = \{x_n : n < \omega\}$. Рассмотрим орбиту $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\}$ элемента x_0. Выберем открыто-замкнутую окрестность $\mathcal{U}_0$ элемента x_0 такую, что множества $\mathcal{U}_0, f(\mathcal{U}_0), \dots, f^{m-1}(\mathcal{U}_0)$ дизъюнктны, и положим $A_1^0 = \mathcal{U}_0$, $A_2^0 = f(\mathcal{U}_0), \dots, A_m^0 = f^{m-1}(\mathcal{U}_0)$, $X_0 = A_1^0 \cup \dots \cup A_m^0$. Далее, в последовательности $\{x_n : n < \omega\}$ ищем первый элемент, который не принадлежит множеству X_0. Не умаляя общности, пусть это будет x_1. Выбираем открыто-замкнутую окрестность $\mathcal{U}_1 \subset X \setminus X_0$ элемента x_1 такую, что множества $\mathcal{U}_1$, $f(\mathcal{U}_1), \dots, f^{m-1}(\mathcal{U}_1)$ дизъюнктны, и полагаем $A_1^1 = A_1^0 \cup \mathcal{U}_1$, $A_2^1 = A_2^0 \cup f(\mathcal{U}_1), \dots$, $A_m^1 = A_m^0 \cup f^{m-1}(\mathcal{U}_1)$, $X_1 = A_1^1 \cup \dots \cup_m^1$. Продолжая в том же духе, мы построим возрастающие последовательности множеств $\{A_1^n : n < \omega\}, \dots, \{A_m^n : n < \omega\}$, объединения которых $A_1 = \bigcup\{A_1^n : n < \omega\}, \dots, A_m = \bigcup\{A_m^n : n < \omega\}$ и будут требуемыми множествами.

Доказательство теоремы 1. Пусть F — полугруппа слов в алфавите $\mathbb{Z}(m+1)$ с пустым словом ε, L_n — множество всех слов из F длины n, S_j^n — множество всех слов из L_n, в которых первые j букв нулевые, а остальные ненулевые, $0 \le j \le n$, $S_n^n = \{\theta_n\}$, $S_n = \bigcup\{S_j^n : j \le n\}$, $S = \bigcup\{S_n : n < \omega\}$. Подстановка g на $\mathbb{Z}(m+1)$ естественно индуцирует подстановку на F. Будем обозначать ее также g. Очевидно, что все множества S_j^n, S_n, L_n, S инвариантны относительно g и орбиты всех непустых слов из F, отличных от θ_n, m-элементны. Пусть s — произвольное слово из F. Если $s \in S$, то положим $s' = \varepsilon$, $s' = s$. Если же $s \in F \setminus S$, то s однозначно раскладывается в произведение $s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$, $s^* = \theta_{n_1 + \dots + n_k} \cdot s_{k+1}$.

Пусть $X = \{e, x_1, x_2, \dots\}$. Каждому слову $s \in F$ сопоставим непустое открыто-замкнутое подмножество $X(s) \subset X$ и точку $x(s) \in X(s)$ такие, что $X(\varepsilon) = X$, $x(\varepsilon) = e$ и для каждого $n \ge 1$ выполняются следующие условия:

$1)_n$ для каждого $s \in S_{n-1}$ множества $X(s - i)$, $i \le m$, образует разбиение $X(s)$, $x(s \cdot 0) = x(s)$,

$2)_n$ для всех $s \in S_{n-1}$, $y \in X(\theta_n)$ произведения $x(s) \cdot y$ определены и $f\big(x(s) \cdot y\big) = f\big(x(s)\big) \cdot f(y)$,

$3)_n$ для каждого $s \in S_n$ $f\big(X(s)\big) = X\big(g(s)\big)$, $f\big(x(s)\big) = x\big(x(s)\big) = x\big(g(s)\big)$,

$4)_n$ для каждого $s \in L_n$ $X(s) = x(s') \cdot X(s^*)$, $x(s) = x(s') \cdot x(s^*)$,

$5)_n$ $x_n \in \{x(s) : s \in L_n\}$.

Выберем открыто-замкнутую инвариантную (относительно f) окрестность единицы $\mathcal{U}_1$ такую, что $x_1 \notin \mathcal{U}_1$. Тогда множество $X \setminus \mathcal{U}_1$ также открыто-замкнуто и инвариантно. По лемме 3 его можно разбить на открыто-замкнутые подмножества $A_1, \ldots, A_m$ такие, что $f(A_1) = A_2$, $f(A_2) = A_3, \ldots, f(A_m) = A_1$. Выберем элемент $a \in A_1$ такой, что $x_1 \in O(a)$. Положим $X(0) = \mathcal{U}_1$, $X(1) = A_1$, $X(2) = A_2, \ldots, X(m) = A_m$, $x(0) = e$, $x(1) = a$, $x(2) = f(a), \ldots, x(m) = f^{m-1}(a)$. Фиксируем $n \geq 1$ и предположим, что уже определены $X(s), x(s)$ для всех $s \in \bigcup\{L_j : j \leq n\}$, причем выполняются условия $1)_j$–$5)_j$ для всех $j \leq n$. Определим $X(s), x(s)$ для $s \in L_{n+1}$.

Покажем, что в условиях $1)_n$–$3)_n$ можно S заменить на L.

1) $x(s \cdot 0) = x\big((s \cdot 0)'\big) \cdot x\big((s \cdot 0)^*\big) = x(\widetilde{s}) \cdot x(\theta_n) = x(s) \cdot e = x(s)$ ($\widetilde{s}$ — слово, полученное из s удалением нулевого элемента),

$$X(s \cdot 0) = x\big((s \cdot 0)'\big) \cdot X\big((s \cdot 0)^*\big) = x(s) \cdot X(\theta_n) = x(s') \cdot x(s^*) \cdot X(\theta_n) = x(s') \cdot X(s' \cdot 0),$$

$$X(s \cdot i) = x\big((s \cdot i)'\big) \cdot X\big((s \cdot i)^*\big) = x(s') \cdot X(s^* \cdot i), \qquad 1 \leq i \leq m.$$

2) $f\big(x(s) \cdot y\big) = f\big(x(s') \cdot x(s^*) \cdot y\big) = f\big(x(s')\big) \cdot f\big(x(s^*) \cdot\big) = f\big(x(s')\big) \cdot f\big(x(s^*)\big) \cdot f(y) = f\big(x(s') \cdot x(s^*)\big) \cdot f(y) = f\big(x(s)\big) \cdot f(y)$.

3) $f\big(x(s)\big) = f\big(x(s') \cdot x(s^*)\big) = f\big(x(s')\big) \cdot f\big(x(s^*)\big) = x\big(g(s')\big) \cdot x\big(g(s^*)\big) = x\big(g(s)\big)$.

Рассмотрим разбиение множества X множествами $X(s)$, $s \in L_n$. Одно из них, скажем, $X(s_0)$, содержит x_{n+1}. Так как $X(s_0) = x(s_0') \cdot X(s_0^*)$, то существуют $y_{n+1} \in X(s_0^*)$ такой, что $x_{n+1} = x(s_0') \cdot y_{n+1}$. Выберем открыто-замкнутую инвариантную окрестность единицы $\mathcal{U}_{n+1}$ такую, что для всех $s \in S_n$, $y \in \mathcal{U}_{n+1}$ произведения $x(s) \cdot y$ определены, $f\big(x(s) \cdot y\big) = f\big(x(s)\big) \cdot f(y)$, $x(s) \cdot \mathcal{U}_{n+1} \subset X(s)$ и $y_{n+1} \notin x(s_0^*) \cdot \mathcal{U}_{n+1}$, если $y_{n+1} \neq x(s_0^*)$.

Рассмотрим вначале множество $X(\theta_n)$. Разобьем множество $X(\theta_n) \setminus \mathcal{U}_{n+1}$ на открыто-замкнутые подмножества $B_1, \ldots, B_m$ такие, что $f(B_1) = B_2, f(B_2) = B_3, \ldots,$ $f(B_m) = B_1$ (лемма 3!). Выберем элемент $b \in B_1$ такой, что $y_{n+1} \in O(b)$, если $s_0^* = \theta_n$. Положим $X(\theta_n \cdot 0) = \mathcal{U}_{n+1}$, $X(\theta_n \cdot 1) = B_1$, $X(\theta_n \cdot 2) = B_2, \ldots, X(\theta_n \cdot m) = B_m$, $x(\theta_n \cdot 0) = e$, $e(\theta_n \cdot 1) = b$, $x(\theta_n \cdot 2) = f(b), \ldots, x(\theta_n \cdot m) = f^{m-1}(b)$.

Пусть теперь p — произвольное слово из S_n, отличное от θ_n, $O(p)$ — его орбита. Разобъем множество $X(p) \setminus x(p) \cdot \mathcal{U}_{n+1}$ произвольно на открыто-замкнутые подмножества $C_1, \ldots, C_m$ и выберем элементы $c_1 \in C_1, \ldots, c_m \in C_m$ такие, что $y_{n+1} \in O(c_1) \cup \cdots \cup O(c_m)$, если $y_{n+1} \in \bigcup\big\{O(x) : x \in X(p) \setminus x(p) \cdot \mathcal{U}_{n+1}\big\}$. Положим $X(p \cdot 0) = x(p) \cdot \mathcal{U}_{n+1}$, $X(p \cdot 1) = C_1, \ldots, X(p \cdot m) = C_m$, $x(p \cdot 0) = x(p)$, $x(p \cdot 1) = c_1, \ldots, x(p \cdot m) = c_m$. Для $s \in O(p) \setminus \{p\}$ множество $X(s)$ и точку $x(s)$ определим условием $3)_{n+1}$.

После того, как $X(s), x(s)$ определены для всех $s \in S_{n+1}$, определим $X(s)$, $x(s)$ для всех $s \in L_{n+1} \setminus S_{n+1}$ условием $4)_{n+1}$. Заметим, что если $x_{n+1} \notin \{x(s) : s \in L_n\}$, то $x_{n+1} = x(s_0') \cdot y_{n+1} = x(s_0') \cdot x(s_0^* \cdot i) = x(s_0 \cdot i)$ для некоторого $i \neq 0$.

Из условия $5)_n$ следует, что построенное отображение $F \in s \mapsto x(s) \in X$ сюръективно. Оно индуцирует биекцию $h\colon X \to \bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ (точка $h\big(x(s)\big)$ получается из s приписыванием нулевого хвоста).

Так как множества $X(s), X(s \cdot 0), X(s \cdot 0 \cdot 0), \ldots$ — окрестности точек $x(s)$, то биекция h непрерывна. Условия 1),2) следуют из $4)_n$,$3)_n$, в частности, h — изоморфизм. Если X счетного характера, то последовательность $X(\theta_1), X(\theta_2), \ldots$ можно сделать базой окрестностей единицы и тогда h будет гомеоморфизмом.

§2. Полугруппа ультрафильтров локальной левотопологической группы

Пусть X — локальная левотопологическая группа, βX — чех-стоунова компактификация множества X, снабженного дискретной топологией. Элементами пространства βX служат всевозможные ультрафильтры на X, главные ультрафильтры отождествляются с соответствующими элементами из X, а базу топологии образуют множества $\overline{A} = \{\xi \in \beta X : A \in \xi\}$, где $A \subset X$.

Для каждого элемента $a \in X$ через $L_a \colon X \to X$ обозначим частичное отображение, заданное правилом $x \mapsto a \cdot x$, а через $\overline{L}_a \colon \beta X \to \beta X$ — его чех-стоуново продолжение. Для произвольных $a \in X$, $\eta \in \beta X$ таких, что отображение $\overline{L}_a$ определено в точке η, положим $a \cdot \eta = \overline{L}_a(\eta)$. Базу ультрафильтра $a \cdot \eta$ образуют множества $a \cdot B$, где $B \in \eta$. Далее, для каждого $\eta \in \beta X$ через $R_\eta \colon X \to \beta X$ обозначим частичное отображение, заданное правилом $x \mapsto x \cdot \eta$, а через $\overline{R}_\eta \colon \beta X \to \beta X$ — его чех-стоуново продолжение. Для произвольных $\xi, \eta \in \beta X$ таких, что отображение $\overline{R}_\eta$ определено в точке ξ, положим $\xi \cdot \eta = \overline{R}_\eta(\xi)$. Базу ультрафильтра $\xi \cdot \eta$ образуют множества $\bigcup\{a \cdot B_a : a \in A\}$, где $A \in \xi$, $B_a \in \eta$.

Так определенное частичное умножение на βX продолжает частичное умножение на X, остается асоциативным, непрерывно по второму аргументу, когда первый аргумент из X, и непрерывно по первому аргументу при любом втором. Относительно него замкнутое подпространство в βX всех свободных ультрафильтров на X, сходящихся к единице, является полугруппой. Она обозначается $\widetilde{X}$ и называется полугруппой ультрафильтров локальной левотопологической группы X.

Лемма 4. *Пусть X, Y — локальные левотопологические группы, $f \colon X \to Y$ — непрерывный изоморфизм, $\overline{f} \colon \beta X \to \beta X$ — чех-стоуново продолжение f, $\widetilde{f} = f|\widetilde{X}$. Тогда $\widetilde{f}$ — топологический изоморфизм полугруппы $\widetilde{X}$ в полугруппу $\widetilde{Y}$. Если f — автоморфизм на X, то $\widetilde{f}$ — топологический автоморфизм на полугруппе $\widetilde{X}$, причем, если f имеет бесконечный порядок, то и $\widetilde{f}$ имеет бесконечный порядок.*

Доказательство. Действительно, для любых $\xi, \eta \in \widetilde{X}$

$$\widetilde{f}(\xi \cdot \eta) = \overline{f}(\xi \cdot \eta) = \overline{f}\big(\lim_{x \to \xi} \lim_{z_x \to \eta} x \cdot z_x\big) = \lim_{x \to \xi} \lim_{z_x \to \eta} \overline{f}(x \cdot z_x) =$$
$$= \lim_{x \to \xi} \lim_{z_x \to \eta} \overline{f}(x) \cdot \overline{f}(z_x) = \lim_{x \to \xi} \overline{f}(x) \cdot f(\eta) = \overline{f}(\xi) \cdot \overline{f}(\eta) = \widetilde{f}(\xi) \cdot \widetilde{f}(\eta)$$

и, так как f непрерывно и иньективно, $\widetilde{f}$ — топологический изоморфизм. Для доказательства второй части леммы достаточно заметить, что $(\overline{f})^m(\xi) = \xi \iff \overline{f^m}(\xi) = \xi \iff \exists A \in \xi \quad \forall a \in A \quad f^m(a) = a$ (лемма де Брейна-Эрдеша, [3]).

Теорема 2. *Пусть X — счетная недискретная регулярная локальная левотопологическая группа, f — нетривиальный однородный автоморфизм на X конечного порядка, ε — идемпотент из $\widetilde{X}$. Тогда идемпотенты $\varepsilon, \widetilde{f}(\varepsilon)$ алгебраически порождают в $\widetilde{X}$ свободное произведение одноэлементных полугрупп $\{\varepsilon\}, \{\widetilde{f}(\varepsilon)\}$.*

Доказательство. Рассмотрим в $\widetilde{X}$ произвольное соотношение $\xi_i \cdot \ldots \cdot \xi_t = \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_q$, где $\xi_i, \eta_j \in \{\varepsilon, \widetilde{f}(\varepsilon)\}$, $\xi_i \neq \xi_{i+1}$, $\eta_j \neq \eta_{j+1}$. Мы должны доказать, что $\xi_1 = \eta_1$ и $t = q$.

Пусть m — порядок автоморфизма f, $h \colon X \to \bigoplus_\omega \mathbb{Z}(m+1)$ — непрерывный изоморфизм, представляемый теоремой 1. Для каждого неединичного элемента $x \in X$ через $\lambda(x)$, $\varrho(x)$ обозначим первую и последнюю ненулевую координату $h(x)$. Пусть $\overline{\lambda}, \overline{\varrho}\colon \beta X \to \mathbb{Z}(m+1)$ — чех-стоуновы продолжения отображений λ, ϱ. Тогда для любых $\xi, \eta \in \widetilde{X}$

$$\overline{\lambda}(\xi \cdot \eta) = \overline{\lambda}\bigl(\lim_{x\to\xi}\lim_{y_x\to\eta} x \cdot y_x\bigr) = \lim_{x\to\xi}\lim_{y_x\to\eta} \lambda(x \cdot y_x) = \lim_{x\to\xi} \lambda(x) = \overline{\lambda}(\xi),$$

аналогично $\overline{\varrho}(\xi \cdot \eta) = \overline{\varrho}(\eta)$, а также $\overline{\lambda}(\xi) \neq \overline{\lambda}\bigl(\widetilde{f}(\xi)\bigr)$, $\overline{\varrho}(\xi) \neq \overline{\varrho}\bigl(\widetilde{f}(\xi)\bigr)$. Действуя отображениями $\overline{\lambda}, \overline{\varrho}$ на наше соотношение, получаем $\overline{\lambda}(\xi_1) = \overline{\lambda}(\eta_1)$, $\overline{\varrho}(\xi_t) = \overline{\varrho}(\eta_q)$, откуда $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_t = \eta_q$.

Докажем теперь, что $t = q$. Пусть n — нечетное число $\geq \max\{t, q\}$. Для каждого элемента $x \in X$ через $\sigma(x)$ обозначим число из $\mathbb{Z}(n)$, равное по $\operatorname{mod} n$ количеству пар соседних элементов в последовательности ненулевых координат x, которые не являются парами вида $\bigl(\overline{\varrho}(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)\bigr)$, $\bigl(\overline{\varrho}\bigl(\widetilde{f}(\varepsilon)\bigr), \overline{\lambda}\bigl(\widetilde{f}(\varepsilon)\bigr)\bigr)$. Пусть $\overline{\sigma}\colon \beta X \to \mathbb{Z}(n)$ — чех-стоуново продолжение отображения σ. Тогда для любых $\xi, \eta \in \widetilde{X}$ имеем $\overline{\sigma}(\xi \circ \eta) = \overline{\sigma}(\xi) + \overline{\sigma}(\eta)$, если пара $\bigl(\overline{\varrho}(\xi), \overline{\lambda}(\eta)\bigr)$ есть пара вышеуказанного вида, и $\overline{\sigma}(\xi \circ \eta) = \overline{\sigma}(\xi) + \overline{\sigma}(\eta) + 1$, в противном случае. Значит, $\overline{\sigma}(\varepsilon) = \overline{\sigma}(\varepsilon \cdot \varepsilon) = \overline{\sigma}(\varepsilon) + \overline{\sigma}(\varepsilon)$ и, так как n нечетно, $\overline{\sigma}(\varepsilon) = 0$. Аналогично $\overline{\sigma}\bigl(\widetilde{f}(\varepsilon)\bigr) = 0$. И, наконец, $\overline{\sigma}(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_t) = t - 1$, $\overline{\sigma}(\eta_1, \cdot \ldots \cdot \eta_q) = q - 1$, откуда $t = q$.

Следствие 1. *Если на счетной недискретной регулярной локальной левотопологической группе существует нетривиальный автоморфизм, то ее полугруппа ультрафильтров бесконечна.*

Доказательство. Если автоморфизм имеет бесконечный порядок, то применяем вторую часть леммы 4 (здесь не нужна даже счетность). Если же автоморфизм имеет конечный порядок, то применяем лемму 2, теорему 2 и первую часть леммы 4.

Следствие 2. *В классе абелевых и в классе счетных групп каждая недискретная топологическая группа с конечной полугруппой ультрафильтров содержит открытую счетную булеву подгруппу.*

Доказательство. В работе [1] доказано, что каждая топологическая абелева группа с конечной полугруппой ультрафильтров имеет счетный дисперсионный характер. Дисперсионным характером точки в топологическом пространстве называется наименьшая из мощностей баз ее окрестностей. Далее применяем лемму 1 и следствие 1.

Вопрос. *Верно ли, что каждая топологическая группа с конечной полугруппой ультрафильтров имеет счетный дисперсионный характер?*

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеленюк Е.Г. *Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров* // Математичні студії. Т.6. 1996. С.41–52.
2. Зеленюк Е.Г. *Конечные группы в $\beta\mathbb{N}$ тривиальны* // Киев, 1996. 12с. (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 96.3).
3. Comfort W.W. *Ultrafilters: some old and some new results* // Bull. Amer. Math. Soc. 1997. V.83, №4. P.417–455.

Луцкий индустриальный институт

Получено 15.09.96