Математичні Студії. Т.7, №2 Matematychni Studii. V.7, No.2

УДК 512.553

РОЗШАРОВАНІ ДОБУТКИ СКРУТІВ

Р.В. Вовк

R.V. Vovk. *Fibered products of the torsion theories*, Matematychni Studii, **7**(1997) 113–124.

We research properties of the torsion theories over the fibered products of associative rings. It is proved that there exists an isomorphism between a lattice of the torsion theories of fibered product of rings and fibered product of lattices of the torsion theories of the appropriate multipliers.

Вступ

Розшаровані добутки об'єктів різних категорій відіграють важливу роль в різних розділах математики. В топології розшаровані добутки зв'язані з накриттями топологічних просторів і теорією пучків. Розшаровані добутки займають важливе місце в алгебраїчній K-теорії та застосовуються до алгебраїчної геометрії (див. [1], [7]). В останній час ця конструкція все частіше використовується в теорії асоціативних кілець. Так, в праці [10] Фаччіні досліджував теоретико-кільцеві властивості розшарованих добутків локальних асоціативно-комутативних кілець, нетерових кілець тощо. Зокрема, він показав, що розшарований добуток сюр'єктивних гомоморфізмів локальних кілець є знову локальним, а нетерових кілець — нетеровим (лема 1, [10]). Т. Огома [14], досліджуючи комутативні нетерові кільця з одиницею, отримав подібний результат з певними умовами (теорема 2, [14]). При вивченні розшарованих добутків некомутативних нетерових кілець Р. Вовк і М. Комарницький [4] отримали більш загальний результат (твердження 3, [4]). Інші категорні властивості розшарованих добутків кілець та модулів над ними досліджували Вісман [18], Фаччіні і Вамош [11] та інші. Одним з основних результатів останньої праці є теорема 4 [11], формулювання якої наведено нижче і яку ми використовуватимемо в наших доведеннях.

Природно виникає потреба в дослідженні локалізацій розшарованих добутків кілець. В зв'язку з цим автор ввів поняття розшарованого добутку скрутів і радикальних фільтрів (див. [3]). В даній праці досліджуються скрути над розшарованими добутками кілець. Основним результатом є теорема 10, яка встановлює ізоморфізм між граткою скрутів розшарованих добутків кілець і розшарованим добутком граток скрутів відповідних множників.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 16B50.

§1. Основні терміни і позначення

Кожне кільце вважатимемо асоціативним з одиницею, всі модулі, якщо не обумовлено інше, будуть унітарними лівими модулями. Нехай $\mathcal{C}$ — абелева категорія, $\alpha_1\colon C_1 \to C_0$ і $\alpha_2\colon C_2 \to C_0$ — морфізми в $\mathcal{C}$. Розшарованим добутком морфізмів α_1 і α_2, або (в іншій термінології) об'єктів C_1 і C_2 над C_0, є об'єкт C із $\mathcal{C}$ разом з такими морфізмами $\pi_1\colon C \to C_1$ і $\pi_2\colon C \to C_2$, що виконуються умови:

1) $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$;
2) Для кожного об'єкта X і будь-яких морфізмів $\xi_1\colon X \to C_1$ і $\xi_2\colon X \to C_2$, таких, що $\alpha_1\xi_1 = \alpha_2\xi_2$ існує і єдиний такий морфізм $\gamma\colon X \to C$, що $\pi_1\gamma = \xi_1$ і $\pi_2\gamma = \xi_2$.

Діаграма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & C_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ C_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & C_0 \end{tikzcd}$$

називається діаграмою розшарованого добутку або універсальним квадратом. Розшарований добуток визначається однозначно, з точністю до ізоморфізму ([17], с.89). Позначатимемо такий розшарований добуток через $C_1 \times_{C_0} C_2$.

Дуальним до поняття розшарованого добутку є поняття корозшарованого добутку, який також визначається однозначно, з точністю до ізоморфізму ([17], с.92). Корозшарований добуток позначатимемо символом $C_1 \sqcup_{C_0} C_2$.

В категорії A-Mod розшарований добуток задається більш конкретно:

$$C_1 \times_{C_0} C_2 = \big\{(x, y) \in C_1 \times C_2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y) \in C_0\big\}.$$

Для корозшарованого добутку справедливе зображення ([17], с.92):

$$C_1 \sqcup_{C_0} C_2 = \big(C_1 \oplus C_2\big)/C', \text{ де } C' = \big\{(\beta_1(x), -\beta_2(x)) \mid x \in C_0\big\}.$$

В категорії асоціативних кілець $Rings$ розшаровані і корозшаровані добутки також існують і задаються цілком подібно.

Нехай A_1, A_2, A_0 — кільця і задано гомоморфізми $f_1\colon A_1 \to A_0$, $f_2\colon A_2 \to A_0$. Побудуємо розшарований добуток A кілець A_1 і A_2 над A_0, який задається універсальним квадратом:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & A_0. \end{tikzcd}$$

Впродовж всієї статті f_2 є накладенням кілець, а тоді p_1 також є сюр'єктивним гомоморфізмом. Позначимо функтори

$$P_1 = Hom_A(A_1, -)\colon A\text{-}Mod \to A_1\text{-}Mod,$$
$$P_2 = Hom_A(A_2, -)\colon A\text{-}Mod \to A_2\text{-}Mod,$$
$$F_1 = Hom_{A_1}(A_0, -)\colon A_1\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod,$$
$$F_2 = Hom_{A_2}(A_0, -)\colon A_2\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod.$$

За деталями можна звернутися до [9], [11]. Існує природна еквівалентність функторів $\eta\colon F_2P_2 \to F_1P_1$. Позначимо наступні відображення:

$$\pi_1\colon P_1M \to M,\ \pi_2\colon P_2M \to M,\ \varphi_1\colon F_1N \to N,\ \varphi_2\colon F_2L \to L,$$

де $M \in A\text{-}Mod$, $N \in A_1\text{-}Mod$, $L \in A_2\text{-}Mod$. Відповідні позначення зберігатимуться в усій статті.

Наведемо ряд відомих результатів, які стосуються розшарованих добутків кілець.

Лема 1 [10, лема 1.5]. *Нехай A_0, A_1, A_2 — комутативні кільця, $\varphi_1\colon A_1 \to A_0$, $\varphi_2\colon A_2 \to A_0$ — сюр'єктивні гомоморфізми кілець. Розшарований добуток $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ є нетеровим кільцем тоді і тільки тоді, коли кільця A_1 і A_2 є нетеровими.*

В категорії комутативних кілець з одиницею справедлива наступна теорема.

Теорема 2 [14, теорема 2.1]. *Нехай $\varphi_1\colon A_1 \to A_0$, $\varphi_2\colon A_2 \to A_0$ — гомоморфізми кілець, де A_0, A_1, A_2 — комутативні нетерові кільця. Розшарований добуток A гомоморфізмів f_1 і f_2 є нетеровим кільцем тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

(1) $C = f_1(A_1) \cap f_2(A_2)$ *є нетеровим кільцем;*

(2) $\operatorname{Ker} f_1/(\operatorname{Ker} f_1)^2$ *і* $\operatorname{Ker} f_2/(\operatorname{Ker} f_2)^2$ *є скінченно-породженими C-модулями.*

Наступний результат узагальнює теорему 2 на некомутативний випадок.

Твердження 3 [4, твердження 2.1]. *Нехай A_1, A_2 і $C = \operatorname{Im} f_1 \cap \operatorname{Im} f_2$ — нетерові справа кільця, ідеали $\operatorname{Ker} f_i$, $i = 1, 2$ задовольняють праву умову Артіна-Ріса, а $(\operatorname{Ker} f_i)^j/(\operatorname{Ker} f_i)^{j+1}$ — скінченно-породжений правий C-модуль за будь-яких $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тоді кільце $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ нетерове справа.*

Ми будемо спиратися ще на такий результат Фаччіні і Вамоша.

Теорема 4 [11, теорема 2]. *A-модуль E є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $E_1 = Hom_A(A_1, E)$ є ін'єктивним A_1-модулем і $E_2 = Hom_A(A_2, E)$ є ін'єктивним A_2-модулем.*

Нагадаємо основні моменти побудови розшарованого добутку категорій A_1-Mod і A_2-Mod. Позначимо через $\mathcal{C}$ категорію, об'єктами якої є трійки (M_1, M_2, α), де $M_1 \in A_1\text{-}Mod$, $M_2 \in A_2\text{-}Mod$ і $\alpha\colon F_2M_2 \to F_1M_1$ є A_0-ізоморфізмом. Морфізмами з об'єкта (M_1, M_2, α) в об'єкт (M_1', M_2', α') в категорії $\mathcal{C}$ є такі пари (σ_1, σ_2), де $\sigma_1\colon M_1 \to M_1'$ — A_1-гомоморфізм і $\sigma_2\colon M_2 \to M_2'$ — A_2-гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} F_1M_1 & \xrightarrow{F_1\sigma_1} & F_1M_1' \\ \alpha\Big\uparrow & & \Big\uparrow\alpha' \\ F_2M_2 & \xrightarrow{F_2\sigma_2} & F_2M_2', \end{array}$$

є комутативною.

Категорія $\mathcal{C}$ є адитивною зі скінченими добутками та низкою інших хороших властивостей (див., наприклад, [1], [7], [12]).

Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ можна побудувати діаграму

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\pi_1} & M_1 \\ \pi_2\Big\uparrow & & \Big\uparrow\varphi_1\alpha \\ M_2 & \xleftarrow{\varphi_2} & M_0, \end{array}$$

яка є коуніверсальним квадратом в категорії A-Mod, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ і $M_0 = F_2M_2$. Отриманий модуль $M \in A$-Mod є корозшарованим добутком модулів M_1 та M_2 над M_0. Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ покладемо $M = T(M_1, M_2, \alpha)$. Тоді $T\colon \mathcal{C} \to A - Mod$ є функтором, який індукує еквівалентність між повною підкатегорією категорії $\mathcal{C}$, яка породжена об'єктами $(E_1, E_2, \alpha) \in \mathcal{C}$, де E_1 і E_2 – ін'єктивні A_1- і A_2-модулі відповідно, і повною підкатегорією категорії A-Mod, яка породжена ін'єктивними A-модулями (див. [11]).

Лема 5. *Нехай задана сім'я модулів $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, де $M_\alpha \in A$-Mod для всіх $\alpha \in \Omega$.*
Тоді

$$P_1(\prod_{\alpha\in\Omega} M_\alpha) \ \cong \prod_{\alpha\in\Omega}(P_1(M_\alpha)), \quad P_2(\prod_{\alpha\in\Omega} M_\alpha) \ \cong \prod_{\alpha\in\Omega}(P_2(M_\alpha)).$$

Це частковий випадок збереження зображуваними функторами проективних границь (див. [2], [9], [16]).

§2. Корозшаровані добутки модулів над розшарованими добутками кілець

Лема 6. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$, $M, N \in A$-Mod, $M_1 = P_1M$, $M_2 = P_2M$, $M_0 = F_2P_2M$, $N_1 = P_1N$, $N_2 = P_2N$, $N_0 = F_2P_2N$, де $M_1, N_1 \in A_1$-Mod, $M_2, N_2 \in A_2$-Mod, $M_0, N_0 \in A_0$-Mod. Якщо $M = M_1 \sqcup_{M_0} M_2$ і $N = N_1 \sqcup_{N_0} N_2$, причому ці кодобутки визначаються наступними коуніверсальними квадратами*

$$\begin{array}{ccc} M & \longleftarrow & M_1 \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_1} \\ M_2 & \xleftarrow{\alpha_2} & M_0 \end{array} \qquad i \qquad \begin{array}{ccc} N & \longleftarrow & N_1 \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \beta_1} \\ N_2 & \xleftarrow{\beta_2} & N_0 \end{array}$$

(в категорії A-Mod), то модуль N вкладається в модуль M тоді і тільки тоді, коли існують такі мономорфізми $\lambda_1\colon N_1 \to M_1$, $\lambda_2\colon N_2 \to M_2$ і $\lambda_0\colon N_0 \to M_0$, що $\lambda_1\beta_1 = \alpha_1\lambda_0$ і $\lambda_2\beta_2 = \alpha_2\lambda_0$.

Доведення. Нехай $\lambda\colon N \to M$ є мономорфізмом. Тоді розглянемо коротку точну послідовність: $0 \to N \xrightarrow{\lambda} M \to K \to 0$. Подіємо на цю послідовність функтором P_1. Враховуючи те, що P_1 є коваріантним і точним зліва, отримаємо точну послідовність $0 \to N_1 \xrightarrow{P_1(\lambda)} M_1 \to P_1K$, при цьому гомоморфізм $\lambda_1 = P_1(\lambda)$ є мономорфізмом.

Подібно, при дії функтора P_2 отримаємо мономорфізм $\lambda_2 = P_2(\lambda)\colon N_2 \to M_2$.

Маючи мономорфізм λ_2, можна побудувати точну послідовність A_2-модулів $0 \to N_2 \xrightarrow{\lambda_2} M_2 \to L \to 0$. Після дії функтора F_2 отримаємо точну послідовність $0 \to N_0 \xrightarrow{F_2(\lambda_2)} M_0 \to F_2L$ і мономорфізм $\lambda_0 = F_2(\lambda_2)$. Легко бачити, що рівності, виписані у формулюванні леми, справді виконуються.

Навпаки, нехай існують мономорфізми $\lambda_1\colon N_1 \to M_1$, $\lambda_2\colon N_2 \to M_2$ і $\lambda_0\colon N_0 \to M_0$, для яких $\lambda_1\beta_1 = \alpha_1\lambda_0$ і $\lambda_2\beta_2 = \alpha_2\lambda_0$.

Побудуємо комутативну дiаграму

$$
\begin{tikzcd}
M & N \arrow[l, "\lambda"'] & N_1 \arrow[l] \arrow[r, "\lambda_1"] & M_1 \arrow[lll, bend right] \\
M_2 \arrow[u] & N_2 \arrow[u] \arrow[l, "\lambda_2"'] & N_0 \arrow[u] \arrow[l] \arrow[r, "\lambda_0"] & M_0, \arrow[u] \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

де квадрати

$$
\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & M_1 \\
N_0 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[r, "\lambda_0"] & M_0 \arrow[u, "\alpha_1"']
\end{tikzcd}
\quad \text{i} \quad
\begin{tikzcd}
N_2 \arrow[d, "\lambda_2"'] & N_0 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[d, "\lambda_0"] \\
M_2 & M_0 \arrow[l, "\alpha_2"']
\end{tikzcd}
$$

є комутативними.

Iз основної властивостi коунiверсального квадрату випливає, що iснує гомоморфiзм $\lambda\colon N \to M$ з вiдповiдними властивостями. Нам потрiбно переконатись, що цей гомоморфiзм насправдi є мономорфiзмом.

Нагадаємо, що за нашим припущенням гомоморфiзм кiлець $p_1\colon A \to A_1$ є сюр'єк- тивним, i ми можемо побудувати точну послiдовнiсть A-модулiв $0 \to \operatorname{Ker} p_1 \to A \xrightarrow{p_1} A_1 \to 0$. Подiємо на цю послiдовнiсть функтором $Hom_A(-, N)$, який є контраварiантним i точним злiва. Це означає, що наступна послiдовнiсть

$$Hom_A(A_1, N) \xrightarrow{Hom_A(p_1,N)} Hom_A(A_1, N) \longrightarrow Hom_A(\operatorname{Ker} p_1, N)$$

є точною i гомоморфiзм $\pi_1 = Hom_A(p_1, N)$ є iн'єктивним. В наших позначеннях маємо, що $\pi_1\colon N_1 \to N$ є мономорфiзмом. Аналогiчно, пiсля застосування функтора $Hom_A(-, M)$ отримаємо мономорфiзм $\pi_1'\colon M_1 \to M$.

Гомоморфiзм $\pi_1' \circ \lambda_1\colon N_1 \to M$ є iн'єктивним, як композицiя двох мономорфiзмiв. Iз комутативностi наведеної дiаграми маємо, що $\pi' \circ \lambda_1 = \lambda \circ \pi_1$. Оскiльки π_1 є мономорфiзмом, то λ також є мономорфiзмом. Лему доведено.

Нагадаємо, що два iн'єктивних модулi називаються еквiвалентними, якщо кожний з них можна вкласти в прямий добуток екземплярiв iншого (див. [13]).

Справедлива наступна лема:

Лема 7. *Нехай* (E_1, E_2, α), (E_1', E_2', α') *— об'єкти категорiї* $\mathcal{C} = A_1\text{-}Mod \times_{A_0\text{-}Mod} A_2\text{-}Mod$. *Покладемо* $E = T(E_1, E_2, \alpha)$ *i* $E' = T(E_1', E_2', \alpha')$, *де* T *— функтор, побудований вище. Iн'єктивнi* A*-модулi* E *i* E' *є еквiвалентними тодi i тiльки тодi, коли справедливi наступнi три твердження:*
1) $E_1 = P_1(E)$ *i* $E_1' = P_1(E')$ *є еквiвалентними iн'єктивними* A_1*-модулями,*
2) $E_2 = P_2(E)$ *i* $E_2' = P_2(E')$ *є еквiвалентними iн'єктивними* A_2*-модулями,*
3) $E_0 = F_2P_2(E)$ *i* $E_0' = F_2P_2(E')$ *є еквiвалентними iн'єктивними* A_0*-модулями.*

Доведення. Нехай E, E' - еквiвалентнi iн'єктивнi лiвi A-модулi, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$. Тодi iснує мономорфiзм $\lambda\colon E' \to E^{\Omega}$ для деякої множини Ω.

З леми 6 випливає, що iснує мономорфiзм $\lambda_1\colon P_1(E') \longrightarrow P_1(E^{\Omega})$.

За лемою 5 існує ізоморфізм $\rho_1 \colon Hom_A(A_1, E^{\Omega}) \to (Hom_A(A_1, E))^{\Omega}$, і одержуємо, що $P_1(E^{\Omega}) \cong (P_1 E)^{\Omega} = E_1^{\Omega}$.

Ця рівність дозволяє утворити точну послідовність $0 \to E_1' \xrightarrow{\rho_1\lambda_1} E_1^{\Omega} \to K_1$.

Тут A_1-модулі E_1' і E_1^{Ω} є ін'єктивними, оскільки функтор P_1 зберігає ін'єктивність і прямий добуток ін'єктивних модулів є ін'єктивним.

Отже, ми отримали, що за мономорфізмом $\lambda \colon E' \to E^{\Omega}$ можна побудувати мономорфізм $\rho_1\lambda_1 \colon E_1' \to E_1^{\Omega}$. Проводячи аналогічні міркування щодо мономорфізму $\lambda' \colon E \to E'^{\Omega'}$, знайдемо мономорфізм $\rho_1\lambda_1' \colon E_1 \to E'^{\Omega'}_1$. Існування мономорфізмів $\rho_1\lambda_1$ і $\rho_1\lambda_1'$ доводить еквівалентність модулів E_1 і E_1'. Діючи функтором P_2 на мономорфізми λ і λ' і повторюючи наведені вище викладки, отримаємо мономорфізми $\rho_2\lambda_2 \colon E_2' \to E_2^{\Omega}$ $\rho_2\lambda_2' \colon E_2 \to E'^{\Omega'}_2$, де $\rho_2 \colon P_2(E^{\Omega'}) \longrightarrow (P_2(E))^{\Omega'}$ — A_2-ізоморфізм. Це і означатиме, що E_2 і E_2' є еквівалентними.

Еквівалентність модулів E_0 і E_0' отримується в результаті дії функтора F_2, який є коваріантним і точним зліва, на точні послідовності

$$0 \to E_2' \xrightarrow{P_2(\lambda)} E_2^{\Omega} \to K_2 \ , \quad 0 \to E_2 \xrightarrow{P_2(\lambda')} E'^{\Omega'}_2 \to K_2' \ .$$

Навпаки, нехай E_1, E_1' є еквівалентними A_1-модулями і E_2, E_2' є еквівалентними A_2-модулями. Нагадаємо, що

$$E_1 = Hom_A(A_1, E),\ E_2 = Hom_A(A_2, E),\ E_1' = Hom_A(A_1, E') \ \text{ і } \ E_2' = Hom_A(A_2, E').$$

За теоремою 4 модулі E і E' є ін'єктивними.

Враховуючи те, що (E_1, E_2, α) і (E_1', E_2', α') є об'єктами категорії $\mathcal{C}$, яка є розшарованим добутком категорій A_1-Mod і A_2-Mod, можна побудувати коуніверсальні квадрати

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\pi_1} & E_1 \\ {\scriptstyle \pi_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_1\eta} \\ E_2 & \xleftarrow{\varphi_2} & E_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E' & \xleftarrow{\pi_1'} & E_1' \\ {\scriptstyle \pi_2'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_1'\eta} \\ E_2' & \xleftarrow{\varphi_2'} & E_0', \end{array} \tag{1}$$

де всі модулі розглядаються як A-модулі і всі стрілки є A-гомоморфізмами.

Оскільки модулі E_1 і E_1', E_2 і E_2' та E_0 і E_0' є попарно еквівалентними у відповідних категоріях, то існують такі мономорфізми: $\mu_1 \colon E_1' \to E_1^{\Omega_1}$, $\mu_2 \colon E_2' \to E_2^{\Omega_2}$ та $\mu_0 \colon E_0' \to E_0^{\Omega_0}$, де Ω_1, Ω_2, Ω_0 — деякі множини. Серед цих множин виберемо множину найбільшої потужності і позначимо її через Ω. Зрозуміло, що наведені вкладення будуть існувати і для степеня Ω, тобто можна записати $\mu_1 \colon E_1' \to E_1^{\Omega}$, $\mu_2 \colon E_2' \to E_2^{\Omega}$ та $\mu_0 \colon E_0' \to E_0^{\Omega}$. Крім цього, діаграма

$$\begin{array}{ccc} E^{\Omega} & \xleftarrow{\pi_1^{\Omega}} & E_1^{\Omega} \\ {\scriptstyle \pi_2^{\Omega}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\varphi_1\eta)^{\Omega}} \\ E_2^{\Omega} & \xleftarrow{\varphi_2^{\Omega}} & E_0^{\Omega} \end{array}$$

є теж коуніверсальним квадратом, що випливає із коуніверсальності відповідних квадратів (1).

Розглянемо тепер діаграму

$$\begin{tikzcd}
E^{\Omega} & E' \arrow[l] & E'_1 \arrow[l, "\pi'_1"'] \arrow[r, "\mu_1"] & E_1^{\Omega} \arrow[lll, bend right, "\pi_1^{\Omega}"'] \\
E_2^{\Omega} \arrow[u, "\pi_2^{\Omega}"] & E'_2 \arrow[l, "\mu_2"'] \arrow[u, "\pi'_2"] & E'_0 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r, "\mu_0"] & E_0^{\Omega}. \arrow[u] \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Із основної властивості коуніверсального квадрату отримаємо, що існує гомоморфізм $\mu\colon E' \to E^{\Omega}$. За лемою 6 гомоморфізм μ є мономорфізмом.

Проводячи аналогічні міркування, замінивши місцями E і E', одержимо мономорфізм $\mu'\colon E \to {E'}^{\Omega'}$. Існування мономорфізмів μ і μ' доводить еквівалентність модулів E і E'. Лему доведено.

§3. Скрути над розшарованими добутками кілець

Гратку всіх скрутів, визначених в категорії A-Mod, позначатимемо через A-$Tors$. Нехай τ_1 — скрут в A_1-Mod і τ_2 — скрут в A_2-Mod з котвірними ін'єктивними модулями $E_1 \in A_1$-Mod і $E_2 \in A_2$-Mod, тоді розшарованим добутком скрутів τ_1 і τ_2 в категорії $\mathcal{C}$ назвемо скрут τ, копороджений об'єктом (E_1, E_2, θ). Скрут τ в категорії A-Mod копороджений таким ін'єктивним модулем E, що діаграма

$$\begin{tikzcd}
E & E_1 \arrow[l] \\
E_2 \arrow[u] & E_0 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{2}$$

є коуніверсальним квадратом, також називатимемо розшарованим добутком скрутів. Ін'єктивний модуль $E_0 \in A_0$-Mod копороджує скрут τ_0. Позначатимемо розшарований добуток скрутів в категорії $\mathcal{C}$ через $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$. Надалі називатимемо його розшарованим добутком скрутів τ_1 і τ_2 над скрутом τ_0.

Нехай $\mathfrak{G}$ — гратка всіх скрутів в категорії $\mathcal{C}$. В $\mathfrak{G}$ нерівність $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2 \leq \sigma_1 \times_{\sigma_0} \sigma_2$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $\tau_1 \leq \sigma_1, \tau_2 \leq \sigma_2$ і $\tau_0 \leq \sigma_0$.

Твердження 8. *Гратка скрутів A-$Tors$ над кільцем $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ ізоморфна гратці всіх скрутів $\mathfrak{G}$, визначених в категорії $\mathcal{C} = A_1\text{-}Mod \times_{A_0\text{-}Mod} A_2\text{-}Mod$.*

Доведення. Нехай τ — скрут в категорії A-$Tors$ і модуль E є його ін'єктивним котвірним. Тоді модулі $E_1 = P_1(E)$ і $E_2 = P_2(E)$ є ін'єктивними, і копороджують скрути τ_1 і τ_2 відповідно в категоріях A_1-Mod і A_2-Mod. В категорії $\mathcal{C}$ об'єктами є трійки (M_1, M_2, α), де $M_1 \in A_1$-Mod, $M_2 \in A_2$-Mod і α – A_0-ізоморфізм модулів $F_1(M_1)$ і $F_2(M_2)$. Для модулів E_1 і E_2 можна побудувати коуніверсальний квадрат (2), де $E_0 = F_2P_2(E) = F_2(E_2)$. Оскільки існує природна еквівалентність функторів $\eta\colon F_2P_2 \to F_1P_1$, то $F_1P_1(E) \cong F_2P_2(E)$, тобто $F_1(E_1) \cong F_2(E_2)$. Це означає, що трійка (E_1, E_2, η_E) є об'єктом категорії $\mathcal{C}$. Крім цього, модуль $E_0 = F_2P_2(E)$ є ін'єктивним, тому копороджує деякий скрут τ_0 в категорії A_0-Mod. Тоді скрут $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$ копороджується об'єктом (E_1, E_2, η_E).

Побудуємо відображення $h\colon A\text{-}Tors \to \mathfrak{G}$, яке задається правилом: $h\colon \tau \mapsto \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$.

Для будь-яких $\tau, \tau' \in A\text{-}Tors$ скрут $\tau \wedge \tau'$ копороджується ін'єктивним модулем $E \times E'$. При дії функторів P_1 і P_2 отримуємо модулі $E_1 \times E_1'$ і $E_1 \times E_2'$, які є ін'єктивними котвірними скрутів $\tau_1 \wedge \tau_1'$ і $\tau_2 \wedge \tau_2'$ відповідно. Скрут $(\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2) \wedge (\tau_1' \times_{\tau_0'} \tau_2')$ копороджується об'єктом $(E_1, E_2, \eta_E) \times (E_1', E_2', \eta_E') = (E_1 \times E_1', E_2 \times E_2', \eta_{E\times E'})$. Остання рівність справедлива, оскільки з існування ізоморфізмів $F_2P_2(E) \cong F_1P_1(E)$ і $F_2P_2(E') \cong F_1P_1(E')$ випливає існування ізоморфізму $F_2P_2(E \times E') \cong F_1P_1(E \times E')$.

Об'єкт $(E_1 \times E_1', E_2 \times E_2', \eta_{E\times E'})$ копороджує скрут $(\tau_1 \wedge \tau_1') \times_{(\tau_0 \wedge \tau_0')} (\tau_2 \wedge \tau_2')$.

Звідси отримуємо, що

$$h(\tau \wedge \tau') = (\tau_1 \wedge \tau_1') \times_{(\tau_0\wedge\tau_0')} (\tau_2 \wedge \tau_2') = (\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2) \wedge (\tau_1' \times_{\tau_0'} \tau_2') = h(\tau) \wedge h(\tau').$$

Отже, відображення h є гомоморфізмом граток. Більше того, даний гомоморфізм є ізоморфізмом. Справді, нехай задані такі скрути $\tau_1 \in A_1\text{-}Tors$, $\tau_2 \in A_2\text{-}Tors$ і $\tau_0 \in A_0\text{-}Tors$, що $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2 \in \mathfrak{G}$. Тоді їм відповідають класи еквівалентності ін'єктивних котвірних модулів $[E_1]$ і $[E_2]$ в категоріях $A_1\text{-}Mod$ і $A_2\text{-}Mod$ і клас $[E_0]$ в категорії $A_0\text{-}Mod$. В даній ситуації можна побудувати коуніверсальний квадрат (1) і знайти модуль E для будь-яких представників класів $E_1 \in [E_1]$, $E_2 \in [E_2]$ і $E_0 \in [E_0]$. За лемою 7 ми знайдемо клас еквівалентних ін'єктивних модулів $[E]$, кожний з яких копороджує скрут $\tau \in A\text{-}Tors$. Отже, відображення h є сюр'єктивним. Для доведення ін'єктивності відмітимо, що за лемою 7 нееквівалентні ін'єктивні A-модулі під дією функторів P_1 і P_2 переходять в нееквівалентні ін'єктивні A_1- і A_2-модулі відповідно. Оскільки між класами еквівалентності ін'єктивних модулів і скрутами існує взаємно-однозначна відповідність, то це означає, що образи різних скрутів τ і τ' не можуть бути рівними в категорії $\mathfrak{G}$. Твердження доведено.

Це твердження встановлює взаємно-однозначну відповідність між скрутами гратки $A\text{-}Tors$ над розшарованим добутком кілець $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ і скрутами, визначеними в розшарованому добутку категорій $A_1\text{-}Mod \times_{A_0\text{-}Mod} A_2\text{-}Mod$.

Надалі, коли це не буде приводити до незручностей, під розшарованим добутком скрутів будемо розуміти як скрути із гратки $\mathfrak{G}$, так і відповідні їм скрути із гратки $A\text{-}Tors$.

Наслідок 9. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$. Розшарований добуток скрутів $\chi = \chi_1 \times_{\chi_0} \chi_2$ є невласним тоді і тільки тоді, коли скрути $\chi_1 \in A_1\text{-}Tors$, $\chi_2 \in A_2\text{-}Tors$ і $\chi_0 \in A_0\text{-}Tors$ є невласними.*

Доведення. Нехай скрут $\chi = \chi_1 \times_{\chi_0} \chi_2$ є невласним, тобто він копороджується нульовим модулем із категорії $\mathcal{C} = A_1\text{-}Mod \times_{A_0\text{-}Mod} A_2\text{-}Mod$. Оскільки за твердженням 8 гратка всіх скрутів, визначених в категорії $\mathcal{C}$ ізоморфна гратці $A\text{-}Tors$, то скруту χ відповідає скрут, копороджений нульовим A-модулем. Позначимо його так само через χ. Тоді котвірними скрутів χ_1, χ_2 і χ_0 є відповідно модулі $P_1(0)$, $P_2(0)$ і $F_2P_2(0)$, які є нульовими. Отже, ми отримали, що скрути χ_1, χ_2 і χ_0 є невласними.

Навпаки, нехай χ_1, χ_2 і χ_0 — невласні скрути, визначені в категоріях $A_1\text{-}Mod$, $A_2\text{-}Mod$ і $A_0\text{-}Mod$ відповідно. Побудуємо розшарований добуток скрутів $\chi = \chi_1 \times_{\chi_0} \chi_2$. Котвірним скруту χ є модуль E, такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd} E & 0 \arrow[l] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

є коуніверсальним квадратом. Звідси отримуємо, що $E = 0$. Отже скрут χ є невласним. Наслідок доведено.

Теорема 10. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$. Гратка скрутів A-$Tors$ ізоморфна розшарованому добутку граток A_1-$Tors \times_{A_0\text{-}Tors} A_2$-$Tors$.*

Доведення. Гратки скрутів A_1-$Tors$, A_2-$Tors$ і A_0-$Tors$ визначені в категоріях A_1-Mod, A_2-Mod і A_0-Mod відповідно. Розшарований добуток граток A_1-$Tors \times_{A_0\text{-}Tors} A_2$-$Tors$ складається із рошарованих добутків скрутів $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$, де $\tau_1 \in A_1$-$Tors$, $\tau_2 \in A_2$-$Tors$ і $\tau_0 \in A_0$-$Tors$. Кожний із таких розшарованих добутків скрутів τ визначений в розшарованому добутку категорій $\mathcal{C} = A_1$-$Mod \times_{A_0\text{-}Mod} A_2$-$Mod$, і кожний скрут в категорії $\mathcal{C}$ є розшарованим добутком скрутів із A_1-Mod і A_2-Mod. Отже, розшарований добуток граток скрутів A_1-$Tors \times_{A_0\text{-}Tors} A_2$-$Tors$ збігається з граткою всіх скрутів $\mathfrak{G}$ в категорії $\mathcal{C}$. За твердженням 8 гратка $\mathfrak{G}$ ізоморфна гратці скрутів A-$Tors$. Тому розшарований добуток граток скрутів A_1-$Tors \times_{A_0\text{-}Tors} A_2$-$Tors$ ізоморфний гратці скрутів A-$Tors$. Теорему доведено.

§4. Періодичні і напівпрості модулі над розшарованим добутком кілець

Нагадаємо, що кожному скруту τ відповідає радикальний фільтр $\mathfrak{F}_\tau$, який складається з таких лівих ідеалів I кільця A, для яких лівий A-модуль A/I є τ-періодичними. Існує взаємно-однозначна відповідність між скрутами в категорії A-Mod і радикальними фільтрами кільця A. Радикальний фільтр, який відповідає скруту τ, позначатимемо через $\mathfrak{F}_\tau$.

Розшарованим добутком радикальних фільтрів $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ і $\mathfrak{F}_{\tau_2}$ назвемо радикальний фільтр $\mathfrak{F}_\tau$ скруту $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$. Для позначення розшарованого добутку радикальних фільтрів використовуватимемо символ $\mathfrak{F}_{\tau_1} \times_{\mathfrak{F}_{\tau_0}} \mathfrak{F}_{\tau_2}$.

Нехай E — довільний ін'єктивний A-модуль, τ — скрут, копороджений модулем E. A-модуль M є τ-напівпростим тоді і тільки тоді, коли існує A-мономорфізм із M в деякий ін'єктивний еквівалентний до E A-модуль.

Лема 11. *Нехай $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2 \in A$-$Tors$. Модуль $M \in A$-Mod є τ-напівпростим тоді і тільки тоді, коли $M_1 = P_1(M)$ є τ_1-напівпростим, $M_2 = P_2(M)$ — τ_2-напівпростим і $M_0 = F_2P_2(M)$ — τ_0-напівпростим.*

Доведення. Нехай E — ін'єктивний котвірний скруту τ. Те, що модуль M є τ-напів- простим в категорії A-Mod, означає, що існує ін'єктивний гомоморфізм $\lambda\colon M \to E'$, де E' — ін'єктивний A-модуль, еквівалентний до E. Тому існує точна послідовність $0 \to M \xrightarrow{\lambda} E' \to K \to 0$. Дія функтора P_1 приводить до точної послідовності A-модулів: $0 \to M_1 \xrightarrow{P_1(\lambda)} E'_1 \to K_1$. Отже, ми отримали A_1-мономорфізм $P_1(\lambda)\colon M_1 \to E'_1$. Модуль E'_1 є ін'єктивним і за лемою 7 є еквівалентним до $E_1 = P_1(E)$, тобто є котвірним скруту τ_1. Отже, модуль M_1 є τ_1-напівпростим. Подібно, використовуючи функтори P_2 і F_2P_2, отримаємо, що модуль M_2 є τ_2-напівпростим, а модуль M_0 є τ_0-напівпростим.

Навпаки, нехай M_1 — τ_1-напівпростий, M_2 — τ_2-напівпростий і M_0 — τ_0-напівпростий модулі. Це означатиме, що існують мономорфізми $\lambda_1\colon M_1 \to E'_1$, $\lambda_2\colon M_2 \to E'_2$, $\lambda_0\colon M_0 \to E'_0$, де E'_1, E'_2 і E'_0 — котвірні скрутів τ_1, τ_2 і τ_0

відповідно. Розглянемо коуніверсальні квадрати

$$
\begin{tikzcd}
M & M_1 \arrow[l] \\
M_2 \arrow[u] & M_0 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad \text{i} \quad
\begin{tikzcd}
E' & E'_1 \arrow[l] \\
E_2 \arrow[u] & E_0 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

і побудуємо діаграму

$$
\begin{tikzcd}
E & M \arrow[l, "\lambda"'] & M_1 \arrow[l] \arrow[r, "\lambda_1"] & E'_1 \arrow[lll, bend right] \\
E'_2 \arrow[u] & M_2 \arrow[l, "\lambda_2"'] \arrow[u] & M_0 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r, "\lambda_0"] & E'_0. \arrow[u] \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Вона є комутативною. Із цієї діаграми за лемою 6 отримаємо, що існує мономорфізм $\lambda\colon M \to E'$, і модуль E' є ін'єктивним котвірним скруту τ. Це означає, що M є τ-напівпростим A-модулем. Лему доведено.

Нагадаємо, що для будь-якого скруту τ A-модуль M є τ-періодичним тоді і тільки тоді, коли $Hom_A(M, E) = 0$ для кожного ін'єктивного котвірного E скруту τ.

Лема 12. *Нехай $A = A \times_{A_0} A_2$, $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$, де τ_i — скрути в категорії A_i-Mod (i=0,1,2). A-модуль $M = M_1 \sqcup_{M_0} M_2$ є τ-періодичним тоді і тільки тоді, коли M_1 є τ_1-періодичним M_2 є τ_2-періодичним модулями.*

Доведення. Для будь-яких A-модулів $M = (M_1, M_2, \eta_M)$ і $E = (E_1, E_2, \eta_E)$ із категорії $\mathcal{C}$ гомоморфізм $\sigma\colon M \to E$ задається парою (σ_1, σ_2), де $\sigma_1\colon M_1 \to E_1$ $\sigma_2\colon M_2 \to E_2$ A_1- і A_2-гомоморфізми відповідно, такі, що діаграма

$$
\begin{tikzcd}
F_1M_1 \arrow[r, "F_1\sigma_1"] & F_1E_1 \\
F_2M_2 \arrow[u, "\eta_M"] \arrow[r, "F_2\sigma_2"] & F_2E_2 \arrow[u, "\eta_E"']
\end{tikzcd}
$$

є комутативною.

Нехай модуль M є τ-періодичним, тоді для деякого ін'єктивного котвірного модуля E скруту τ (а значить і для всіх котвірних) $Hom_A(M, E) = 0$. Модулі $E_1 = P_1(E)$ і $E_2 = P_2(E)$ є ін'єктивними котвірними скрутів τ_1 і τ_2 відповідно. Припустимо, що існують гомоморфізми $\sigma_1\colon M_1 \to E_1$ і $\sigma_2\colon M_2 \to E_2$ не рівні нулю одночасно. Тоді, маючи наступну діаграму, основою якої є коуніверсальний квадрат

$$
\begin{tikzcd}
E & M \arrow[l, "\sigma_1"'] & M_1 \arrow[l] \arrow[r] & E_1 \arrow[lll, bend right] \\
E_2 \arrow[u] & M_2 \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[u] & M_0. \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

можемо знайти ненульовий гомоморфізм $\theta\colon M \to E$. Але $Hom_A(M,E) = 0$, і тому гомоморфізми σ_1 і σ_2 ненульові. Це означає, що модуль M_1 є τ_1-періодичним, а M_2 — τ_2-періодичним.

Навпаки, нехай M_1 — τ_1-періодичний та M_2 — τ_2-періодичний модулі. Очевидно, $Hom_{A_1}(M_1,E_1) = 0$ і $Hom_{A_2}(M_2,E_2) = 0$ для будь-яких ін'єктивних котвірних E_1 і E_2 скрутів τ_1 і τ_2. Візьмемо будь-який гомоморфізм $\sigma \in Hom_A(M,E)$, де $M = M_1 \sqcup_{M_0} M_2$ і $E = E_1 \sqcup_{E_0} E_2$. Як було відмічено вище, він задається парою гомоморфізмів $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, де $\sigma_1\colon M_1 \to E_1$ і $\sigma_2\colon M_2 \to E_2$, які є нульовими, тому $\sigma = 0$. Отже, модуль M є τ-періодичним. Лему доведено.

Нехай τ — довільний скрут, визначений в категорії A-Mod. Кожний лівий A-модуль M містить єдиний максимальний τ-періодичний підмодуль, який ми позначатимемо через $\tau(M)$.

Лема 13. *Нехай $M \in A$-Mod, $M_1 = P_1(M)$, $M_2 = P_2(M)$, $M_0 = F_2P_2(M)$ і $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$. Тоді $\tau\big(M_1 \sqcup_{M_0} M_2\big) = \tau_1(M_1) \sqcup_{\tau_0(M_0)} \tau_2(M_2)$.*

Доведення. З того, що $M_1 = P_1(M)$, $M_2 = P_2(M)$ і $M_0 = F_2P_2(M)$ випливає, що можна побудувати коуніверсальний квадрат

$$\begin{tikzcd} M & M_1 \arrow[l] \\ M_2 \arrow[u] & M_0 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

і $M = M_1 \sqcup_{M_0} M_2$.

Знайдемо модулі $\tau_1(M_1) \subseteq M_1$, $\tau_2(M_2) \subseteq M_2$ і $\tau_0(M_0) \subseteq M_0$ і побудуємо коуніверсальний квадрат

$$\begin{tikzcd} L & \tau_1(M_1) \arrow[l] \\ \tau_2(M_2) \arrow[u] & \tau_0(M_0). \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

За лемою 12 модуль L є τ-періодичним, оскільки $\tau_1(M_1)$ є τ_1-періодичним і $\tau_2(M_2)$ є τ_2-періодичним модулями, і $L \subset M$ (див. лема 6). Оскільки модуль $\tau(M)$ є найбільшим τ-періодичним підмодулем в M, то $L \subseteq \tau(M)$. Розглянемо коуніверсальний квадрат

$$\begin{tikzcd} \tau(M) & P_1(\tau(M)) \arrow[l] \\ P_2\tau(M) \arrow[u] & F_2P_2\tau(M) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

і побудуємо діаграму

$$\begin{tikzcd} M & \tau(M) \arrow[l] & L \arrow[l] & \tau_1(M_1) \arrow[l] \arrow[r] & P_1(\tau(M)) \arrow[r] \arrow[lll, bend right] & M_1 \arrow[lllll, bend right] \\ M_2 \arrow[u] & P_2(\tau(M)) \arrow[l] \arrow[u] & \tau_2(M_2) \arrow[l] \arrow[u] & \tau_0(M_0) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & F_2P_2(\tau(M)) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[lll, bend left] & M_0. \arrow[u] \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}$$

Враховуючи те, що функтори P_1 і P_2 є точними зліва, отримуємо включення

$$\tau_1(M_1) \subseteq P_1(\tau(M)) \subseteq M_1 \text{ і } \tau_2(M_2) \subseteq P_2(\tau(M)) \subseteq M_2.$$

Модулі $\tau_1(M_1)$, $\tau_2(M_2)$ і $\tau_0(M_0)$ є найбільшими τ_1-, τ_2- і τ_0-періодичними підмодулями в M_1, M_2 і M_0 відповідно. За лемою 12 $P_1(\tau(M))$ є τ_1-періодичним, $P_2(\tau(M))$ є τ_2-періодичним і $F_2P_2(\tau(M))$ є τ_0-періодичним модулями і містяться в M_1, M_2 і M_0 відповідно. Тому $\tau_1(M_1) = P_1(\tau(M))$, $\tau_2(M_2) = P_2(\tau(M))$ і $\tau_0(M_0) = F_2P_2(\tau(M))$. Із єдиності коуніверсального квадрату отримуємо, що $\tau(M) = L = \tau_1(M_1) \sqcup_{\tau_0(M_0)} \tau_2(M_2)$. Лему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Басс Х. Алгебраическая K-теория. — М.: Мир, 1973. 591с.
2. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972. 259с.
3. Вовк Р.В. *Абсолютно σ-чистые модули над расслоенным произведением колец* // VI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Львов, 1990, Тезисы сообщений, С.33.
4. Вовк Р.В., Комарницький М.Я. *Розшаровані добутки деяких некомутативних нетерових кілець* // Алгебра і топологія, Тематичний збірник наукових праць, Київ, 1993. С.26–32.
5. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. — Кишинев: Штиинца, 1983. 154с.
6. Ламбек И. Кольца и модули. — М., 1971. 279с.
7. Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. — М.: Мир, 1974.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т.1 — М.: Мир, 1977; Т.2 — М.: Мир, 1979. 688с.
9. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules, — Berlin: Springer-Varlag, 1974. 339p.
10. Facchini A. *Fibre product and Morita duality for commutative rings* // Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 67, 1981. P.143–156.
11. Facchini A., Vamos P. *Injective modules over pullbacks* // J. London Math. Soc. (2), 31, 1985. P.425–438.
12. Gabriel P. *Des catégories abéliennes* // Bull. Soc. Math. France, 90, 1962, P.323–448.
13. Golan J.S. Torsion theories, — New York: J. Willey & Sons, 1986. 651p.
14. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings and their applications* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 97, 1985. P.231–241.
15. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings* // Advanced Studies in Pure Mathematics 11, 1987. P.173–182.
16. Popescu N. Abelian categories with application to rings and modules, – London: Acad. Press, 1973.
17. Stenström B. Rings of quotients — Berlin: Springer-Verlag, 1975. 309p.
18. Wiseman A.N. *Proective modules over pullback rings* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 97, 1985. P.399–406.

Львівський державний аграрний університет.

Надійшло 21.11.96