

УДК 517.432

АНАЛОГ ФОРМУЛ ФОН НЕЙМАНА В ПРОСТОРИ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

О.В. КУЖЕЛЬ

Присвячую 75-річчю від дня народження В.Е. Лянце.

A.V. Kuzhel. *An analogue of von Neumann's formulas in a space with involution*, Matematychni Studii, 7(1997) 73–80.

We study a wide class of extensions of J -hermitian operators – regular extensions. For such extensions an analog of von Neumann formulas is proved.

Після опублікування відомої роботи Дж. Неймана [1], в якій було запропоновано опис симетричних та самоспряжених розширень щільно заданих симетричних та самоспряжених розширень щільно заданих симетричних операторів, в ряді праць зазначені результати узагальнювались на різні класи операторів, що діють в тих або інших просторах.

Зокрема, М.О. Красносельський [2] отримав узагальнення формул фон Неймана на випадок самоспряжених розширень ермітових (нещільно заданих) операторів.

У наступні роки вказані формули різними авторами узагальнювались на випадок тих або інших класів розширень ермітових операторів, що діють як в гільбертовому просторі, так і в просторі з індефінітною метрикою (детальніше див. [3–6]).

У просторі з інволюцією описові J -самоспряжених розширень щільно заданих J -симетричних операторів вперше було присвячено роботи М.А. Жихаря [7] та А. Галіндо [8]. Пізніше в працях О.Д. Макарової [9] та К.М. Райха [10] розглядались питання, пов'язані з існуванням та описом J -самоспряжених розширень J -ермітових нещільно заданих операторів.

В статті А.Н. Кочубея [11] при певних обмеженнях J -самоспряжені розширення J -симетричних (щільно заданих) операторів описано в термінах абстрактних граничних умов.

О.С. Сергеев та Е.Р. Цекановський вивчали [12] дійсні (реальні) J -самоспряжені розширення J -ермітових операторів.

1991 *Mathematics Subject Classification*. 47A20, 47B15, 47B25.

Дослідження, представлені в цій публікації, створено за сприянням Міжнародної Соросівської програми підтримки освіти в галузі точних наук Міжнародного фонду "Відродження", грант SPU041036.

Таким чином, у вказаних роботах акцентувалась увага в основному на J -самоспряжених розширеннях J -ермітових щільно заданих операторів.

У даній статті вводиться поняття регулярних розширень J -ермітових (не обов'язково щільно заданих) операторів, що діють в просторі з інволюцією, та встановлюються аналоги формул фон Неймана для таких розширень. Зазначимо, що, зокрема, довільне J -самоспряжене розширення J -ермітового оператора є регулярним розширенням.

1. Основні питання. Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертів простір із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$. Оператор J , означений на всьому просторі $\mathcal{H}$, називається інволюцією (або спряженням), якщо для довільних x і y із $\mathcal{H}$

$$(Jx, y) = (Jy, x), \quad J^2x = x. \quad (1)$$

Без особливих труднощів встановлюються такі властивості оператора J :

$$\begin{aligned} (Jx, Jy) &= (y, x), \quad J^{-1} = J, \\ J(\alpha x + \beta y) &= \bar{\alpha}Jx + \bar{\beta}Jy \quad (\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2)$$

Задамо в $\mathcal{H}$ новий скалярний добуток $[\cdot, \cdot]$ рівністю

$$[x, y] = (x, Jy). \quad (3)$$

Тоді, враховуючи рівності (1)–(3),

$$[x, y] = [y, x], \quad [\alpha x, y] = [x, \alpha y] = \alpha[x, y], \quad \overline{[x, y]} = [Jx, Jy],$$

означимо в $\mathcal{H}$ J -норму $\|\cdot\|$:

$$\|x\|_J = \sqrt{[x, x]}. \quad (4)$$

Таким чином, $\|x\| \geq 0$, $\|\lambda x\|_J = |\lambda| \cdot \|x\|_J$ і

$$\|x\|_J \leq \|x\| \quad (\|x\| = \sqrt{(x, x)}). \quad (5)$$

Нерівність (5) отримано на підставі (2)–(4) та нерівності Коші-Буняковського.

Вектор x називаємо нейтральним, якщо $\|x\|_J = 0$ (або, що те саме, якщо $[x, x] = 0$).

Простір $\mathcal{H}$ з J -метрикою, що означена рівністю (3), називатимемо простором з інволюцією (або J -простором).

Якщо $\mathcal{H}_1$ – підпростір (або лінеал) J -простору $\mathcal{H}$, то J -ортогональне доповнення $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}[-]\mathcal{H}_1$ теж є підпростором простору $\mathcal{H}$. При цьому $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}[-]\mathcal{H}_2$. Але лінеали $\mathcal{H}_1$ і $\mathcal{H}_2$ вже не обов'язково лінійно незалежні.

У тому випадку, коли лінеали $\mathcal{H}_1$ і $\mathcal{H}_2$ лінійно незалежні, J -ортогональна сума $\mathcal{H}_1[+]\mathcal{H}_2$ ($\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}[-]\mathcal{H}_1$) є скрізь щільним в $\mathcal{H}$ лінеалом ($\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}_1[+]\mathcal{H}_2}$). Якщо при цьому $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1[+]\mathcal{H}_2$, то підпростір $\mathcal{H}_1$ (і $\mathcal{H}_2$) називатимемо проєкційно повним в $\mathcal{H}$. Умова проєкційної повноти може бути сформульована так само, як це зроблено в роботі [6] у випадку просторів з індефінітною метрикою.

2. J -ермітові оператори. Оператор A , що діє в $\mathcal{H}$, називається J -ермітовим (або просто ермітовим), якщо

$$[Ax, y] = [x, Ay] \quad (\forall \{x, y\} \subset \mathfrak{D}_A).$$

J -ермітів оператор A називається J -симетричним, якщо цей оператор щільно заданий (тобто $\overline{\mathfrak{D}_A} = \mathcal{H}$); і дійсним відносно спряження J , якщо $J : \mathfrak{D}_A \rightarrow \mathfrak{D}_A$ і $JA = AJ$.

Комплексне число λ будемо називати точкою J -регулярного типу оператора A , якщо існує таке число $K(\lambda) > 0$, що

$$\|(A - \lambda I)x\|_J \geq K(\lambda)\|x\| \quad (\forall x \in \mathfrak{D}_A). \quad (6)$$

Далі $\pi_j(A)$ означатиме множину точок J -регулярного типу оператора A .

Отже, якщо $\lambda \in \pi_j(A)$, то $\lambda \notin \sigma_p(A)$ і вектор $(A - \lambda I)x$ не є нейтральним ні при якому $x \in \mathfrak{D}_A$ ($x \neq 0$). Крім того, на підставі [5], $\pi_j(A) \subset \pi(A)$, де $\pi(A)$ – поле регулярності оператора A .

Дефектний підпростір $\mathfrak{N}_\lambda$ оператора A в J -просторі $\mathcal{H}$ означається рівністю

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathcal{H}[-]\Delta_A(\lambda) \quad (\Delta_A(\lambda) = (A - \lambda I)\mathfrak{D}_A),$$

де $[-]$ – знак ортогонального доповнення в J -метриці. Із звичайним дефектним підпростором $\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda = \mathcal{H} \ominus \Delta_A(\lambda)$ дефектний підпростір $\mathfrak{N}_\lambda$ пов'язаний рівністю $\mathfrak{N}_\lambda = J\tilde{\mathfrak{N}}_\lambda$.

Лема 1. Нехай $\lambda \in \pi_j(A)$. Тоді лінеали $\Delta_A(\lambda)$ і $\mathfrak{N}_\lambda$ лінійно незалежні.

Доведення. Якщо $y \in \Delta_A(\lambda) \cap \mathfrak{N}_\lambda$, то $y = (A - \lambda I)x$ ($x \in \mathfrak{D}_A$) і $y = x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$. Але тоді

$$[y, y] = [(A - \lambda I)x, x_\lambda] = 0$$

і, отже, $\|y\|_J = 0$. Але, за умовою, $\lambda \in \pi_j(A)$. Тому

$$0 = \|y\|_J = \|(A - \lambda I)x\|_J \geq K(\lambda)\|x\| \geq 0,$$

звідки випливає, що $x = 0$. Тому і $y = 0$, тобто $\Delta_A(\lambda) \cap \mathfrak{N}_\lambda = \{0\}$. ■

На підставі обгрунтованої леми при $\lambda \in \pi_j(A)$, J -ортогональна сума $\Delta_A(\lambda)[+]\mathfrak{N}_\lambda$ є скрізь щільним в $\mathcal{H}$ лінеалом.

Лема 2. Нехай $\mathfrak{D} = \mathcal{H}[-]\mathfrak{D}_A$ і $\lambda \neq \mu$. Тоді

$$\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}. \quad (7)$$

Доведення. Нехай $y \in \mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_\mu$. Тоді при $x \in \mathfrak{D}_A$

$$[(A - \lambda I)x, y] = [(A - \mu I)x, y] = 0, \quad (8)$$

і, отже,

$$[Ax, y] = \lambda[x, y] = \mu[x, y]. \quad (9)$$

За умовою $\lambda \neq \mu$. Тому

$$[Ax, y] = [x, y] = 0 \quad (\forall x \in \mathfrak{D}_A). \quad (10)$$

Таким чином, $y \in \mathcal{H}[-]\Delta_A = \mathfrak{N}_0$ і $y \in \mathfrak{D}$, тобто $y \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}$. Навпаки, якщо $y \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}$, то мають місце рівності (10), а, отже, і рівності (8). Але тоді $y \in \mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_\mu$. ■

Наслідок 1. При $\lambda \neq \mu$ підпростір $\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_\mu$ не залежить від λ і μ .

Лема 3. Дефектні підпростори $\mathfrak{N}_\lambda$ і $\mathfrak{N}_\mu$ ($\lambda \neq \mu$) лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли¹

$$\mathfrak{D}_A \vee \Delta_A = \mathcal{H}. \quad (11)$$

Доведення. Нехай $\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_A \vee \Delta_A$. Тоді, як неважко бачити,

$$\mathcal{H}[-]\mathcal{H}_1 = \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}. \quad (12)$$

Тому, на підставі (7) і (12), рівність $\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_\mu = \{0\}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. ■

Отже, на підставі попередньої леми, якщо оператор A щільно означений, то при довільних λ і μ ($\lambda \neq \mu$) його дефектні підпростори $\mathfrak{N}_\lambda$ і $\mathfrak{N}_\mu$ лінійно незалежні.

Наслідок 2. За умови (11) підпростори $\mathfrak{N}_\lambda$ і $\mathfrak{D}$ лінійно незалежні.

Доведення. Нехай $y \in \mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{D}$. Тоді для кожного x із $\mathfrak{D}_A$

$$[Ax, y] = [(A - \lambda I)x, y] = 0$$

і, отже, $y \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}$. А тому що, на підставі (11) і (12), $\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D} = \{0\}$, то $y = 0$. ■

3. Регулярні розширення J -ермітових операторів. Оператор $T_{\mu\lambda}$.

Означення. Оператор B називається регулярним розширенням J -ермітового оператора A , якщо $A \subset B$ і

$$[Ax, y] = [x, By] \quad (\forall x \in \mathfrak{D}_A, \forall y \in \mathfrak{D}_B). \quad (13)$$

Множину усіх регулярних розширень J -ермітового оператора A позначимо так: $\mathcal{P}_J(A)$. Таким чином, J -ермітові (зокрема, J -самоспряжені) розширення J -ермітового оператора A містяться в $\mathcal{P}_J(A)$.

Нехай $B \in \mathcal{P}_J(A)$ і $\lambda \notin \sigma_p(B)$. Розглянемо оператор $T_{\mu\lambda}$, означений у такий спосіб

$$T_{\mu\lambda}f = (B - \mu I)h \quad (f = (B - \lambda I)h, h \in \mathfrak{D}_B). \quad (14)$$

Отже, $\mathfrak{D}_{T_{\mu\lambda}} = \Delta_B(\lambda)$, $\Delta_{T_{\mu\lambda}} = \Delta_B(\mu)$. Зокрема, при $\lambda \in \varrho(B)$, $T_{\mu\lambda} = (B - \mu I)(B - \lambda I)^{-1}$. Відмітимо також, що при $\mu \notin \sigma_p(B)$, $T_{\mu\lambda}^{-1} = T_{\lambda\mu}$.

Теорема 1. Нехай $B \in \mathcal{P}_J(A)$, $\lambda \notin \sigma_p(B)$ і $\mathfrak{N}_z$ ($z \in \{\lambda, \mu\}$) – дефектний підпростір оператора A . Тоді

$$T_{\mu\lambda} : \Delta_B(\lambda) \cap \mathfrak{N}_\mu \rightarrow \mathfrak{N}_\lambda. \quad (15)$$

Зокрема, при $\lambda \in \varrho(B)$

$$T_{\mu\lambda} : \mathfrak{N}_\mu \rightarrow \mathfrak{N}_\lambda. \quad (16)$$

¹ $\mathcal{L} \vee \mathcal{M}$ означає замикання (у гільбертовій метриці) лінійної оболонки лінеалів $\mathcal{L}$ і $\mathcal{M}$.

Доведення. Нехай $f \in \Delta_B(\lambda) \cap \mathfrak{N}_\mu$. Тоді $f = (B - \lambda I)h$ ($h \in \mathfrak{D}_B$) і

$$[(A - \mu I)\varphi, f] = 0 \quad (\forall \varphi \in \mathfrak{D}_A). \quad (17)$$

При цьому, на підставі (14) $T_{\mu\lambda}f = f + (\lambda - \mu)h$, де $h \in \mathfrak{D}_B$. Тому при довільному $\varphi \in \mathfrak{D}_A$

$$[(A - \lambda I)\varphi, T_{\mu\lambda}f] = [(A - \lambda I)\varphi, f] + (\lambda - \mu)[(A - \lambda I)\varphi, h], \quad (18)$$

де, з урахуванням того, що $f \in \mathfrak{N}_\mu$,

$$[(A - \lambda I)\varphi, f] = [(A - \mu I)\varphi, f] + (\mu - \lambda)[\varphi, f] = (\mu - \lambda)[\varphi, f]. \quad (19)$$

Крім того, оскільки $B \in \mathcal{P}_J(A)$, то

$$[(A - \lambda I)\varphi, h] = [A\varphi, h] - \lambda[\varphi, h] = [\varphi, Bh] - \lambda[\varphi, h] = [\varphi, (B - \lambda I)h] = [\varphi, f]. \quad (20)$$

Підставляючи (19) і (20) в (18), отримаємо:

$$[(A - \lambda I)\varphi, T_{\mu\lambda}f] = (\mu - \lambda)[\varphi, f] + (\lambda - \mu)[\varphi, f] = 0 \quad (\forall \varphi \in \mathfrak{D}_A)$$

і, отже, $T_{\mu\lambda}f \in \mathfrak{N}_\lambda$. Співвідношення (16) впливає безпосередньо із (15) при $\lambda \in \varrho(B)$. ■

4. Аналог формул фон Неймана. Нехай A – ермітів оператор, що діє в J -просторі $\mathcal{H}$. Оператор $B \in \mathcal{P}_J(A)$ називається λ -регулярним розширенням оператора A , якщо:

- 1) Лінеали $\Delta_A(\lambda)$ і $\mathfrak{N}_\lambda$ лінійно незалежні.
- 2) $\Delta_B(\lambda) \subset \Delta_A(\lambda)[+] \mathfrak{N}_\lambda$.

Умова 1), зокрема, справедлива, якщо $\lambda \in \pi_J(A)$ (лема 1), а умова 2) – якщо $\Delta_A(\lambda)$ – проекційно повний підпростір в $\mathcal{H}$.

Теорема 2. Нехай B – λ -регулярне розширення ермітового оператора A , $\lambda \notin \sigma_p(B)$ і $\text{Im } \lambda \neq 0$. Тоді довільний вектор x із $\mathfrak{D}_B$ допускає зображення у вигляді

$$x = x_0 + x_\lambda + \Phi x_\lambda, \quad (21)$$

де $x_0 \in \mathfrak{D}_A$, $x_\lambda \in \mathfrak{D}_\Phi$, а Φ – деякий лінійний оператор, що діє із $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathcal{H}$. При цьому оператор B діє за формулою

$$B(x_0 + x_\lambda + \Phi x_\lambda) = Ax_0 + \bar{\lambda}x_\lambda + \lambda\Phi x_\lambda \quad (22)$$

і, крім того, многовиди $\mathfrak{D}_A$ і $(\Phi + I)\mathfrak{D}_\Phi$ лінійно незалежні.

Доведення. Нехай $y \in \Delta_B(\lambda)$. Тоді $y = y_0 + y_1$, де $y_0 \in \Delta_A(\lambda)$, $y_1 \in \mathfrak{N}_A(\lambda)$ і, отже,

$$\begin{aligned} y_0 &= (A - \lambda I)x_0 = (B - \lambda I)x_0 & (x_0 \in \mathfrak{D}_A), \\ y_1 &= (B - \lambda I)x_1 & (x_1 \in \mathfrak{D}_B). \end{aligned}$$

Але тоді

$$y = (B - \lambda I)x = (B - \lambda I)(x_0 + x_1) \quad (x \in \mathfrak{D}_B).$$

При цьому $\lambda \notin \sigma_p(B)$. Тому $x = x_0 + x_1$.

Нехай $\mu = \bar{\lambda}$ і $T_\lambda := T_{\bar{\lambda}}$. Тоді, на підставі (14),

$$T_\lambda y = (B - \bar{\lambda} I)x \quad (y = (B - \lambda I)x).$$

Із останніх двох рівностей знаходимо:

$$x = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(T_\lambda y - y), \quad Bx = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(\lambda T_\lambda y - \bar{\lambda} y). \quad (23)$$

А оскільки $y = y_0 + y_1$, то

$$x = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(T_\lambda y_0 - y_0) + \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda}y_1 + \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}T_\lambda y_1. \quad (24)$$

При цьому $y_0 = (A - \lambda I)x_0$ ($x_0 \in \mathfrak{D}_A$), $y_1 \in \mathfrak{N}_\lambda$ і, отже,

$$\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(T_\lambda y_0 - y_0) = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}[(A - \bar{\lambda} I)x_0 - (A - \lambda I)x_0] = x_0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda}f_1 = x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda, \quad \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}T_\lambda f_1 = -T_\lambda x_\lambda = \Phi x_\lambda, \quad (26)$$

де $\Phi = -T_\lambda|_{\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{D}_{T_\lambda}}$. Таким чином, на підставі рівностей (24)–(26), вектор x із $\mathfrak{D}_B$ можна подати у вигляді (21).

Враховуючи другу рівність із (23), робимо висновок, що вектор Bx допускає зображення у вигляді

$$Bx = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(\lambda T_\lambda y_0 - \bar{\lambda} y_0) + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda}y_1 + \frac{\lambda}{\lambda - \bar{\lambda}}T_\lambda y_1, \quad (27)$$

де

$$\lambda T_\lambda y_0 - \bar{\lambda} y_0 = \lambda(A - \bar{\lambda} I)x_0 - \bar{\lambda}(A - \lambda I)x_0 = (\lambda - \bar{\lambda})Ax_0 \quad (28)$$

і, отже, на підставі (27), (28) і (26), вектор Bx можна подати у вигляді (22).

Покажемо тепер, що лінеали $\mathfrak{D}_A$ і $(\Phi + I)\mathfrak{D}_\Phi$ лінійно незалежні. Справді, припустимо, що $x_0 \neq 0$, $x_\lambda \neq 0$ і

$$\alpha x_0 + \beta(\Phi + I)x_\lambda = 0 \quad (x_0 \in \mathfrak{D}_A, x_\lambda \in \mathfrak{D}_\Phi). \quad (29)$$

Застосовуючи до обох частин рівності (29) оператор B , отримаємо, з урахуванням рівності (22), що

$$\alpha Ax_0 + \beta(\lambda \Phi x_\lambda + \bar{\lambda} x_\lambda) = 0. \quad (30)$$

Але тоді, на підставі (29) і (30),

$$\alpha(A - \lambda I)x_0 + \beta(\bar{\lambda} - \lambda)x_\lambda = 0,$$

звідки випливає, що $\alpha = \beta = 0$ (тому що $\text{Im } \lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma_p(A)$, $(A - \lambda I)x_0 \in \Delta_A(\lambda)$, $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ і лінеали $\Delta_A(\lambda)$ і $\mathfrak{N}_\lambda$ лінійно незалежні). ■

Теорема 3. Нехай оператор Φ означається теоремою 2. Тоді

$$[(A - \lambda I)x, \Phi y_\lambda] = (\bar{\lambda} - \lambda)[x, y_\lambda] \quad (x \in \mathfrak{D}_A, y_\lambda \in \mathfrak{D}_\Phi). \quad (31)$$

Крім того, якщо виконується умова (11), то лінеали $\mathfrak{N}_\lambda$ і Δ_Φ лінійно незалежні.

Доведення. Нехай $x \in \mathfrak{D}_A$,

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_\lambda + \Phi y_\lambda \in \mathfrak{D}_B, \\ By &= Ay_0 + \bar{\lambda}y_\lambda + \lambda\Phi y_\lambda. \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи рівність $[Ax, y_\lambda] = \lambda[x, y_\lambda]$, отримаємо, що

$$0 = [Ax, y] - [x, By] = [(A - \lambda I)x, \Phi y_\lambda] - (\bar{\lambda} - \lambda)[x, y_\lambda],$$

що і доводить рівність (31).

Припустимо, що $h \in \mathfrak{N}_\lambda \cap \Delta_\Phi$. Тоді $h = \Phi \tilde{y}_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ і, отже, ліва, а значить, і права частина рівності (31) дорівнює нулю.

Таким чином, $[x, \tilde{y}_\lambda] = 0$ ($\forall x \in \mathfrak{D}_A$), тобто вектор $\tilde{y}_\lambda$ J -ортогональний лінеалу $\mathfrak{D}_A$. Крім того, $[Ax, \tilde{y}_\lambda] = \lambda[x, \tilde{y}_\lambda] = 0$. Тому вектор $\tilde{y}_\lambda$ J -ортогональний також і лінеалу Δ_A . Якщо при цьому має місце рівність (11), то вектор $\tilde{y}_\lambda$ J -ортогональний усьому простору $\mathcal{H}$. Але тоді $\tilde{y}_\lambda = 0$, тобто $h = 0$. Таким чином, при виконанні умови (11), $\mathfrak{N}_\lambda \cap \Delta_\Phi = \{0\}$. ■

Наслідок. За умови (11) точковий спектр у оператора Φ відсутній.

Теорема 4. Якщо довільний вектор x із $\mathfrak{D}_B$ допускає зображення у вигляді (21) і оператор B діє за формулою (22), де Φ – деякий лінійний оператор, що діє із $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathcal{H}$, задовольняє умову (31) і такий, що лінеали $\mathfrak{D}_A$ і $(\Phi + I)\mathfrak{D}_\Phi$ лінійно незалежні, то $B \in \mathcal{P}_J(A)$.

Доведення. Із (22) випливає, що $A \subset B$. Що стосується рівності

$$[Ax, y] = [x, By] \quad (x \in \mathfrak{D}_A, y \in \mathfrak{D}_B),$$

то, з урахуванням рівностей (21), (22) і (31), вона перевіряється безпосередньо. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Neumann J. *Allgemeine Eigenwerte Hermitescher Funktional-operatoren* // Math. Ann. 1929. Vol.102. S.49–131.
2. Красносельський М.А. *О самоспряженных расширениях эрмитовых операторов* // Укр. мат. журн. 1949. №1. С.21–38.
3. Цекановский Э.Р., Шмудьян Ю.Л. *Вопросы теории расширения неограниченных операторов в оснащенных гильбертовых пространствах* // Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. / ВИНТИ. 1977. 14. С.59–100.
4. Кужель А.В. *Расширения эрмитовых операторов*. – Киев: Выща шк., 1989. 56с.
5. Кужель А.В., Руденко Л.И. *Правильные расширения эрмитовых и изометрических операторов* // Функцион. анализ и его прил. 1982. №1. С.74–75.

6. Кужель А.В. *Правильные расширения эрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой* // Докл. АН СССР. 1982. Т.265. №5. С.1059–1061.
7. Жихарь Н.А. *К теории расширений J -симметрических операторов* // Укр. мат. журн. 1959. Т.11, №4. С.352–365.
8. Galindo A. *On the existence of J -self-adjoint extensions of symmetric operators with adjoint* // Comm. Pure Appl. Math. 1962. Vol.15. P.423–425.
9. Макарова А.Д. *О J -симметрических операторах с неплотной областью определения* // Волжск. матем. сб., сер. Функц. анализ и теория функц. 1969. Т.10. С.77–83.
10. Райх А.Н. *О расширениях J -эрмитова оператора с неплотной областью определения* // Матем. заметки. 1975. Т.17. №5. С.737–743.
11. Кочубей А.Н. *О расширениях J -симметрических операторов* // Теор функций, функ. анализ и их прил. 1979. Вып.31. С.74–80.
12. Сергеев А.С., Цекановский Э.Р. *Вещественные эрмитовы операторы с неплотной областью определения и их вещественные самоспряженные расширения* // Функцион. анализ и теор. операторов, Ульяновск. 1988. С.100–110.

Україна, 333 025 Сімферополь, вул.Ростовська, 30/13, кв.14

Надійшло 26.10.1995