

УДК 517.9

О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ НЕПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА

Ф.С. РОФЕ-БЕКЕТОВ, Х. КАЛЬФ

Профессору В.Э. Лянце по случаю его 75-летия

F.S. Rofo-Beketov, H. Kalf. *On self-adjointness of nonsemibounded Schrödinger operators*, Matematychni Studii, **7**(1997) 53–58.

Results by Simader and Brèzis on the global essential self-adjointness as a consequence of the local essential self-adjointness are generalized to nonsemibounded Schrödinger operators.

В работе устанавливаются глобальные оценки энергетического типа и с их помощью – условия существенной самосопряженности для неполуограниченных операторов Шредингера. Отправным пунктом для нас являются: операторное неравенство вида, впервые введенного в [1] (см. также [2, стр. 348]), локальные энергетические неравенства и предположение о так называемой локальной существенной самосопряженности рассматриваемого оператора. Последнее понятие введено в [3], а в качестве условия, заменяющего конкретное описание локальных свойств потенциала, оно используется впервые, повидимому, в [4] (см. также [5]). Форма локальных условий, используемых нами, заимствована из [6] (см. также [7]). Мы покажем, что наша теорема 2, которая для непрерывного сферически симметричного потенциала была установлена в [1], с некоторой стороны обобщает известную теорему Фари-Лавина¹ (1974 г.; [8, стр. 222]). При более жестких локальных ограничениях на потенциал результаты настоящей статьи содержатся в [9].

Пусть $q \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – вещественнозначная функция и оператор

$$L = -\Delta + q, \quad D(L) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) [= C_0^\infty(\mathbb{R}^n)] \quad (1)$$

удовлетворяет следующим условиям. Существуют числа $\varepsilon > 0$, $K \geq 0$, $K_1 > 0$ и функция $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$,

$$|Q^{-1/2}(x) - Q^{-1/2}(\xi)| \leq K_1|x - \xi| \quad (2)$$

такие, что

$$L \geq L_{\varepsilon K} := -\varepsilon\Delta - K\mathcal{Q},$$

то есть

$$(L\varphi, \varphi) \geq (L_{\varepsilon K}\varphi, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (3)$$

или

$$\int [|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2] dx \geq \int [\varepsilon|\nabla\varphi|^2 - K\mathcal{Q}|\varphi|^2] dx.$$

1991 *Mathematics Subject Classification*. 35J10, 35B45, 47F05.

¹W. Faris and R. Lavine.

Предположим дополнительно, что при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такие $\eta \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^n)$, где $\eta = 1$ вблизи x_0 , и $\delta > 0$, C , что

$$-\Delta + q\eta \geq \delta(-\Delta + q_+\eta) - C \text{ на } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (4)$$

$$(-\Delta + q\eta)|C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ существенно самосопряжен в } L^2. \quad (5)$$

При перечисленных условиях справедлива следующая

Теорема 1. *Для каждого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ существует $C_1 = C_1(\varepsilon_1, \varepsilon, K, K_1)$ такое, что*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{Q}^{-1}L_{\max}u, u) \geq \varepsilon_1\|\mathcal{Q}^{-1/2}\nabla u\|^2 - C_1\|u\|^2 \quad (6)$$

при любом $u \in D(L_{\max})(= D(L^*))$.

Следствие 1. *Для любого $\varepsilon_2 > 0$ найдется $c_2 > 0$ такое, что*

$$\|(\mathcal{Q}^{-1}\nabla u)\|^2 \leq \varepsilon_2\|L^*u\|^2 + C_2\|u\|^2, \quad u \in D(L_{\max}). \quad (7)$$

((6) и (7) суть неравенства типа Гординга)

Замечание 1. При $\varepsilon = 0$ в (3), $\int \mathcal{Q}^{-1}|\nabla u|^2 dx$ может расходиться [9].

Теорема 2. *В дополнение к условиям теоремы 1, пусть существуют такие кусочно-гладкая функция $P : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $P(x) \rightarrow \infty$, $(|x| \rightarrow \infty)$, и последовательность $0 < N_k \uparrow \infty$, $(k \rightarrow \infty)$, что*

$$|\nabla P(x)| \leq \operatorname{const} \cdot N_k \mathcal{Q}^{-1/2}(x), \quad (x \in \Omega_k), \quad (8)$$

где $\Omega_k := \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) < N_k\}$, $(k \in \mathbb{N})$. Тогда оператор (1) существенно самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и интеграл Дирихле, отвечающий (1),

$$D_q[u, v] := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} \left(1 - \frac{P}{N_k}\right)^\gamma (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + q u \bar{v}) dx, \quad (9)$$

существует при всех $u, v \in D(L_{\max})$ в смысле суммирования с ядром

$$\psi_k(x) = [(1 - P(x)/N_k)_+]^\gamma, \quad \gamma \geq 1,$$

причем

$$D_q[u, v] = (L_{\max}u, v). \quad (10)$$

Поэтому значение $D_q[u, v]$ (9) не зависит от $\gamma \geq 1$ и от выбора функции P и последовательности N_k , удовлетворяющих условиям теоремы.

Замечание 2. Суммирующее ядро в (9) не может быть опущено в общем случае. Это видно из примера, построенного в [10] для одномерного случая.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ – открытая область и $q \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ – вещественнозначная функция. Тогда*

$$-\int_{\Omega} \bar{v} \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx$$

для всех пар $u, v \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$, таких, что $\sqrt{|q|}(|u| + |v|) \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, $lu \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, если u или v имеет компактный носитель в Ω . (Здесь дифференциальное выражение

$$l := -\Delta + q,$$

H_{loc}^1 – локальное пространство Соболева).

Эта лемма есть слегка модифицированный вариант теоремы 2 из [11] и вытекает из того замечания, что для доказательства названной теоремы 2 достаточно, чтобы выполнялись результаты, а не условия теоремы 1 из [11]. Это – обобщение теоремы Гаусса-Остроградского.

Лемма 2. Пусть q такова, что выполнены условия (4) и (5). Тогда, если $u \in D(L_{\max})$, то

$$u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n), \quad q_+|u|^2 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n), \quad q|u|^2 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. При некотором $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$-\Delta u + qu = f$$

в смысле распределений над $\mathcal{D}(R^n)$. Исходя из этого равенства первые два включения с использованием леммы 2 из [6] доказываются аналогично шагу 1 из [6, Step 1], с той лишь разницей, что там $f = -u$. Третье (последнее) включение следует из первых двух, если положить $v = \varphi u$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \varphi \subset \{x; \eta(x) = 1\}$, $\varphi(x_0) = 1$ и учесть, применительно к v , условие (4) и произвольность $x_0 \in \mathbb{R}^n$. (Ср. с леммой 1 из [6]).

Доказательство теоремы 1. Обозначим при $N > 0$ срезку вещественнозначной функции

$$v^{[N]}(x) = \begin{cases} v(x), & |v(x)| \leq N, \\ N \text{ sign } v(x), & |v(x)| > N, \end{cases}$$

и положим при любом $u \in D(L_{\max})$

$$u^{[N]} := (\text{Re } u)^{[N]} + i(\text{Im } u)^{[N]}$$

и

$$u_\delta^{[N]} := (u^{[N]})_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где $f_\delta(x)$ есть усреднение функции f путем свертки с ядром из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, имеющим носитель в шаре с центром x_0 и радиусом δ . Обозначим также

$$u_{R,\delta}^{[N]} := \varphi_R u_\delta^{[N]} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где φ_R имеет следующие свойства: $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_R(x) = 0$, $(|x| \geq R)$; $0 \leq \varphi_R \leq \mathcal{Q}^{-1/2} \leq 1$, $|\nabla \varphi_R| \leq K_2 = K_2(K_1)$; $\varphi_R(x) \rightarrow \mathcal{Q}^{-1/2}(x)$ локально равномерно по x при $R \rightarrow \infty$. Такая φ_R построена в [12].

В силу (3) и обычной теоремы Гаусса-Остроградского имеем:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{R,\delta}^{[N]}\|^2 &= -(\Delta u_{R,\delta}^{[N]}, u_{R,\delta}^{[N]}) = \varepsilon^{-1}((L_{\varepsilon K} + K\mathcal{Q})u_{R,\delta}^{[N]}, u_{R,\delta}^{[N]}) \leq \\ &\leq \varepsilon^{-1}(Lu_{R,\delta}^{[N]}, u_{R,\delta}^{[N]}) + \varepsilon^{-1}K\|u\|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{R,\delta}^{[N]}\|^2 &\geq \|\varphi_R \nabla u_\delta^{[N]}\|^2 - 2\|u_\delta^{[N]} \nabla \varphi_R\| \cdot \|\varphi_R \nabla u_\delta^{[N]}\| \geq \\ &\geq (1 - \alpha^2)\|\varphi_R \nabla u_\delta^{[N]}\|^2 - \alpha^{-2}K_2^2\|u_\delta^{[N]}\|^2, \quad (\alpha > 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Но

$$\overline{u_{R,\delta}^{[N]}} Lu_{R,\delta}^{[N]} = \varphi_R^2 u_\delta^{[N]} l u_\delta^{[N]} + |u_\delta^{[N]} \nabla \varphi_R|^2 + 2i \text{Im}(u_\delta^{[N]} \nabla \varphi_R \cdot \varphi_R \nabla \overline{u_\delta^{[N]}}) - \nabla(|u_\delta^{[N]}|^2 \varphi_R \nabla \varphi_R),$$

откуда, в силу обычной теоремы Гаусса-Остроградского и свойств φ_R следует

$$(Lu_{R,\delta}^{[N]}, u_{R,\delta}^{[N]}) \leq \text{Re}(\varphi_R^2 l u_\delta^{[N]}, u_\delta^{[N]}) + K_2^2\|u_\delta^{[N]}\|^2.$$

Это вместе с (11), (12) дает

$$\operatorname{Re}(\varphi_R^2 l u_\delta^{[N]}, u_\delta^{[N]}) \geq \varepsilon_1 \|\varphi_R \nabla u_\delta^{[N]}\|^2 - C_1 \|u\|^2, \quad (13)$$

где $\varepsilon_1 = (1 - \alpha^2)\varepsilon$, $C_1 = K + (1 + \varepsilon\alpha^{-2})K_2^2$. Так как, по лемме 2, $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, то мы имеем

$$\|\varphi_R \nabla u_\delta^{[N]}\|^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \|\varphi_R \nabla u^{[N]}\|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \|\varphi_R \nabla u\|^2.$$

С другой стороны, снова используя обычную теорему Гаусса-Остроградского, а затем лемму 1 с $v = \varphi_R^2 u$, $\Omega = \mathbb{R}^n$, условия которой обеспечены леммой 2, имеем

$$\begin{aligned} (\varphi_R^2 l u_\delta^{[N]}, u_\delta^{[N]}) &= \int \nabla u_\delta^{[N]} \cdot \nabla (\varphi_R^2 \overline{u_\delta^{[N]}}) dx + (\varphi_R^2 q u_\delta^{[N]}, u_\delta^{[N]}) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \int \nabla u \cdot \nabla (\varphi_R^2 \bar{u}) dx + (\varphi_R^2 q u, u) = - \int \varphi_R^2 \bar{u} \Delta u dx + (\varphi_R^2 q u, u) = (\varphi_R^2 l u, u), \end{aligned}$$

и (13) дает

$$\operatorname{Re}(\varphi_R^2 l u, u) \geq \varepsilon_1 \|\varphi_R \nabla u\|^2 - C_1 \|u\|^2.$$

Отсюда при $R \rightarrow \infty$ мы получаем (6), и теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать (9), (10) для $u, v \in D(L_{\max})$, откуда следует

$$(lu, v) = D_q[u, v] = \overline{D_q[v, u]} = \overline{(lv, u)} = (u, lv),$$

то есть симметричность оператора $L_{\max} = (L_{\min})^*$.

В силу леммы 2 и суммируемости $\bar{v}lu$ на оси, существует интеграл

$$I_k := \int \psi_k [\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + q u \bar{v} - \bar{v} l u] dx = \int \psi_k [\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + \bar{v} \Delta u] dx,$$

где $\psi_k := [(1 - P/N_k)_+]^\gamma$ и достаточно доказать, что $I_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу леммы 1 с $\psi_k v$ вместо v и $\Omega = \mathbb{R}^n$, имеем

$$\int \psi_k \bar{v} \Delta u dx = - \int \nabla u \cdot \nabla (\psi_k \bar{v}) dx = - \int \psi_k \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx - \int \bar{v} \nabla u \cdot \nabla \psi_k dx$$

и потому

$$l_k = - \int \bar{v} \nabla u \cdot \nabla \psi_k dx = \gamma N_k^{-1} \int_{\Omega_k} (1 - P/N_k)^{\gamma-1} \bar{v} \nabla u \cdot \nabla P dx.$$

Учитывая (8) и (7), применим здесь неравенство Буняковского-Шварца. Это дает

$$|I_k|^2 \leq \text{const} \cdot \|v\|^2 \left\{ N_m^2 N_k^{-2} \int_{\Omega_m} \mathcal{Q}^{-1} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_m} \mathcal{Q}^{-1} |\nabla u|^2 dx \right\} \rightarrow 0$$

при $N_k \geq N_m^2 \rightarrow \infty$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и выполнены условия теоремы 1. Тогда при

$$\int_0^\infty \mathcal{Q}^{-1/2}(r)dr = \infty \quad (14)$$

теорема 2 справедлива с

$$P(x) = \int_0^{|x|} \mathcal{Q}^{-1/2}(r)dr, \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(Случай неубывающей $\mathcal{Q}(r)$ сводится к рассмотренному, как показано в [1].)

Следствие 3. Пусть $\mathcal{Q}$ и P такие, как в теореме 2. И пусть вещественнозначные измеримые функции q_1 и q_2 удовлетворяют условиям:

- 1) $q_1 \geq -K\mathcal{Q}$ при некотором $K \geq 0$, $q_1 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, и
- 2) $q_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ с $p \geq 2$ при $n \leq 3$, $p > 2$ при $n = 4$, $p \geq n/2$ при $n \geq 5$. Тогда $-\Delta + q_1 + q_2$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. (В частности, если $\mathcal{Q}(x) = |x|^2 + 1$, мы получаем первое следствие теоремы Фари-Лавина из [8, стр.223]).

Доказательство. При любом $a > 0$ найдется такое $C = C(a) > 0$, что $-\Delta + q_2 \geq -C$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. теоремы X.20, X.21 и следствие, X.18 и доказательство теоремы X.15 из [8]). Если $\varepsilon = 1 - a > 0$, имеем также

$$-\Delta + q_1 + q_2 \geq -\varepsilon\Delta - K\mathcal{Q} - C \geq -\varepsilon\Delta - (K + C)\mathcal{Q}.$$

В силу теоремы 2, $-\Delta + q_1 + q_2$ существенно самосопряжен.

Сравним теперь теорему 2 непосредственно с теоремой Фари-Лавина [3, теорема X.38]. Пусть $q = V + W$, где $V, W \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, и пусть q удовлетворяет условиям (4), (5). Если, в соответствии с условиями теоремы Фари-Лавина, $V \geq -cx^2 - d$ и $-\Delta + W \geq -C$ при некотором $a < 1$, то

$$-\Delta + q = (-\Delta + W) - (1 - a)\Delta + V \geq -\varepsilon\Delta - c|x|^2 - (C + d)$$

на $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, в силу нашего следствия 2, оператор $-\Delta + q$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ без дополнительного требования существенной самосопряженности на $\mathcal{D}$ оператора $-\Delta + V + W + 2cx^2$, которое содержится в условиях теоремы Фари-Лавина. (Последнее, впрочем, удовлетворено здесь тоже в силу следствия 2.)

Отметим, что если V и W непрерывны, то условия (4) и (5) выполняются автоматически, и в этом случае наша теорема 2 сводится к теореме 3 из [12] и следствие 2 превращается в теорему 1 из [1]. (Условия (4) и (5) выполнены также, если q^- удовлетворяет условию 2) следствия 3. См., например, теорему X.29 из [8].) В случае локально ограниченного комплекснозначного потенциала аналог теоремы 1 содержится в [9, теорема 1].

В заключение приведем пример, показывающий, что наша теорема 2 может давать результат в случае, когда теорема Фари-Лавина неприменима.

Пример. Пусть $q(x) = -\mathcal{Q}(|x|)$, где

$$\mathcal{Q}^{-1/2}(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } 4m - 1 \leq r \leq 4m, m = 0, 1, 2, \dots \\ r^{-10}, & \text{при } 4m + 1 \leq r \leq 4m + 2, \\ \text{линейна,} & \text{при остальных значениях } r \geq 0. \end{cases}$$

Тогда $q(x)$ непрерывна и (14) удовлетворено. По следствию 2, $-\Delta + q$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, однако условия теоремы Фари-Лавина не выполнены. Теорема 2 позволяет устанавливать существенную самосопряженность оператора L также в случае, когда q подчинен соответствующим ограничениям лишь на последовательности замкнутых телесных слоев (Ср. [12, теорема 2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рофе-Бекетов Ф.С. *О неполуограниченных дифференциальных операторах* // Теория функций, функц. анализ и их прилож.: Республ. научн. сб. Харьков, 1966, вып.2. С.178–184.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*: 2-е изд., переработ. и дополн., с добавлением В.Э. Лянце. – М.: Наука, 1969. 528с.
3. Kreith K. *Local essential self-adjointness for singular elliptic operators* // SIAM J. Appl. Math. 1970. 19. №1. P.51–55.
4. Орочко Ю.Б. *Замечание о существенной самосопряженности оператора Шредингера с сингулярным потенциалом* // Матем. заметки. 1976. 20, №4. С.571–580.
5. Левитан Б.М., Отелбаев М. *Об условиях самосопряженности операторов Шредингера и Дирака* // Тр. Моск. мат. об-ва. 1981. 42. С.142–159.
6. Brézis H. *“Localized” self-adjointness of Schrödinger operators* // J. operator theory. 1979. 1, №2. P.287–290.
7. Simader C.G. *Essential self-adjointness of Schrödinger operators bounded from below* // Math. Z. 1978. 159, №1. P.47–50.
8. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность*. – М.: Мир, 1978. 395с.
9. Рофе-Бекетов Ф.С. *Самосопряженность эллиптических операторов и оценки энергетического типа во всем $\mathbb{R}^n$. 1. Второго порядка* // Теория функций, функц. анализ и их прилож.: Республ. научн. сб. Харьков. 1990. вып.54. С.3–16.
10. Everitt W.N., Giertz M, and McLeod J.B. *On the strong and weak limit-point classification of second-order differential expressions* // Proc. London Math. Soc. (3). 1974. 29. P.142–158.
11. Kalf H. *Gauss’s theorem and the self-adjointness of Schrödinger operators* // Ark. Mat. 1980. 18, №1. P.19–47.
12. Рофе-Бекетов Ф.С. *Условия самосопряженности оператора Шредингера* // Матем. заметки. 1970. 8, №6. С.741–751.

Ф.С. Рофе-Бекетов, Физико-технический институт низких температур,
310164, г.Харьков, просп. Ленина, 47
Hubert Kalf, Mathematisches Institut Universität München,
Theresienstraße, 39, D-80333 München BRD

Получено 1.12.1995.