

УДК 517.5

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ЗГОРТКИ В ОДНОМУ КЛАСІ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ В ПІВСМУЗІ

Б.В. Винницький

Присвячую 75-річчю від дня народження В.Е. Лянце

B.V. Vinnitsky. *On solutions of homogeneous convolution equation in one class of functions analytical in a semistrip*, Matematychni Studii, **7**(1997) 41–52.

Sufficient conditions are found, under which the function f from Hardy-Smirnov space E^e in the semistrip $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$, $0 < \sigma < +\infty$, is a solution of the equation $\int_{\partial D_\sigma} f(w + \tau)g(w)dw = 0$, where $\tau \leq 0$ and g belongs to E^2 on $\operatorname{ext} \partial D_\sigma$.

Нехай $\mathcal{D}_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$, $0 < \sigma < +\infty$, $\mathcal{D}_\sigma^* = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}_\sigma}$, а $E^p[\mathcal{D}_\sigma]$ і $E_*^p[\mathcal{D}_\sigma]$, $1 \leq p < +\infty$, – простори функцій, аналітичних відповідно в $\mathcal{D}_\sigma$ і $\mathcal{D}_\sigma^*$, для яких

$$\sup \left\{ \int_\gamma |f(z)|^p |dz| \right\} < +\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ , які лежать відповідно в $\mathcal{D}_\sigma$ і $\mathcal{D}_\sigma^*$ (можна розглядати тільки ті відрізки γ , які паралельні принаймні одній із сторін $\partial \mathcal{D}_\sigma$). Функції f із цих просторів мають майже всюди (м.в.) на $\partial \mathcal{D}_\sigma$ кутові граничні значення (їх позначаємо через $f(z)$ і, отже, f природним чином визначена м.в. на $\partial \mathcal{D}_\sigma$), $f \in L^p(\partial \mathcal{D}_\sigma)$ і кожний із просторів $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ є повним [1] відносно норми

$$\|f\| = \left(\int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2}.$$

Мета статті – вказати достатні умови, при яких функція $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ є розв'язком рівняння

$$\int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} f(w + \tau)g(w)dw = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]. \quad (1)$$

В граничному випадку $\sigma = 0$ рівняння (1) перетворюється в рівняння

$$\int_{-\infty}^0 f(w + \tau)g(w)dw = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in L^2(-\infty, 0), \quad (2)$$

($f \in L^2(-\infty, 0)$) і тоді знайдені достатні умови збігаються з необхідними. Нехай $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}_-$ і $\mathbb{C}^-$ – відповідно права, верхня, ліва і нижня півплощини, а $H^p(\mathbb{C}_+)$ – простір Гарді [2] в $\mathbb{C}_+$. Відомо (див., наприклад, [3, с.78]) що для того щоб функція f із $L^2(-\infty, 0)$ була розв'язком рівняння (2), необхідно і досить, щоб значення функції

$$\Phi(iy) = \hat{F}(iy)\tilde{G}(iy),$$

де $\hat{F}(iy)$ і $\tilde{G}(iy)$ – кутові граничні значення на уявній осі відповідно функцій

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(w)e^{-zw}dw, \quad \tilde{G}(iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(w)e^{zw}dw,$$

для м.в. $y \in \mathbb{R}$ збігалися з кутовими граничними значеннями на уявній осі деякої функції $\Psi \in H^1(\mathbb{C}_+)$. Для дослідження рівняння (1) ми вводимо поняття перетворення Фур'є-Лапласа функції $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ та встановлюємо деякі аналоги рівності Парсеваля та теореми про згортку.

1. Нехай $L_\sigma^2(\mathbb{R})$ – клас цілих функцій експоненціального типу $\sigma_0 \leq \sigma$, квадрат модуля яких є сумовним на дійсній осі. Цей клас можна [4, с.663] також визначити як множину цілих функцій F_2 , для яких

$$\sup_{|\varphi| \leq \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F_2(re^{i\varphi})|^2 \exp(-2r\sigma|\sin \varphi|)dr \right\} < +\infty.$$

Далі, нехай $T_\sigma^2(\mathbb{C}_-)$ – множина всіх точок вигляду $F = (F_1, F_2, F_3)$, де $F_2 \in L_\sigma^2(\mathbb{R})$, $F_1(z) = f_1(z)e^{i\sigma z}$, $F_3(z) = f_3(z)e^{-i\sigma z}$, $f_1 \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $f_3 \in H^2(\mathbb{C}_-)$ і $F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) \equiv 0$ для $z \in \mathbb{C}_-$. Нарешті, нехай l_1 , l_3 і l_2 – сторони ∂D_σ (відповідно півпрямі із $\mathbb{C}^-$ і $\mathbb{C}^+$ та відрізок уявної осі, орієнтація яких узгоджена з додатнім обходом ∂D_σ).

Теорема 1. *Рівності*

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_j} f(w)e^{-zw}dw, \quad f \in E^2[D_\sigma], \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

задають взаємно однозначне відображення простору $E^2[D_\sigma]$ на $T_\sigma^2(\mathbb{C}_-)$ і справедлива двоїста формула

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F_1(iy)e^{iyw}dy + \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F_2(x)e^{wx}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 F_3(iy)e^{iyw}dy, \quad w \in D_\sigma. \quad (4)$$

Доведення. Якщо $\operatorname{Re} z < 0$, то $e^{-zw}f(w) \in E^1[D_\sigma]$ і тому [1]

$$\int_{\partial D_\sigma} e^{-zw}f(w)dw = 0,$$

звідки випливає, що

$$F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) \equiv 0$$

при $z \in \mathbb{C}_-$. Далі,

$$F_1(z) = \frac{e^{i\sigma z}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(u - i\sigma) e^{-zu} du := e^{i\sigma z} f_1(z) \quad (5)$$

і оскільки $f(u - i\sigma) \in L^2(-\infty, 0)$, то за теоремою Пелі-Вінера [5, с.20] $f_1 \in H^2(\mathbb{C}_-)$. Аналогічно, на основі теорем Пелі-Вінера переконуємось, що $F_2 \in L^2_\sigma(\mathbb{R})$ і $F_3(z) = f_3(z) e^{-i\sigma z}$, де $f_3 \in H^2(\mathbb{C}_-)$. Позначимо доданки із правої частини (4) через ψ_1 , ψ_2 і ψ_3 відповідно. Оскільки $F_1(iy) \exp(\sigma y) \in L^2(0, +\infty)$, то за теоремою Пелі-Вінера ψ_1 належить класу Гарді H^2 в півплощині $\{z : \operatorname{Im} z > -\sigma\}$. Аналогічно, ψ_3 належить H^2 в півплощині $\{z : \operatorname{Im} z < \sigma\}$ і $\psi_2 \in H^2(\mathbb{C}_-)$. Тому за лемою 5 із [1] функція $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ належить $E^2[D_\sigma]$ для будь-якої точки $F = (F_1, F_2, F_3) \in T_\sigma^2(\mathbb{C}_-)$. Залишилось показати, що $f = \psi$, якщо F визначена рівністю (3). За теоремою Пелі-Вінера для кутових граничних значень ψ_1 на l_1 справедлива рівність (інтеграл розуміється в L^2 -метриці)

$$\psi_1(u - i\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F_1(iy) e^{i(u-i\sigma)y} dy.$$

Функція ψ_2 аналітична поза відрізком $[-i\sigma, i\sigma]$ і її аналітичне продовження в півплощину $\{w : \operatorname{Im} w < -\sigma\}$ дається рівністю

$$\psi_2(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 F_2(iy) e^{iyw} dy.$$

Завдяки цьому

$$\psi_2(u - i\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 F_2(iy) e^{iy(u-i\sigma)} dy, \quad u < 0.$$

Функція ψ_3 аналітична в півплощині $\{w : \operatorname{Im} w < \sigma\}$ і

$$\psi_3(u - i\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 F_3(iy) e^{iy(u-i\sigma)} dy, \quad u < 0.$$

Але для м.в. $y \in \mathbb{R}$ виконується $F_2(iy) + F_3(iy) = -F_1(iy)$. Значить, кутові граничні значення функції ψ на l_1 м.в. рівні

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(iy) e^{iy(u-i\sigma)} dy.$$

З іншого боку, за теоремою Планшереля останній інтеграл рівний $f(u - i\sigma)$, $u < 0$. Аналогічно переконуємось, що кутові граничні значення ψ на $l_2 \cup l_3$ також м.в. рівні $f(w)$. Тому за лемою 4 із [1] $f = \psi$ (можна також скористатись теоремою Лузіна-Привалова [7, с.292] і не перевіряти рівність кутових граничних значень на $l_2 \cup l_3$). Теорему 1 доведено.

2. Визначене рівністю (3) відображення $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ на $T_\sigma^2(\mathbb{C}_-)$ назовемо перетворенням Фур'є-Лапласа.

Теорема 2. Нехай $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$. Тоді

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} f(w)g(w)dw = i \int_0^{+\infty} F_1(iy)G(iy)dy - \\ - i \int_{-\infty}^0 F_3(iy)G(iy)dy + \int_0^{+\infty} F_2(x)G(x)dx, \quad (7)$$

де $F = (F_1, F_2, F_3)$ – перетворення Фур'є-Лапласа функції f , а

$$G(w) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} g(z)e^{zw}dz. \quad (8)$$

Доведення. Вважаючи, що $f(u - i\sigma) = 0$ при $u > 0$ і використовуючи рівність Парсеваля для перетворення Фур'є, отримаємо

$$\int_{-\infty}^0 f(u - i\sigma)g(u - i\sigma)du = \int_{-\infty}^{+\infty} F_-(y)G_-(y)dy, \quad (9)$$

де

$$F_-(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(u - i\sigma)e^{-iyu}du, \quad G_-(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u - i\sigma)e^{iyu}du.$$

За теоремою Пелі-Вінера $F_-(y)$ для м.в. $y \in \mathbb{R}$ рівна кутовим граничним значенням на уявній осі функції (див. (5)) $F_1(z)e^{-i\sigma z}$. Далі, згідно з лемою 15 із [1]

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(x)e^{-xw}dx, \quad \operatorname{Re} w > 0,$$

і як показано в [1] при доведенні цієї леми

$$g(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(iy)e^{iyw}dy, \quad \operatorname{Im} w < -\sigma.$$

Тому

$$g(w - i\sigma)/i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(iy)e^{-\sigma y}e^{iyw}dy, \quad \operatorname{Im} w < 0.$$

Оскільки [1] $G(iy)\exp(-\sigma y) \in L^2(0, +\infty)$, то за теоремою Пелі-Вінера

$$G(iy)e^{-\sigma y} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u - i\sigma)e^{iyu}du, \quad y > 0,$$

і, значить, для м.в. $y > 0$ маємо $G_-(y) = iG(iy)e^{-\sigma y}$. Крім цього, із означення $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ випливає, що $g(w - i\sigma) \in H^2(\mathbb{C}^-)$. Тому за теоремою Пелі-Вінера [2, с.94] $G_-(y) = 0$ для м.в. $y < 0$. Отже, із (9) отримуємо

$$\int_{l_1} f(w)g(w)dw = i \int_0^{+\infty} G(iy)F_1(iy)dy. \quad (10)$$

Аналогічно,

$$\int_{-\infty}^0 f(u+i\sigma)g(u+i\sigma)du = \int_{-\infty}^{+\infty} F_+(y)G_+(y)dy, \quad (11)$$

де

$$F_+(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(u+i\sigma)e^{-iyu}du, \quad G_+(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u+i\sigma)e^{iyu}du.$$

Знову $G_+(y) = 0$ для м.в. $y > 0$ і

$$G_+(y) = -iG(iy)e^{\sigma y}, \quad F_+(y) = -F_3(iy)e^{-\sigma y}$$

для м.в. $y < 0$. Тому із (11) одержуємо

$$\int_{l_3} f(w)g(w) = -i \int_{-\infty}^0 G(iy)F_3(iy)dy. \quad (12)$$

Далі, вважаючи $f(iv) = 0$ при $|v| > \sigma$ і використовуючи рівність Парсеваля, отримуємо

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} f(iv)g(iv)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(x)G_0(x)dx,$$

де

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(iv)e^{-ixv}dv, \quad G_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(iv)e^{ivx}dx.$$

Але $g \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Значить, $G_0(x) = 0$ для м.в. $x < 0$ і $G_0(x) = G(x)$ для м.в. $x > 0$. Отже,

$$\int_{l_2} f(w)g(w)dw = \int_0^{+\infty} F_2(x)G(x)dx.$$

Звідси і із (12) та (10) одержуємо (7).

3. Нехай $1 \leq p < +\infty$ і $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$ – простори функцій, аналітичних в $\mathbb{C}(\alpha, \beta) := \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, для яких

$$\sup_{\alpha < \varphi < \beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |(P(re^{i\varphi}))|^p dr \right\} < +\infty.$$

Ці простори вивчалися в [6, с.414] та в [4,8,9]. Завдяки [10] основні їх властивості можна отримати із властивостей просторів Гарді в півплощині. Ми тільки відзначимо, що кожна функція $P \in E_0^p[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$ має м.в. на $\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta)$ кутові граничні значення і $P \in L^p(\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta))$. Крім цього, якщо $P \in E_0^1[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$, то [8]

$$\int_{\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta)} P(z)dz = 0. \quad (13)$$

Далі, нехай $0 < \sigma < +\infty$, $0 < \sigma_1 < +\infty$, $h_4(\varphi) = \sigma |\sin \varphi|$, $h_2(\varphi) = 2h_4(\varphi)$,

$$h_1(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \in [0; \pi/2], \\ 2\sigma |\sin \varphi|, & \varphi \in [-\pi/2; 0), \end{cases} \quad h_3(\varphi) = \begin{cases} 2\sigma |\sin \varphi|, & \varphi \in [0; \pi/2], \\ 0, & \varphi \in [-\pi/2; 0), \end{cases}$$

$$h_5(\varphi) = \begin{cases} \sigma_1 |\sin \varphi|, & \varphi \in [0; \pi/2], \\ \sigma |\sin \varphi|, & \varphi \in [-\pi/2; 0). \end{cases}$$

Позначимо через $H^p(\mathbb{C}_+, h_j)$, $j = \overline{1, 5}$, простори функцій, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|\Phi\|^p := \sup_{|\varphi| < \pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |\Phi(re^{i\varphi})|^p \exp(-prh_j(\varphi)) dr \right\} < +\infty.$$

Із аналогічних властивостей просторів $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$ випливає [8], що функції Φ із $H^p(\mathbb{C}_+, h_j)$ мають м.в. на уявній осі кутові граничні значення і

$$\Phi(iy) \exp(-yh_j(\pi/2)) \in L^p(0; +\infty), \quad \Phi(iy) \exp(yh_j(-\pi/2)) \in L^p(-\infty, 0).$$

Лема 1. Якщо $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, $g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $\mathcal{D}_\sigma(\tau) = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < \tau\}$, то для кожного $\tau \leq 0$ маємо

$$\int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} f(w + \tau) g(w) dw = \int_{\partial \mathcal{D}_\sigma(\tau)} f(w) g(w - \tau) dw = \int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} f(w) g(w - \tau) dw.$$

Справді, перша із цих рівностей є очевидною, а для доведення другої з них досить зауважити, що функція $\eta_\tau(w) = f(w)g(w - \tau)$ при будь-якому $\tau < 0$ є аналітичною в прямокутнику $\Delta_\tau = \{z : \tau < \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$ і належить в цьому прямокутнику класу Смирнова E_1 (це випливає безпосередньо із означень $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$). Значить, [7, с.205]

$$\int_{\partial \Delta_\tau} \eta_\tau(w) dw = 0$$

і на основі цього легко одержуємо потрібний висновок.

Теорема 3. Якщо $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$, то для будь-якого $\tau \leq 0$ виконується

$$\int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} f(w + \tau) g(w) dw = i \int_0^{+\infty} \Phi_1(iy) e^{i\tau y} dy -$$

$$- i \int_{-\infty}^0 \Phi_3(iy) e^{i\tau y} dy + \int_0^{+\infty} \Phi_2(x) e^{\tau x} dx,$$

де $F = (F_1, F_2, F_3)$ – перетворення Фур'є-Лапласа функції f , функція G визначена рівністю (8) і $\Phi_j = F_j G$, $j = 1, 2, 3$.

Справді, якщо $g_\tau(w) = g(w - \tau)$, то для будь-якого $\tau \leq 0$ маємо $g_\tau \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і завдяки лемі 1

$$\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} g_\tau(w) e^{wz} = e^{\tau z} G(z). \quad (14)$$

Тому потрібна рівність впливає із теореми 2.

Теорема 3 показує, що рівняння (1) рівносильне наступному рівнянню

$$i \int_0^{+\infty} \Phi_1(iy) e^{i\tau y} dy - i \int_{-\infty}^0 \Phi_3(iy) e^{i\tau y} dy + \int_0^{+\infty} \Phi_2(x) e^{\tau x} dx = 0. \quad (15)$$

Відзначимо також, що якщо $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$, то $\Phi_2 \in H^1(\mathbb{C}_+, h_2)$, $\Phi_1(iy) + \Phi_2(iy) + \Phi_3(iy) = 0$ для м.в. $y \in \mathbb{R}$, $\Phi_1(iy) \in L^1(0; +\infty)$, $\Phi_1(iy) e^{2\sigma y} \in L^1(-\infty, 0)$, $\Phi_3(iy) \in L^1(-\infty, 0)$, $\Phi_3(iy) e^{-2\sigma y} \in L^1(0; +\infty)$.

Теорема 4. Для того, щоб функція $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ була розв'язком рівняння (1) достатньо, щоб значення функцій $\Phi_1(iy)$ і $\Phi_3(iy)$ для м.в. $y \in \mathbb{R}$ були рівні відповідно кутовим граничним значенням деяких функцій $P_1 \in H^1(\mathbb{C}_+, h_1)$ і $P_3 \in H^1(\mathbb{C}_+, h_3)$ таких, що $P_1(z) + P_3(z) + \Phi_2(z) \equiv 0$ для $z \in \mathbb{C}_+$.

Доведення. Маємо $\Phi_2(x) = -P_1(x) - P_2(x)$ і завдяки теоремі 3 ліва частина (1) (позначимо її через $\mathcal{I}(\tau)$) дорівнює

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\tau) &= i \int_0^{+\infty} P_1(iy) e^{i\tau y} dy - i \int_{-\infty}^0 P_3(iy) e^{i\tau y} dy - \int_0^{+\infty} (P_1(x) + P_3(x)) e^{\tau x} dx = \\ &= - \int_{\partial\mathbb{C}(0; \pi/2)} P_1(z) e^{\tau z} dz + \int_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2; 0)} P_3(z) e^{\tau z} dz. \end{aligned}$$

Але $P_1 \in E_0^1[\mathbb{C}(0; \pi/2)]$ і $P_3 \in E_0^1[\mathbb{C}(-\pi/2; 0)]$. Значить, для кожного $\tau \leq 0$ маємо $P_1(z) e^{\tau z} \in E_0^1[\mathbb{C}(0; \pi/2)]$, $P_3(z) e^{\tau z} \in E_0^1[\mathbb{C}(-\pi/2; 0)]$. Тому за лемою 3 із [8] $\mathcal{I}(\tau) = 0$ для $\tau \leq 0$ і теорему 4 доведено.

Із доведення теореми 4 видно, що справедливою є також наступна

Теорема 5. Для того щоб функція $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ була розв'язком рівняння (1) достатньо, щоб значення функцій $\Phi_1(iy)$ і $\Phi_3(iy)$ для м.в. відповідно на додатному і від'ємному променях уявної осі були рівні кутовим граничним значенням таких функцій $P_1 \in E_0^1[\mathbb{C}(0; \pi/2)]$ і $P_3 \in E_0^1[\mathbb{C}(-\pi/2; 0)]$, для яких $P_1(x) + P_3(x) + \Phi_2(x) = 0$ для м.в. $x > 0$.

В зв'язку з теоремою 4 відмітимо наступне твердження.

Теорема 6. Для того щоб значення функції $f_0(iy)$, для якої $f_0(iy) e^{-\sigma_1 y} \in L^p(0; +\infty)$, $f_0(iy) e^{\sigma y} \in L^p(-\infty, 0)$, $0 \leq \sigma_1 < +\infty$, $0 \leq \sigma < +\infty$, $1 < p \leq 2$ для м.в. $y \in \mathbb{R}$ були рівні кутовим граничним значенням на уявній осі деякої функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+, h_5)$, необхідно і досить, щоб знайшлись такі дві функції $f_6 \in H^p(\mathbb{C}_+, h_6)$ і $f_7 \in H^p(\mathbb{C}_+, h_7)$, що $f_3(iy) := f_0(iy) + f_6(iy) \in L^p(-\infty, 0)$, $f_1(iy) := f_0(iy) + f_7(iy) \in L^p(0; +\infty)$ і для м.в. $\tau \leq 0$ виконується

$$\eta_1(\tau) + \eta_2(\tau) + \eta_3(\tau) = 0, \quad (16)$$

де $f_2 = f_6 - f_7$,

$$\begin{aligned} \eta_1(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f_1(iv) e^{i\tau v} dv, & \eta_2(\tau) &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{\tau u} du, \\ \eta_3(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f_3(iv) e^{i\tau v} dv, & h_6(\varphi) &= \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma) |\sin \varphi|, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ \sigma |\sin \varphi|, & -\pi/2 \leq \varphi < 0, \end{cases} \\ h_7(\varphi) &= \begin{cases} \sigma_1 |\sin \varphi|, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ (\sigma_1 + \sigma) |\sin \varphi|, & -\pi/2 \leq \varphi < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорему 6 можна отримати на основі теореми 1 із [8]. Проте, ми швидше прийдемо до мети, якщо прослідкуємо за її доведенням. Справді, якщо така функція f існує, то, враховуючи, що

$$f(z)e^{i\sigma_1 z} \in E_0^p[\mathbb{C}(0; \pi/2)], \quad f(z)e^{-i\sigma z} \in E_0^p[\mathbb{C}(-\pi/2; 0)],$$

на основі леми 4 із [8] одержуємо

$$\begin{aligned} & -i \int_0^{+\infty} f(iv)e^{-\sigma_1 v} e^{i\tau v} dv + \int_0^{+\infty} f(u)e^{i\sigma_1 u} e^{\tau u} du - \\ & -i \int_{-\infty}^0 f(iv)e^{\sigma v} e^{i\tau v} dv - \int_0^{+\infty} f(u)e^{-i\sigma u} e^{\tau u} du = 0. \end{aligned}$$

Взявши $f_6(z) = f(z)(e^{-i\sigma z} - 1)$, $f_7(z) = f(z)(e^{i\sigma_1 z} - 1)$ і враховуючи, що $f(iy) = f_0(iy)$ для м.в. $y \in \mathbb{R}$, отримуємо $f_0(iy) + f_6(iy) \in L^p(-\infty, 0)$, $f_0(iy) + f_7(iy) \in L^p(0, +\infty)$ і

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v} dv + \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f_3(iv)e^{i\tau v} dv = 0,$$

звідки випливає (16). Навпаки, якщо умови теореми 6 виконано, то як і при доведенні теореми 1 із [8] функція

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f_1(iv)}{iv - z} dv - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f_3(iv)}{iv - z} dv - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f_2(u)}{u - z} du - f_8(z),$$

де

$$f_8(z) = \begin{cases} f_7(z), & z \in \mathbb{C}(0; \pi/2), \\ f_6(z), & z \in \mathbb{C}(-\pi/2; 0), \end{cases}$$

задовольняє потрібні вимоги.

Зауважимо, що якщо $\sigma_1 = 0$ (або $\sigma = 0$), то (див. лему 4 із [8]) в теоремі 6 можна вважати, що $f_7 \equiv 0$ (відповідно $f_6 \equiv 0$). Якщо б достатню частину теореми 6 вдалось довести і у випадку $p = 1$, то тоді можна було б стверджувати, що умови теореми 4 є також необхідними, а сама теорема 4 була б доброю основою для подальшого аналізу рівняння (1).

4. З'ясуємо тепер, коли рівняння (1) має ненульовий розв'язок із $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ (функція $g(w) = 1/(w + 1)$ разом із лемою 4 із [1] показують, що для деяких $g \neq 0$ єдиним розв'язком із $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ рівняння (1) є функція $f \equiv 0$).

Лема 2. *Функція $f(w) = e^{\lambda w}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, тоді і тільки тоді є розв'язком рівняння (1), коли λ є нулем функції (8). Функція $f(w) = w^{m-1}e^{\lambda w}$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли в точці λ функція (8) має нуль порядку $k \geq m$.*

Перша частина цієї леми доводиться безпосередньою перевіркою. Далі, якщо функція (8) в точці λ має нуль порядку $k \geq m$, то

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} w^s g(w) e^{\tau w} dw = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq s \leq m-1, \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ & \beta \int_{\partial \mathcal{D}_\sigma} \tau^\nu g(w) e^{\lambda w} dw = 0, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \nu < +\infty, \quad \tau \leq 0, \end{aligned}$$

і завдяки цьому

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} (w + \tau)^{m-1} e^{\lambda(w+\tau)} g(w) dw = 0, \quad \tau \leq 0.$$

Навпаки, якщо функція $w^2 e^{\lambda w}$ (обмежуємось випадком $m = 3$, бо інші розглядаються подібно) є розв'язком рівняння (1), то

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} (w + \tau)^2 e^{\lambda(w+\tau)} g(w) dw = 0.$$

Тому $G''(\lambda) + 2\tau G'(\lambda) + \tau^2 G(\lambda) = 0$. Завдяки довільності $\tau \leq 0$ звідси послідовно отримуємо $G''(\lambda) = 0$, $G'(\lambda) = 0$ і $G(\lambda) = 0$.

Приклад 1. Якщо

$$G(z) = \frac{e^{-z \ln z}}{(1+z)^2}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2}, \quad (17)$$

де вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$ вибрана звичайним чином, то рівняння (1), в якому

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(x) e^{-wx} dx, \quad (18)$$

має ненульовий розв'язок $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$. Справді, $G \in H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$ і тому за лемою 15 із [1] $g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$. Крім цього, очевидно, g – ціла функція. Для кожного $w \in \overline{\mathcal{D}_\sigma}$ інтегрування в (18) по $[0; +\infty)$ можна [11, с.210] замінити інтегруванням по променю $\{z : z = e^{-wt}t, t \in [0; +\infty)\}$. Тому для $w \in \overline{\mathcal{D}_\sigma}$ маємо

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-e^{-wt} \ln t)}{(1 + e^{-wt})^2} dt,$$

звідки отримуємо, що

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\sup_{t \geq 0} \{-e^u \cos vt \ln t\}\right) \int_0^{+\infty} \frac{d(e^{-ut})}{1 + (e^{-ut})^2} \leq \\ &\leq 4 \exp(-e^{-u-1} \cos v), \quad w = u + iv \in \overline{\mathcal{D}_\sigma}. \end{aligned}$$

Нехай $f(w) = e^w \exp(-e^{-w-1})$. Тоді для $\tau \leq 0$

$$|f(w + \tau)g(w)| \leq 4e^\tau e^u \exp(-e^{-u-1}(e^{-\tau} - 1) \cos v) \leq 4e^\tau e^u,$$

звідки видно, що $f(w + \tau)g(w) \in E^1[\mathcal{D}_\sigma]$ для кожного $\tau \leq 0$ і, отже, за наслідком 3 із [1, с.493] така функція f є розв'язком рівняння (1).

Теорема 7. Рівняння (1) має ненульовий розв'язок $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ тоді і тільки тоді, коли сім'я функцій $\{g(w - \tau)\}$, $\tau \leq 0$, не є повною в $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$.

Справді, згідно з лемою 1 рівняння (1) рівносильне рівнянню

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} f(w)g(w - \tau)dw = 0, \quad \tau \leq 0. \quad (19)$$

Згідно з [1] простір, спряжений (сильно) до $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ можна ототожнити з $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, при цьому значення функціоналу $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ на елементі $g(w - \tau) \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ визначається лівою частиною рівності (19). Тому теорема 7 впливає безпосередньо із відомого критерію повноти С. Банаха.

Теорема 8. Рівняння (1) має ненульовий розв'язок $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ тоді і тільки тоді, коли сім'я функцій $\{e^{\tau z} G(z)\}$, $\tau \leq 0$, не є повною в $H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$, де функція G визначена рівністю (8).

Справді, за лемою 15 із [1] рівність (8) задає топологічне відображення $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ на $H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$ і згідно з (14) образом функції $g(w-\tau)$ є функція $G(z)e^{\tau z}$. Отже, теорема 8 є наслідком теореми 7.

Зауважимо, що раніше визначена на $H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$ норма еквівалентна [4,8] нормі, визначеній так

$$\|P\| = \max_{\varphi \in \{0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\}} \left\{ \left(\int_0^{+\infty} |P(re^{i\varphi})|^2 e^{-2r\sigma} |\sin \varphi| dr \right)^{1/2} \right\}. \quad (20)$$

Лема 2 показує, що рівняння (1) має ненульовий розв'язок $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, якщо функція (8) має принаймні один нуль в $\mathbb{C}_+$. Приклад 1 вказує на те, що ця умова не є необхідною і, отже, не кожний, взагалі кажучи, розв'язок із $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ рівняння (1) є границею послідовності лінійних комбінацій його розв'язків виду $w^{m-1} e^{\lambda m}$, $m \in \mathbb{N}$ (порівняй з [12]).

Теорема 9. Рівняння (8) має ненульовий розв'язок $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, якщо для функції (8) виконується принаймні одна із наступних умов:

- 1) $G(z) \exp(\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z) \in H^2(\mathbb{C}_+)$, де вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$ вибрана звичайним чином;
- 2) G має принаймні один нуль в $\mathbb{C}_+$;
- 3) існує така функція G_0 , що:
 - а) $GG_0 \in H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$;
 - б) $Q_0 G_0 \notin H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$ принаймні для однієї функції $Q_0 \in H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$;
 - в) $|1/G_0(iy)| \geq c_1 > 0$ для м.в. $y \in \mathbb{R}$;
 - г) $|1/G_0(x)| \geq c_2 > 0$ для м.в. $x > 0$;
- 4) існує така функція G_0 , що:
 - а) $G(z)e^{i\sigma z} G_0(z) \in E_0^2[\mathbb{C}(0; \pi/2)]$;
 - б) $Q_0(z)e^{i\sigma z} G_0(z) \notin E_0^2[\mathbb{C}(0; \pi/2)]$ принаймні для однієї функції $Q_0 \in H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$;
 - в) $|1/G_0(z)| \geq c_1 > 0$ для м.в. $y > 0$;
 - г) $|1/G_0(x)| \geq c_2 > 0$ для м.в. $x > 0$;
- 5) існує така функція G_0 , що:
 - а) $G(z)e^{-i\sigma z} G_0(z) \in E_0^2[\mathbb{C}(-\pi/2; 0)]$;
 - б) $Q_0(z)e^{-i\sigma z} G_0(z) \notin E_0^2[\mathbb{C}(-\pi/2; 0)]$ принаймні для однієї функції $Q_0 \in H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$;
 - в) $|1/G_0(iy)| \geq c_1 > 0$ для м.в. $y < 0$;
 - г) $|1/G_0(x)| \geq c_2 > 0$ для м.в. $x > 0$;

Доведення. 1). Покажемо, що сім'я $\{G(z)e^{\tau z}\}$, $\tau \leq 0$, не може бути повною в $H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$. Справді, якщо скінченними лінійними комбінаціями $\eta(z)$ функцій $e^{\tau z} G(z)$, $\tau \leq 0$, можна як завгодно точно в $H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$ наблизити функцію $Q \in H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$, то скінченними лінійними комбінаціями функцій

$$e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} G(z) e^{\tau z} \in H^2(\mathbb{C}_+), \quad \tau \leq 0,$$

можна як завгодно точно наблизити в $H^2(\mathbb{C}_+)$ функцію

$$Q_0(z) = Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z \ln z},$$

бо

$$\|Q_0\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |Q_0(iy)|^2 dy$$

і завдяки (20)

$$\begin{aligned} \|\eta - Q\|_{H^2(\mathbb{C}_+, h_4)} &\geq c_1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma|y|} |\eta(iy) - Q(iy)|^2 dy \right)^{1/2} = \\ &= c_1 \|e^{\frac{2\sigma}{\pi}z \ln z} \eta(z) - Q_0(z)\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}, \quad c_1 > 0. \end{aligned}$$

Отже, $Q_0 \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Але легко підібрати функцію $Q \in H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$ (наприклад, $Q(z) = (1+z)^{-2}$), для якої $Q_0 \notin H^2(\mathbb{C}_+)$. Тому сім'я функцій $\{G(z)e^{\tau z}\}$, $\tau \leq 0$, не може бути повною в просторі $H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$ і потрібний висновок отримуємо на основі попередньої теореми. У випадках 3)-5) приходимо до аналогічного висновку, враховуючи відповідно, що (тут і далі c_1 – додатна стала)

$$\begin{aligned} \|\eta - Q_0\|_{H^2(\mathbb{C}_+, h_4)} &\geq c_1 \|\eta G_0 - G_0 Q_0\|_{H^2(\mathbb{C}_+, h_4)}, \\ \|\eta - Q_0\|_{H^2(\mathbb{C}_+, h_4)} &\geq \|\eta(z)e^{i\sigma z} - Q_0(z)e^{i\sigma z}\|_{E_0^2[\mathbb{C}(0; \pi/2)]} \geq \\ &\geq c_1 \|\eta(z)e^{i\sigma z} G_0(z) - Q_0(z)e^{i\sigma z} G_0(z)\|_{E_0^2[\mathbb{C}(0; \pi/2)]}, \\ \|\eta - Q_0\|_{H^2(\mathbb{C}_+, h_4)} &\geq c_1 \|\eta(z)e^{-\sigma z} G_0(z) - Q_0(z)e^{-i\sigma z} G_0(z)\|_{E_0^2[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]}, \end{aligned}$$

а випадок 2) вже розглянуто в лемі 2.

Приклад 2. Якщо $G(z) = \exp(1/(ai - z))/(1+z)^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то рівняння (1) має ненульовий розв'язок $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$. Справді, візьмемо $G_0(z) = \exp(-1/(ai - z))$. Тоді умови а), в) і г) випадку 3) останньої теореми виконані. Потрібно перевірити лише виконання умови б). Для $z = x + ai$, $x > 0$, маємо $|G_0(x)| = \exp(1/x) \geq 1/x$. Якщо функція $Q_1 = Q_0 G_0$, де $Q_0(z) = (1+z)^{-2}$, належить $H^2(\mathbb{C}_+, h_4)$, то [1] для $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$ виконується

$$|Q_1(z)| \leq \exp(c_1|z|)/x^{1/2},$$

а це суперечить попередній нерівності.

Зазначимо, що згідно з теоремою Лакса-Берлінга [13, с.331] рівняння (2) має ненульовий розв'язок $f \in L^2(-\infty, 0)$ тоді і тільки тоді, коли внутрішній множник функції $\tilde{G}$ не є сталим.

ЛІТЕРАТУРА

1. Винницький Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. 1994. 46. №5. С.484–500.
2. Гарнет Дж. *Ограниченные аналитические функции*. – М.: Наука, 1980. 384с.

3. Гурарий В.П. *Групповые методы коммутативного гармонического анализа* // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления / ВИНТИ. 1988. 25. С.1–311.
4. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. 39. №3. С.657–702.
5. Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области*. – М.: Наука, 1964. 267с.
6. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. – М.: Наука, 1966. 671с.
7. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций*. – М–Л.: ГИТТЛ, 1950. 337с.
8. Винницкий Б.В. *Про узагальнення теореми Пелі-Вінера* // Матем. студії. 1995. Вип.4. С.37–44.
9. Мартиросян В.М. *Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях* // Изв. АН Арм.ССР. Математика. 1978. 12, №5–6. С.490–531.
10. Седлецкий А.М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. 1975. 96, №1. С.75–86.
11. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. 1. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. 87, №4, С.459–489.
12. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига*. – М.: Наука, 1980. 380с.

293720, Україна, Львівська обл., м.Дрогобич, вул. Стрийська, 3
Дрогобицький педінститут, математичний факультет

Надійшло 20.03.1995