

УДК 513.83

О ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБА, ПОСТРОЕННОМ ПО СЕМЕЙСТВУ ФЕЛНЕРОВСКИХ МНОЖЕСТВ АМЕНАБЕЛЬНОЙ ГРУППЫ

Е.И. ГОРДОН

*Посвящается профессору В.Э. Лянце
в связи с его семидесятипятилетием*

E. Gordon. *On a Loeb space constructed from a family of Følner sets of an amenable group*, Matematychni Studii, **7**(1997) 27–32.

Some ergodic properties of amenable groups are investigated by means of Non-standard Analysis. The Loeb measure space is constructed on a hyperfinite Foelner set of a nonstandard extension of an amenable group. In this Loeb space there exists a subset of the measure one, on which a free invariant action of the initial group can be defined. Two applications of this construction are mentioned. One of them deals with an approximation of amenable groups by finite groups. The other is an extension of Fursteberg's ergodic proof of Szemeredy theorem to the amenable groups.

ВВЕДЕНИЕ

Значительная часть приложений нестандартного анализа в теории меры и стохастическом анализе связана с конструкцией пространств Леба [1], которые строятся из гиперконечных вероятностных пространств. Являясь бесконечными и даже не сепарабельными, эти пространства достаточно богаты для реализации многих известных случайных процессов, например, броуновского движения. С другой стороны, в силу принципа переноса нестандартного анализа, они обладают многими свойствами конечных вероятностных пространств. Это обстоятельство позволяет более непосредственно применять интуицию элементарной теории вероятностей при изучении случайных процессов, что и обуславливает успех применения пространств Леба.

В настоящей заметке приводится одно приложение пространств Леба в теории аменабельных групп. Аменабельные группы – это группы, которые имеют нетривиальную конечно-аддитивную инвариантную меру на множестве всех своих подмножеств. Они были введены фон Нейманом при исследовании причин известного парадокса Банаха-Тарского и по настоящее время привлекают внимание многих исследователей, благодаря многочисленным приложениям в гармоническом анализе и эргодической теории, которые, можно найти, например, в книге [2] и дополнении к ней [3]. В [3], в частности, высказано соображение, о том, что основное свойство аменабельных групп, обуславливающее

1991 *Mathematics Subject Classification*. 22D40, 26E35, 28C10, 28D05, 28E05.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных исследований, грант 95–01–00673а.

эти приложения, состоит в их аппроксимируемости конечными группами. Это соображение основано на следующем важном критерии аменабельности.

Критерий Фелнера. *Счетная группа G аменабельна тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность $U = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ конечных подмножеств G , исчерпывающая G и удовлетворяющая следующему условию:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_n \Delta g U_n|}{|U_n|} = 0 \quad \forall g \in G. \quad (1)$$

Отсюда видно, что при больших n каждый элемент G почти совпадает с некоторой перестановкой множества U_n , т.е. правдоподобно предположить, что G аппроксимируется группами подстановок своих фелнеровских множеств.

Одной из первых попыток уточнить понятие аппроксимируемости было введенное А.М. Вершиком [4] понятие инвариантного действия со свободной периодической аппроксимацией в некотором пространстве с мерой. Однако в дальнейшем А.М. Степин [5] показал, что не все аменабельные группы имеют такое действие. Недавно А.М. Вершиком и автором [6], был описан в алгебраических терминах класс групп, имеющих квазиинвариантное действие со свободной периодической аппроксимацией в некотором пространстве с мерой. В §1 все эти определения будут сформулированы в терминах нестандартного анализа.

В данной работе рассматриваются пространства Леба, построенные по фелнеровским множествам U_N , где N – бесконечно большое в смысле нестандартного анализа натуральное число. В этом пространстве выделяется множество полной меры, на котором определяется свободное инвариантное действие группы G . При этом на всем пространстве Леба действует некоторая группа, аппроксимируемая группами подстановок фелнеровских множеств в смысле упоминавшегося выше определения из [6]. Тем самым можно сказать, что аменабельная группа почти аппроксимируется группами подстановок своих фелнеровских множеств.

Представляется, что непосредственная взаимосвязь данного пространства с мерой с последовательностью фелнеровских множеств может найти разнообразные применения при исследовании эргодических свойств аменабельных групп. Для иллюстрации возможности таких применений в §2 рассмотрено распространение известной конструкции Фюрстенберга [7], примененной им для доказательства теоремы Семереди об арифметических прогрессиях методами эргодической теории, на случай аменабельных групп. Напомним, что в этом доказательстве по любому подмножеству $\mathbb{N}$ положительной плотности строится некоторое пространство с мерой, а сдвигу в $\mathbb{N}$ сопоставляется некоторое сохраняющее меру преобразование в этом пространстве, после чего теорема Семереди вытекает из одного (также принадлежащего Фюрстенбергу) уточнения классической теоремы Пуанкаре о возвращении. Для аменабельной группы G естественно определяется плотность ее подмножеств относительно фелнеровской последовательности. При этом оказывается, что описанное выше пространство Леба обладает свойствами, аналогичными свойствам пространства Фюрстенберга, что позволяет, в частности, доказать и некоторый вариант теоремы Семереди для аменабельных групп.

Основные понятия и факты нестандартного анализа, которые используются в статье, можно найти в трех первых главах книги [1].

Изложенные результаты докладывались на семинаре в университете г. Бохума, Германия (руководитель профессор С. Альбеверио) и на семинаре в университете г. Тюбингена, Германия (руководитель профессор М. Вольф). Автор благодарен всем участникам этих семинаров за полезное обсуждение. Автор признателен также профессору В. Бергельсону (Коламбус, США), познакомившего его с результатами Фюрстенберга, относящимися к теореме Семереди.

§1. ДЕЙСТВИЕ АМЕНАБЕЛЬНОЙ ГРУППЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБА-ФЕЛНЕРА

Пусть G – счетная аменабельная группа, $U = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ – фелнеровская последовательность подмножеств G , т.е. последовательность, удовлетворяющая (1).

Зафиксируем какое-нибудь бесконечно большое Λ и рассмотрим пространство Леба (U_Λ, S, ν_L) , т.е. S – σ -алгебра внутренних подмножеств U_Λ , а мера ν_L порождена внутренней равномерной мерой на U_L . Таким образом для внутреннего множества $V \subset U_L$

$$\nu_L(V) = \frac{|V|}{|U_L|}. \quad (2)$$

Из (1) следует, что $\forall^{st} g \in G \quad \nu_L(gU_\Lambda \cap U_\Lambda) = 1$.

Положим $X = \bigcap_{g \in G} U^{(g)}$. Если теперь $\mathcal{B} = \{C \cap X | C \in S\}$, а $\mu = \nu_L|_{\mathcal{B}}$, то $(X, \mathcal{B}, \mu)$ – вероятностное пространство. Это пространство будем называть пространством Леба-Фелнера аменабельной группы G .

Теорема 1. *Существуют инвариантное действие T группы G на X и гомоморфизм булевых алгебр $\varphi : \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющие условию:*

$$\forall B \subset G \quad \varphi(gB) = T_g(\varphi(B)). \quad (3)$$

Замечание. От гомоморфизма φ требуется только, чтобы он сохранял конечные булевы операции, но не обязательно – счетные.

Доказательство. Условие фелнеровости последовательности U означает, что

$$\forall \Omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad \forall^{st} g \in G \quad \frac{|gU_\Omega \Delta U_\Omega|}{|U_\Omega|} \approx 0. \quad (4)$$

Прежде всего определим действие T группы G (заметьте, что именно G , а не ${}^*G!$) на X . Из определения X видно, что $\forall x \in X \quad \forall^{st} g \in G \quad g \cdot x \in X$, т.е. можно положить $T_g(x) = g \cdot x$. Покажем, что это действие инвариантно. Достаточно показать это для множеств вида $C \cap X$, где C – внутреннее подмножество U_Λ . Имеем

$$\begin{aligned} \mu(C \cap X) &= \nu_L(C \cap X) = \nu_L(C), \\ \mu(g(C \cap X)) &= \mu(gC \cap gX) = \mu(gC \cap X) = \mu(gC \cap U_\Lambda \cap X) = \nu_L(gC \cap U_\Lambda) \end{aligned}$$

Очевидно, что $|C| = |gC| = |gC \cap gU_\Lambda|$, следовательно

$$||C| - |gC \cap U_\Lambda|| = ||gC \cap gU_\Lambda| - |gC \cap U_\Lambda|| \leq |U_\Lambda \Delta gU_\Lambda|.$$

Поделив обе части этого неравенства на $|U_\Lambda|$ и воспользовавшись (4), получим, что

$$\frac{|C|}{|U_\Lambda|} \approx \frac{|gC \cap U_\Lambda|}{|U_\Lambda|}.$$

Перейдя к стандартным частям, видим в силу (2), что $\mu(C \cap X) = \mu(g(C \cap X))$, а это доказывает инвариантность действия T .

Определим теперь гомоморфизм булевых алгебр $\varphi : \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{B}$, положив для любого стандартного $B \subset G$ $\varphi(B) = {}^*B \cap X$. Прежде всего ${}^*B \cap X =$

$*B \cap U_\Lambda \cap X \in \mathcal{B}$, т.к. $*B \cap U_\Lambda$ – внутреннее гиперконечное подмножество U_Λ . Далее, если $g \in G$, то

$$\varphi(gB) = *(gB) \cap X = g \cdot *B \cap X = g \cdot *B \cap g \cdot X = g \cdot (*B \cap X) = T_g(B),$$

что и доказывает (3).

Очевидно также, что описанное в доказательстве действие T свободно.

В статье [6] изучен класс групп, которые там названы ЛВК группами, т.е. группами, локально вложимыми в класс конечных групп. Определение локальной вложимости взято по существу из книги Мальцева [8], где показано, что оно равносильно вложимости группы в ультрапроизведение конечных групп. На языке нестандартного анализа это означает, что группа G является ЛВК группой тогда и только тогда, когда существует гиперконечная группа K и внешний инъективный гомоморфизм $j : G \rightarrow K$.

В [5,6] установлено, что не всякая аменабельная группа является ЛВК группой, хотя имеющийся пример чрезвычайно сложен (это известный пример неразрешимой конечно представленной группы с неразрешимой проблемой тождества слов [9]). Мы покажем сейчас, что в смысле описанного в теореме 1 действия аменабельная группа почти совпадает с некоторой ЛВК группой.

Прежде всего заметим, что внутренняя группа S_Λ подстановок множества U_Λ очевидным образом инвариантно действует на пространстве Леба (U_Λ, S, ν_L) .

Теорема 2. *Существует такое инъективное отображение $j : G \rightarrow S_\Lambda$, что для любого $x \in X$, где X – пространство Леба-Фелнера (напомним, что $\nu_L(X) = 1$) и для любых $g_1, g_2 \in G$ $j(g_1 \cdot g_2)(x) = j(g_1)j(g_2)(x)$. При этом X инвариантно относительно действия $j(G)$ на U_Λ и ограничение этого действия на X совпадает с действием T группы G на X , описанным в теореме 1.*

Доказательство. Каждому $g \in G$ поставим в соответствие внутреннюю биекцию $\pi_g : U_\Lambda \rightarrow U_\Lambda$ следующим образом. Если $x \in U_\Lambda \cap g^{-1}U_\Lambda$, то $gx \in U_\Lambda \cap gU_\Lambda$. В этом случае положим $\pi_g(x) = gx$. Теперь легко видеть, что $|U_\Lambda \setminus g^{-1}U_\Lambda| = |U_\Lambda \setminus gU_\Lambda|$. Зафиксируем произвольную биекцию $\psi_g : U_\Lambda \setminus g^{-1}U_\Lambda \rightarrow U_\Lambda \setminus gU_\Lambda$ и положим $\pi_g(x) = \psi_g(x)$ для $x \in U_\Lambda \setminus g^{-1}U_\Lambda$. Тем самым π_g определено полностью. Положив $j(g) = \pi_g$, получим, что $\forall x \in X \quad j(g)(x) = \pi_g(x)$, что и доказывает теорему.

Следствие. *Существует такая внешняя подгруппа $K \subset S_\Lambda$ (т.е. K – ЛВК группа), что множество $X \subset U_\Lambda$ инвариантно относительно действия K на U_Λ и гомоморфный образ группы K при гомоморфизме $h \rightarrow h|X$, $h \in K$, изоморфен G .*

Доказательство. В качестве группы K следует взять группу, порожденную множеством $\{\pi_g | g \in G\}$.

§2. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ ФЮРСТЕНБЕРГА ДЛЯ АМЕНАБЕЛЬНЫХ ГРУПП.

Для иллюстрации возможностей приложения пространств Леба-Фелнера рассмотрим одно обобщение известной конструкции Фюрстенберга [7], примененной им для доказательства методами эргодической теории теоремы Семери об арифметических прогрессиях. История вопроса подробно изложена в статье [10]. Напомним, что плотностью множества $A \subset \mathbb{N}$ называется число

$$d(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n}.$$

Теорема Семереди утверждает, что в любом множестве $A \subset \mathbb{N}$, плотность которого положительна, содержатся сколь угодно длинные конечные арифметические прогрессии. Для доказательства этой теоремы Фюрстенберг сопоставил некоторым специальным образом каждому множеству положительной плотности пространство с конечной счетно аддитивной мерой и сохраняющее меру преобразование в этом пространстве, после чего теорема Семереди уже выводилась из следующего, также принадлежащего Фюрстенбергу уточнения теоремы Пуанкаре о возвращении (см, например, [10]).

Теорема 3. Если $(X, \mathcal{B}, \mu)$ – пространство с конечной мерой, $T : X \rightarrow X$ – автоморфизм этого пространства, $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, что $\mu(A \cap T^n(A) \cap T^{2n}(A) \cap \dots \cap T^{(k-1)n}(A)) > 0$.

Здесь при помощи пространств Леба упомянутая выше конструкция Фюрстенберга строится в более общей ситуации, когда вместо $\mathbb{N}$ рассматривается аменабельная группа G . Легко понять, что при определении плотности можно перейти от $\mathbb{N}$ к $\mathbb{Z}$ и рассматривать

$$d_{\mathbb{Z}}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{-n, \dots, n\}|}{2n + 1}$$

для $A \subset \mathbb{Z}$. При этом, если $A \subset \mathbb{N}$ и $d(A) > 0$, то и $d_{\mathbb{Z}}(A) > 0$.

С каждой фелнеровской последовательностью U аменабельной группы G можно связать U -плотность множеств $A \subset G$ по формуле

$$d_U(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap U_n|}{|U_n|}.$$

Легко видеть, что последовательность $U = \{\{-n, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ является фелнеровской последовательностью в аддитивной группе $\mathbb{Z}$ и введенная плотность является U -плотностью для этой последовательности. Используя развитый в предыдущем параграфе аппарат мы докажем сейчас следующую теорему, которую, следуя [10], назовем *принципом соответствия Фюрстенберга* для аменабельных групп.

Теорема 4. Пусть G – счетная аменабельная группа, $U = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – фелнеровская последовательность подмножеств G . Тогда для любого множества $A \subset G$ с $d_U(A) > 0$ существуют вероятностное пространство $(X, \mathcal{B}, \mu)$, инвариантное действие T группы G на X и гомоморфизм булевых алгебр $\varphi : \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (1) $\forall B \subset G \quad \mu(\varphi(B)) \leq d_U(B)$;
- (2) $\forall B \subset G \quad \varphi(gB) = T_g(\varphi(B))$;
- (3) $\mu(\varphi(A)) = d_U(A)$.

Доказательство. Из определения фелнеровской плотности следует, что для любого $B \subset G$

$$\forall \Omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad \frac{|{}^*B \cap U_\Omega|}{|U_\Omega|} \leq d_U(B) \quad \text{и} \quad (5)$$

$$\forall \Lambda \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad \frac{|{}^*A \cap U_\Lambda|}{|U_\Lambda|} \approx d_U(A). \quad (6)$$

Зафиксируем какое-нибудь Λ , удовлетворяющее (6), и рассмотрим соответствующее ему пространство Леба-Фелнера (см. предыдущий параграф). Определим действие T и гомоморфизм булевых алгебр φ так же как в теореме 1. Теперь ясно, что осталось доказать лишь утверждение (1) и (3) данной теоремы. Имеем $\mu(\varphi(B)) = \mu({}^*B \cap U_\Lambda) = \circ(|{}^*B \cap U_\Lambda| \cdot |U_\Lambda|^{-1}) \leq d_U(B)$ в силу (5), а $\mu(\varphi(A)) = d_U(A)$ в силу (6), что и завершает доказательство.

Следствие. Пусть G – счетная аменабельная группа. Для любого множества положительной плотности $A \subset G$, любого $g \in G$ и любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие $x \in A$ и $n \in \mathbb{N}$, что $\{x, g^n x, g^{2n} x, \dots, g^{(k-1)n} x\} \subset A$.

Доказательство. Пусть $A \subset G$, $d_U(A) > 0$, а $(X, \mathcal{B}, \mu)$, T и φ удовлетворяют теореме 4. Тогда $\mu(\varphi(A)) > 0$. Пусть $g \in G$. По теореме 3 с учетом свойств (1)–(3) гомоморфизма φ получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$\begin{aligned} 0 < \mu\left(\varphi(A) \cap T_g^n(\varphi(A)) \cap \dots \cap T_g^{(k-1)n}(\varphi(A))\right) = \\ = \mu\left(\varphi(A \cap g^n A \cap \dots \cap g^{(k-1)n} A)\right) \leq d_U\left(A \cap g^n A \cap \dots \cap g^{(k-1)n} A\right) \end{aligned}$$

т.е. $(A \cap g^n A \cap \dots \cap g^{(k-1)n} A) \neq \emptyset$

Если $G = \mathbb{Z}$, то данное следствие и представляет собой теорему Семереди. Доказательства теоремы 4 и данного следствия для некоторых конкретных абелевых групп, более общих, чем группа $\mathbb{Z}$, содержится в [10]. Это доказательство использует довольно сильный аппарат функционального анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбеверио С., Фенстад И., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990, 616с.
2. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. – М.: Мир, 1973, 136с.
3. Вершик А.М. *Счетные группы, близкие к конечным* // Дополнение в кн. [2], С.112–135.
4. Вершик А.М. *Аппроксимация в теории меры* // Диссертация на соискание уч. ст. доктора физ.-мат. наук. Ленинградский гос. ун-т. Ленинград, 1973.
5. Степин А.М. *Об аппроксимациях групп и групповых действий* // УМН. 1983. Т.38, 6, С.123–124.
6. Вершик А.М., Гордон Е.И. *О группах, локально вложимых в класс конечных групп* // Алгебра и анализ. 1997. №1, С.70–85.
7. Furstenberg H., Katznelson Y., Ornstein D. *The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem* // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V.7. P.527–552.
8. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. 392с.
9. Харламович О.Г. *Разрешимая конечно-представленная группа с неразрешимой проблемой тождества слов* // ИАН СССР. Сер. мат. 1981. Т.45, 4. С.854–873.
10. Bergelson V. *Ergodic Ramsey Theory* // Contemporary Math. 1987. V.57. P.63–87.

Нижегородский государственный университет,

603600 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. II, ННГУ, мехмат

Получено 21.12.1995