

ЦІЛОЧИСЕЛЬНІ КОГОМОЛОГІЇ СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ Σ_4 ТА ЗНАКОЗМІННОЇ ГРУПИ A_6

Л.П. ПЛАХТА

L. Plachta. *Integral cohomology of the symmetric group Σ_4 and the alternating group A_6* // Matematychni Studii. **6** (1996) P.135–152.

The ring structures of $H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})$ and $H^*(A_6, \mathbb{Z})$ are determined. The restrictions on the pairs (m, n) for the existence of free actions of the groups Σ_4 and A_6 on $S^m \times S^n$ are obtained.

Визначення адитивної та мультиплікативної структур градуйованого кільця когомологій $H^*(G)$ є однією з найважливіших задач в еківаріантній теорії когомологій. Знання адитивної та мультиплікативної структур в кільці $H^*(G)$ необхідне в тих випадках, коли при дослідженнях дій групи G на просторі X використовується спектральна послідовність когомологій для розшарування Серра $X_G = X \times_G EG \xrightarrow{p} BG$.

Адитивну структуру в кільці когомологій $H^*(\Sigma_n, \mathbb{F}_2)$ симетричної групи Σ_n з коефіцієнтами в полі $\mathbb{F}_2$ визначив М. Накаока [1]. Визначення мультиплікативної структури кільця $H^*(\Sigma_n, \mathbb{F}_2)$ нашоветься на значні технічні труднощі. Використовуючи теорію інваріантів, А. Адем, Дж. Меджініс і Дж. Мілгрем [2] знайшли метод, за допомогою якого можна обчислити мультиплікативну структуру кільця $H^*(\Sigma_n, \mathbb{F}_2)$ для багатьох значень n . Вони визначили мультиплікативну структуру кілець $H^*(\Sigma_n, \mathbb{F}_2)$ і $H^*(A_n, \mathbb{F}_2)$ для $n = 6, 8, 10, 12$, де A_n – знакозмінна група на множині з n елементів, а також описали дію алгебри Стінрода на цих кільцях. Нгуен Суан Туен [3] запропонував метод, оснований на теорії модульних інваріантів, за допомогою якого можна описати мультиплікативну структуру кілець $H^*(\Sigma_n, \mathbb{F}_p)$, $H^*(A_n, \mathbb{F}_p)$. Проте точне визначення мультиплікативної структури кілець $H^*(\Sigma_n, \mathbb{F}_p)$, $H^*(A_n, \mathbb{F}_p)$ натикається на складні проблеми теорії модульних інваріантів.

Для знаходження мультиплікативної структури кілець $H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})$, $H^*(A_6, \mathbb{Z})$ знання мультиплікативної структури на $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$ та $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$ має вирішальне значення. В даній праці визначена мультиплікативна структура кілець $H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})$, $H^*(A_6, \mathbb{Z})$, а також наведені приклади використання кільцевої структури на $H^*(\Sigma_4)$ і $H^*(A_6)$ при дослідженні вільних дій груп Σ_4 і A_6 на добутках сфер. Дослідженням вільних дій груп Σ_4 і A_6 на добутках сфер присвячена наступна праця автора, яка готується до друку. Дана праця організована наступним чином. В §1 означуються основні поняття та наводяться необхідні дані з еківаріантної теорії когомологій, які використовуються для

доведення основних результатів. В §2 даної праці визначена мультиплікативна структура кілець $H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})$, $H^*(A_6, \mathbb{Z})$. Основні результати §2 сформульовані у вигляді теорем 1,2. В §3 дані про адитивну та мультиплікативну структури кілець $H^*(\Sigma_4)$, $H^*(A_6)$ використовуються для встановлення обмежень на пари (m, n) , для яких груп Σ_4 і A_6 допускають вільну дію на $S^m \times S^n$.

§1

Нехай G – скінченна група, Λ – комутативне кільце з одиницею і M – модуль над груповим кільцем ΛG . Будемо говорити, що M – G -модуль, якщо з контексту зрозуміло, яке кільце Λ зафіксоване. Через $H^*(G, M)$ (відповідно $H_*(G, M)$) позначимо градуїований модуль когомологій (відповідно гомологій) групи G з коефіцієнтами в G -модулі M [4]. Будемо говорити, що X – G -простір, якщо X – топологічний простір із заданою на ньому дією групи G . Позначимо через $\mathbb{F}_p$ поле лишків цілих чисел за модулем p , де p – просте число.

Означення 1 [5]. $\mathbb{F}_p$ – когомологічним виміром простору X будемо називати число $\sup \{ m \mid \text{існує } F_p\text{-пучок } F \text{ над } X \text{ з властивістю } H^m(X, F) \neq 0 \}$, якщо $\sup$ досягається, і ∞ в протилежному випадку.

З твердження А.ІІ [5] випливає, що для паракомпактного G -простору X маємо

$$\text{cd}_{\mathbb{F}_p}(X/G) \leq \text{cd}_{\mathbb{F}_p} X,$$

де X/G – простір орбіт дії групи G на X .

Нехай BG – класифікуючий простір для групи G . В §3 ми будемо використовувати спектральні послідовності когомологій для розшарування Серра $X \times_G EG \xrightarrow{p} BG$ з шаром X , зокрема, мультиплікативну структуру таких спектральних послідовностей, при дослідженні G -простору X .

Розглянемо точну пару

$$\begin{array}{ccc} D = H^*(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i'} & H^*(X, \mathbb{Z}) \\ & \swarrow k' & \searrow j' \\ & H^*(X, \mathbb{F}_2) & \end{array}$$

де гомоморфізм i' індукований операцією множення на 2 в групі коефіцієнтів $\mathbb{Z}$, гомоморфізм j' індукований гомоморфізмом $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2$, а k' збігається зі зв'язуючим гомоморфізмом Бокштейна [6]. Це точна пара Бокштейна. Її диференціал $\beta_1 = k'j'$ збігається з гомоморфізмом Sq^1 . Диференціали β_r її похідних пар називаються диференціалами Бокштейна вищих порядків. Надалі ми будемо використовувати диференціал 2-го порядку β_2 для визначення елементів періоду 4 в групах $H^4(\Sigma_4, \mathbb{Z})$, $H^4(A_6, \mathbb{Z})$.

Нагадаємо, що симетрична група Σ_4 має порядок 24, знакозмінна група A_6 має порядок 360, а дієдральна група D_4 – порядок 8. Крім того, дієдральна група D_4 збігається із сплетінням груп $\Sigma_2 \wr \Sigma_2$ [7] і є силовською 2-підгрупою груп Σ_4 і A_6 . Зауважимо також, що група D_4 може бути зображена точним розширенням

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{c} D_4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1, \quad (1)$$

де група $\mathbb{Z}/2$ діє нетривіально на $\mathbb{Z}/4$.

Позначимо через $\Sigma_2 \times \Sigma_2$ підгрупу групи $\Sigma_2 \wr \Sigma_2$, яка складається з підстановок (13), (24), (13)(24), 1, а через V_2 – підгрупу, яка складається з підстановок (12)(34), (13)(24), (14)(23), 1. Нехай j – канонічне вкладення підгрупи $\Sigma_2 \times \Sigma_2$ в Σ_4 , а J – канонічне вкладення підгрупи V_2 в Σ_4 . Маємо

$$H^*(\Sigma_2 \times \Sigma_2, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[e_1, e_2], \quad \deg e_i = 1.$$

Аналогічно,

$$H^*(V, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[f_1, f_2], \quad \deg f_j = 1, j = 1, 2.$$

Відомо [2], що

$$H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\sigma_2, c_3, \sigma_1] / \langle \sigma_1 \cdot c_3 = 0 \rangle, \quad \deg \sigma_1 = 1, \quad \deg \sigma_2 = 2, \quad \deg c_3 = 3.$$

Крім того,

$$\text{Im}(j^* : H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(\Sigma_2 \times \Sigma_2, \mathbb{F}_2)) \subset \mathbb{F}_2[e_1, e_2]^{\Sigma_2},$$

де твірна $t \in \Sigma_2$ діє в $\mathbb{F}_2[e_1, e_2]$, переставляючи e_1 і e_2 . Таким чином, $\text{Im } j^*$ міститься в алгебрі $\mathbb{F}_2[e_1 + e_2, e_1 e_2]$, де $e_1 + e_2 = j^*(\sigma_1)$, $e_1 \cdot e_2 = j^*(\sigma_2)$. Далі

$$\text{Im}(J^* : H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(V_2, \mathbb{F}_2)) = \mathbb{F}_2[f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2, f_1 f_2 (f_1 + f_2)],$$

де $J^*(\sigma_2) = f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2$, $J^*(c_3) = f_1 f_2 (f_1 + f_2)$. Дія алгебри Стінрода Sq на кільці $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$ описується наступними співвідношеннями [2]:

$$Sq^1 \sigma_2 = c_3 + \sigma_1 \sigma_2, \quad Sq^1 c_3 = 0, \quad Sq^2 c_3 = \sigma_2 c_3.$$

Нагадаємо ще один факт, який буде використаний в §2. Нехай $A = \Sigma_2 \times \Sigma_2 \xrightarrow{a} D_4 \xrightarrow{\lambda} O(2)$ – вкладення групи A в ортогональну групу $O(2)$. Група A – максимальна за включенням елементарна абелева 2-підгрупа групи $O(2)$ (і групи D_4 також). Маємо $H^*(O(2), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[w'_1, w'_2]$, де $w'_1 \in H'(O(2), \mathbb{F}_2)$, $w'_2 \in H^2(O(2), \mathbb{F}_2)$, w'_1, w'_2 – класи Штифеля-Уїтні, і $\lambda^* a^*(w'_1) = t_1 + t_2$, $\lambda^* a^*(w'_2) = t_1 \cdot t_2$, де t_1, t_2 – твірні групи $H^1(\Sigma_2 \times \Sigma_2, \mathbb{F}_2)$. Далі розглянемо наступну комутативну діаграму вкладень груп:

$$\begin{array}{ccccccc} D_4 & \xrightarrow{i} & A_6 & \xrightarrow{\tau} & \Sigma_6 & & \\ & \nearrow J & & & \uparrow i_1 & & \\ j \left| \begin{array}{ccc} V_2 & \xrightarrow{r} & A_4 & \xrightarrow{q} & \Sigma_4 \times \Sigma_2 \end{array} \right. & & (2) \\ & & & & \uparrow j_1 & & \\ \Sigma_2 \times \Sigma_2 & \xrightarrow{s} & \Sigma_2 \times \Sigma_2 \times \Sigma_2, & & & & \end{array}$$

де D_4 – підгрупа групи A_6 , породжена підстановками (14)(23), (13)(56), i – відповідне вкладення групи D_4 в A_6 , $\Sigma_2 \times \Sigma_2 = \{1, (13)(56), (24)(56), (13)(24)\}$, $V_2 = \{1, (14)(23), (12)(34), (13)(24)\}$, підгрупа $\Sigma_2 \times \Sigma_2 \times \Sigma_2 \subset \Sigma_6$ породжена підстановками (12), (34), (56), $r(12)(34) = (12)(34)$, $r(13)(24) = (13)(24)$; дія решти гомоморфізмів очевидна.

Відомо, що

$$H^*(\Sigma_6, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, c_3] / \langle c_3(\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2) = 0 \rangle,$$

де $\deg \sigma_i = i$, $\deg c_3 = 3$. Гомоморфізм скорочення $\tau^*, \tau^* : H^*(\Sigma_6, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$, – сюр'єктивний і

$$H^*(A_6, \mathbb{F}_2) \cong H^*(\Sigma_6, \mathbb{F}_2) / \langle \sigma_1 = 0 \rangle \cong \mathbb{F}_2[\sigma_2, \sigma_3, c_3] / \langle \sigma_3 c_3 = 0 \rangle.$$

Тому надалі твірні елементи σ_2, σ_3, c_3 алгебри $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$ ототожнюються з твірними алгебри $H^*(\Sigma_6, \mathbb{F}_2)$, що не приводить до неоднозначності. Дія алгебри Стінрода на кільці $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$ описується наступними співвідношеннями [2]:

$$Sq^1 \sigma_2 = \sigma_3 + c_3, \quad Sq^1 c_3 = 0, \quad Sq^2 c_3 = \sigma_2 c_3, \quad Sq^1 \sigma_3 = 0, \quad Sq^2 \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_3.$$

Покладемо $\lambda^*(w'_1) = w_1$, $\lambda^*(w_2^1) = w_2$. Тоді маємо

$$H^*(D_4, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\xi_1, w_1, w_2] / \langle \xi_1^2 = \xi_1 w_1 \rangle$$

для деякого ненульового елемента $\xi_1 \in H^1(D_4, \mathbb{F}_2)$, причому, $a^*(\xi_1) = 0$, $a^*(w_1) = t_1 + t_2$, $a^*(w_2) = t_1 t_2$, $c^*(\xi_1) \neq 0$ і $c^*(w_1) = 0$, де $c^* : H^*(D_4, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{Z}/4, \mathbb{F}_2)$ – гомоморфізм скорочення, індукований вкладенням $c : \mathbb{Z}/4 \rightarrow D_4$. Більше того, $\beta_2(\{w_2 \xi_1\}) = \{w_2^2\}$ і $\beta_3 = 0$ [8]. Нехай $\exp M$ – найменше додатне ціле число, для якого $nx = 0$ при всіх $x \in M$, де M – довільний скінченний модуль. З останніх співвідношень випливає, що $\exp H^m(D_4, \mathbb{Z}) \leq 2$, якщо $m > 0$ і $m \not\equiv 0 \pmod{4}$, а $H^{4q}(D_4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4 + A_q$, де $2A_q = 0$, $q > 0$ [8].

Для довільного простого числа p і довільного $\mathbb{Z}$ -модуля M через $M_{(p)}$ позначимо модуль, одержаний локалізацією модуля M в простому ідеалі (p) , $M_{(p)} \simeq M \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Аналогічно до означення 1 можна ввести поняття $\mathbb{Z}_{(p)}$ -когомологічного виміру простору X .

§2

Група Σ_4 містить нетривіальні силовські p -підгрупи тільки для $p = 2, 3$. Як було зазначено вище, силовська 2-підгрупа групи Σ_4 ізоморфна дієдральній групі D_4 , а силовська 3-підгрупа групи Σ_4 , очевидно, ізоморфна групі $\mathbb{Z}/3$ і породжується, наприклад, підстановкою $(123) = g$. Обчислимо $H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(3)}$. Внаслідок теореми 10.3 [4], група $H^n(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(3)}$ ізоморфна підгрупі Σ_4 -інваріантних елементів групи $H^n(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$ при $n > 0$. Нехай $h = (12)$. Маємо $hgh^{-1} = (132) = g^2$. Легко бачити, що підгрупа Σ_4 -інваріантних елементів групи $H^n(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$ збігається з підгрупою h -інваріантних елементів. Розглянемо вільну резольвенту T для $\mathbb{Z}/3$ -модуля $\mathbb{Z}$:

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3] \xrightarrow{t^{-1}} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3] \rightarrow \cdots \rightarrow \xrightarrow{t^{-1}} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

де гомоморфізми N і t визначаються дією на твірній $g = (123)$, $g \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3]$, формулами $t(g) = g^2$, $N(g) = g + g^2 + e$, а e – одиничний елемент групи $\mathbb{Z}/3$. Автоморфізм $\hat{h} : \mathbb{Z}/3 \rightarrow \mathbb{Z}/3$, $h(g) = hgh^{-1}$, продовжується до ланцюгового Σ_4 -відображення $\theta : T \rightarrow T$, яке зберігає аугментацію, причому θ визначене однозначно з точністю до гомотопії [4]. Нагадаємо, що $H^{2k}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3$, $H^{2k-1}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}) = 0$ при $k > 0$. Нехай x – твірна групи $H^2(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$. Тоді x^k – твірна групи $H^{2k}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$, $k > 0$. Подіявши функтором $\text{Hom}_{\mathbb{Z}/3}(\cdot, \mathbb{Z})$ на гомоморфізм θ , одержимо $\theta^{(2l)}(x^l) = x^l$ при $l = 2k$, $k > 0$, і $\theta^{(2l)} = 2x^l$ при $l = 2k - 1$, $k > 0$. З останніх співвідношень випливає, що підкільце $\bigoplus_{k>0} H^{4k}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$ збігається з підкільцем h -інваріантних елементів градуйованого

кільця $\widetilde{H}^*(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{l>0} H^{2l}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$. Таким чином, виконується наступне

Твердження 1. $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(3)} \cong \bigoplus_{k>0} H^{4k}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$, причому твірна x групи $H^4(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$ породжує все кільце $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(3)}$.

Перейдемо тепер до обчислення 2-примарної компоненти кільця когомологій $\widetilde{H}(\Sigma_4, \mathbb{Z})$. Знайдемо спочатку образ гомоморфізму скорочення k^* , $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(D_4, \mathbb{F}_2)$. Оскільки D_4 – силовська 2-підгрупа групи Σ_4 , то з теореми 10.3 [4] випливає, що k^* – мономорфізм.

Твердження 2. *Мономорфізм k^* задовольняє наступні рівності: $k^*(\sigma_1) = w_1 + \xi_1$, $k^*(\sigma_2) = \xi_1^2 + w_2$, $k^*(c_3) = \xi_1 w_2$.*

Доведення. Нехай $k^*(c_3) = a_1 \xi_1 w_2 + b_1 w_1 w_2 + \gamma \xi_1^3 + \delta w_1^3$. Тоді маємо $0 = k^*(Sq^1 c_3) = \gamma \xi_1^4 + \delta w_1^4$. Отже, $\gamma = \delta = 0$ і $k^*(c_3) = a_1 \xi_1 w_2 + b_1 w_1 w_2$. Оскільки $a^*(\xi_1) = 0$, $a^*(w_1) \neq 0$, $a^*(w_2) \neq 0$, $j^*(c_3) = 0$ і $j^* = a^* k^*$, то $b_1 = 0$. Оскільки $k^*(c_3) \neq 0$ і $b_1 = 0$, то $a_1 = 1$ і $k^* c_3 = \xi_1 w_2$.

З рівності $a^*(\xi_1) = 0$ випливає, що $k^*(\sigma_1) = w_1 + t\xi_1$, де $t = 0$ або $t = 1$. Нехай $k^*(\sigma_2) = \alpha \xi_1^2 + \beta w_1^2 + \gamma w_2$. Припустимо, що $t = 0$ в співвідношенні $k^*(\sigma_1) = w_1 + t\xi_1$. Маємо

$$Sq^1 k^*(\sigma_2) = Sq^1(\alpha \xi_1^2 + \beta w_1^2 + \gamma w_2) = Sq^1(\gamma w_2) = \gamma w_1 w_2 = w_1 w_2,$$

оскільки $Sq^1 k^*(\sigma_2) = k^* Sq^1 \sigma_2 = k^*(\sigma_1 \sigma_2 + c_3) \neq 0$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} Sq^1 k^*(\sigma_2) &= k^*(Sq^1 \sigma_2) = k^*(\sigma_1 \sigma_2 + c_3) = k^*(\sigma_1) \cdot k^*(\sigma_2) + k^*(c_3) = \\ &= w_1(\alpha \xi_1^2 + \beta w_1^2 + \gamma w_2) + \xi_1 w_2 = \alpha \xi_1^3 + \beta w_1^3 + w_1 w_2 + \xi_1 w_2. \end{aligned}$$

З останніх співвідношень випливає наступна рівність: $w_1 w_2 = \alpha \xi_1^3 + \beta w_1^3 + w_1 w_2 + \xi_1 w_2$, тобто $\alpha \xi_1^3 + \beta w_1^3 + \xi_1 w_2 = 0$. Але останнє співвідношення не виконується в кільці $\mathbb{F}_2[\xi_1, w_1, w_2]/\langle \xi_1^2 = \xi_1 w_1 \rangle$ ні при яких значеннях α і β . Отже, припущення $t = 0$ приводить до суперечності і тому рівність $k^*(\sigma_1) = w_1 + t\xi_1$, виконується при $t = 1$. Таким чином, $k^*(\sigma_1) = \xi_1 + w_1$. Крім того, маємо

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= Sq^1 k^*(\sigma_2) = k^*(\sigma_1 \sigma_2 + c_3) = (\xi_1 + w_1)(\alpha \xi_1^2 + \beta w_1^2 + w_2) + \xi_1 w_2 = \\ &= \alpha \xi_1^3 + \beta \xi_1^3 + \xi_1 w_2 + \alpha \xi_1^3 + \beta w_1^3 + w_1 w_2 + \xi_1 w_2 = \beta \xi_1^3 + \beta w_1^3 + w_1 w_2, \end{aligned}$$

і тому $\beta(\xi_1^3 + w_1^3) = 0$. Останнє співвідношення в кільці $\mathbb{F}_2[\xi_1, w_1, w_2]/\langle \xi_1^2 = \xi_1 w_1 \rangle$ виконується тільки за умови $\beta = 0$. Отже, $k^*(\sigma_2) = \alpha \xi_1 + w_2$. Маємо також наступний ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} k^*(Sq^2 c_3) &= k^*(\sigma_2 c_3) = \xi_1 w_2(\alpha \xi_1^2 + w_2) = \alpha \xi_1^3 w_2 + \alpha \xi_1 w_2^2, \\ Sq^2(k^* c_3) &= Sq^2(\xi_1 w_2) = \xi_1^2 w_1 w_2 + \xi_1 w_2^2 = \xi_1^3 w_2 + \xi_1 w_2^2. \end{aligned}$$

З останніх співвідношень одержимо рівність $\alpha \xi_1^3 w_2 + \alpha \xi_1 w_2^2 = \xi_1^3 w_2 + \xi_1 w_2^2$, тобто $\alpha = 1$. Таким чином, $k^*(\sigma_2) = \xi_1^2 + w_2$.

Нехай $\varrho^* : H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$ – гомоморфізм когомологій, що індукується коефіцієнтним гомоморфізмом $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2$, $\varrho(1) = 1$. Виконується наступна

Теорема 1. *Існують такі ненульові елементи u, v, z , $u \in H^2(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$, $v \in H^3(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$, $z \in H^4(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ періодів 2, 3, 4 відповідно, які породжують кільце $\tilde{H}(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$, причому, $\varrho^*(u) = \sigma_1^2$, $\varrho^*(v) = c_3 + \sigma_1 \sigma_2$, $\varrho^*(z) = \sigma_2^2$. Більше того, в $\tilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ виконується співвідношення $u(v^2 - uz) = 0$ і всі нетривіальні співвідношення в $\tilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ випливають з останнього.*

Доведення. Оскільки $k^* : \tilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)} \rightarrow \tilde{H}^*(D_4, \mathbb{Z})$ – ін'єкція і в $H^*(D_4, \mathbb{Z})$ виконуються співвідношення $H^{4q}(D_4, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4 \times A_q$, де $2A_q = 0$, $q > 0$, і $\exp H^i(D_4, \mathbb{Z}) \leq 2$ при $i \neq 4q$, $q > 0$, то $\exp H^i(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)} \leq 2$ при $k \neq 4q > 0$ і

$\exp H^{4q}(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)} \leq 4$ при $q \geq 0$. Покажемо, що $H^{4q}(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)} \cong \mathbb{Z}/4 \times B_q$, де $\exp B_q \leq 2$ при $q > 0$. Нехай $\{E_r\}_1^\infty, \{E'_r\}_1^\infty$ – спектральні послідовності Бокштейна mod 2 для $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$ і $H^*(D_4, \mathbb{F}_2)$ відповідно [8]. Вкладення $k : D_4 \rightarrow \Sigma_4$ індукує морфізм τ спектральних послідовностей, $\tau : \{E_r\}_1^\infty \rightarrow \{E'_r\}_1^\infty$. Нехай β_r (β'_r) – диференціал в r -ому члені спектральної послідовності E_r (відповідно E'_r), $\beta_r : E_r \rightarrow E_r$, $\beta'_r : E'_r \rightarrow E'_r$. Маємо $\beta_1(c_3) = Sq^1 c_3 = 0$, $\beta_1(\sigma_1^2) = Sq^1(\sigma_2^2) = 0$. Згідно [8] отримаємо наступні співвідношення:

$$\tau^{(2)} \beta_2 \{c_3\} = \beta'_2 \{\tau^{(1)} c_3\} = \beta'_2 \{\xi_1 w_2\} = \{w_2^2\} = \tau^{(2)} \{\sigma_2^2\} \quad \text{і} \quad E_3 \cong E'_3 = \mathbb{F}_2.$$

Отже, в $H^4(\Sigma_4, \mathbb{Z})$ існує елемент z періоду 4 і в $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})$ не існує елемента з періодом 2^k , де $k > 2$. Крім того, $\varrho^*(z) = \sigma_2^2$ і $k^*(z)$ має період 4, $k^*(z) \in H^*(D_4, \mathbb{Z})$. Оскільки k^* – вкладення, $k^*(z^l) = [k^*(z)]^l$, а $[k^*(z)]^l$ має період 4 (див. [8]), то z^l має також період 4. Отже, $H^{4q}(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)} \cong \mathbb{Z}/4 \times B_q$, де $\exp B_q \leq 2$ і $\exp H^l(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)} \leq 2$, якщо $l > 0$ і $l \not\equiv 0 \pmod{4}$. Далі з формули універсальних коефіцієнтів і з кільцевого гомоморфізму $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\sigma_1, \sigma_2, c_3]/\langle \sigma_1 c_3 = 0 \rangle$ випливає, що група $H^2(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ ізоморфна $\mathbb{Z}/2$ з твірною u , група $H^3(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ ізоморфна $\mathbb{Z}/2$ з твірною v , а група $H^4(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ ізоморфна $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ з твірними z і u^2 відповідно, причому, $\varrho^*(u) = \sigma_1^2$, $\varrho^*(v) = \sigma_1 \sigma_2 + c_3$, $\varrho^*(z) = \sigma_2^2$. Мають місце наступні співвідношення:

$$Sq^1(\sigma_2 c_3) = c_3^2, \quad Sq^1 \sigma_1 = \sigma_1^2, \quad Sq^1 \sigma_1 \sigma_2 = 0, \quad Sq^1 c_3 = 0, \quad Sq^1 \sigma_2 = c_3 + \sigma_1 \sigma_2. \quad (3)$$

Покажемо, що довільний елемент $x \in H^n(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$, $n > 0$, є сумою мономів $u^i v^l z^j$, αz^t , $\alpha = \overline{0, 3}$, тобто кільце $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ породжується елементами u, v, z . Справді, нехай $x \in H^n(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$. Для довільного $y \in \widetilde{H}^l(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$, $y \neq 0$, співвідношення $\varrho^*(y) = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\deg y = 4m$, $m > 0$, і $y = 2z^m$. Отже, якщо $\varrho^*(x) = 0$, то x породжується елементом z .

Нехай $\varrho^*(x) \neq 0$. Припустимо, що у всякому мономі r полінома $\varrho^*(x)$ змінні σ_1, σ_2, c_3 входять з парними степенями. Тоді x породжується елементами u, v, z . Справді, маємо $\varrho^*(u) = \sigma_1^2$, $\varrho^*(z) = \sigma_2^2$, $c_3^2 = (\varrho^*(v))^2 - (\varrho^*(zu))^2$. Отже, $\varrho^*(x) = \varrho^*P(u, v, z)$ для деякого полінома P від змінних u, v, z і $\varrho^*(x - P(u, v, z)) = 0$. Якщо $x - P(u, v, z) = 0$, то $x = P(u, v, z)$. Якщо ж $x - P(u, v, z) \neq 0$, то із сказаного вище випливає, що $x - P(u, v, z) = 2z^s$, де $\deg x = \deg P = 4s = n$. В обидвох випадках x породжується елементами u, v, z .

Залишилось розглянути випадок, коли в усякому мономі r полінома $\varrho^*(x)$ існує змінна, яка входить в r з непарним степенем. Якщо $|x| = 4$, то або $x = z^s + y$, де $|y| = 2$ і в усякому мономі r полінома $\varrho^*(y)$ існує змінна, яка входить в r з непарним степенем, або $y = 0$. Таким чином, достатньо розглянути випадок, коли $|x| = 2$, $\varrho^*(x) \neq 0$ і в усякому мономі полінома $\varrho^*(x)$ існує змінна з непарним степенем. За таких умов $\varrho^*(x)$ можна зобразити у вигляді

$$\varrho^*(x) = \alpha_1 \sigma_1 z_1 + \alpha_2 \sigma_2 z_2 + \alpha_3 \sigma_1 \sigma_2 z_3 + \alpha_4 c_3 z_4 + \alpha_5 \sigma_2 c_3 z_5,$$

де $z_i = \varrho^*(t_i)$ для деяких $t_i \in \widetilde{H}(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$, $z_1, z_3 \in \mathbb{F}_2[\sigma_1, \sigma_2]$, $z_4, z_5 \in \mathbb{F}_2[c_3, \sigma_2]$, $\alpha_i = 0$ або $\alpha_i = 1$, $i = \overline{1, 5}$. Враховуючи (3) і рівність $Sq^1 \varrho^*(x) = 0$, одержимо наступне співвідношення:

$$\alpha_1 \sigma_1^2 z_1 + \alpha_2 (\sigma_1 \sigma_2 + c_3) z_2 + \alpha_5 c_3^2 z_5 = 0. \quad (4)$$

Зауважимо, що змінні σ_1 і σ_2 алгебраїчно незалежні в $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$. Аналогічно, змінні σ_2 і c_3 алгебраїчно незалежні в $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$. Якщо в (4) мономи σ_2^l

входить в z_2 як доданок, то $\alpha_2 = 0$ і тоді, враховуючи (4), одержимо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_5 = 0$, тобто $\varrho^*(x) = \alpha_3\sigma_1\sigma_2z_3 + \alpha_4c_3z_4$.

Нехай $z_2 = \sigma_1z'_2 + c_3z''_2$, де z'_2 — поліном від змінних σ_1, σ_2 , а z''_2 — поліном від змінних c_3, σ_2 , причому, $\sigma_1|z'_2$ і $c_3|z''_2$. Враховуючи (4), одержимо $\alpha_1\sigma_1^2z_1 + \alpha_2\sigma_1^2\sigma_2z'_2 + \alpha_2c_3^2z''_2 + \alpha_5c_3^2z_5 = 0$. З останнього співвідношення випливають рівності:

$$\alpha_1\sigma_1^2z_1 + \alpha_2\sigma_1^2\sigma_2z'_2 = 0, \quad \alpha_2c_3^2z''_2 + \alpha_5c_3^2z_5 = 0. \quad (5)$$

Якщо $\alpha_1 = 0$, то з (5) випливає рівність $\alpha_2 = 0$. Враховуючи (5), з рівності $\alpha_2 = 0$ одержимо $\alpha_5 = 0$. Отже, при $\alpha_1 = 0$ поліном $\varrho^*(x)$ має наступний вигляд: $\varrho^*(x) = \alpha_3\sigma_1\sigma_2z_3 + \alpha_4c_3z_4$. Нехай $\alpha_1 = 1$. Тоді з (3) і (4) випливають рівності $\alpha_2 = \alpha_5 = 1$. В останньому випадку одержимо наступні співвідношення:

$$\sigma_1^2z_1 + \sigma_1^2\sigma_2z'_2 = 0, \quad (6)$$

$$c_3^2z''_2 + c_3^2z_5 = 0. \quad (7)$$

Оскільки σ_1 і σ_2 алгебраїчно незалежні, то з (6) випливає, що $z_1 + \sigma_2z'_2 = 0$. Аналогічно отримаємо співвідношення $z''_2 + z_5 = 0$. З останнього співвідношення одержимо $\sigma_2c_3z''_2 + \sigma_2c_3z_5 = 0$. Отже,

$$\sigma_1z_1 + \sigma_1\sigma_2z'_2 + \sigma_2c_3z''_2 + \sigma_2c_3z_5 = 0.$$

В усіх випадках для $\varrho^*(x)$ виконується співвідношення:

$$\varrho^*(x) = \alpha_3\sigma_1\sigma_2z_3 + \alpha_4c_3z_4. \quad (8)$$

Оскільки період елемента x рівний 2, то в $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$ існує такий елемент $y \in \widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$, що $Sq^1y = \varrho^*(x)$. Елемент y можна зобразити у вигляді

$$y = \gamma_1\sigma_1y_1 + \gamma_2\sigma_2y_2 + \gamma_3\sigma_1\sigma_2y_3 + \gamma_4c_3y_4 + \gamma_5\sigma_2c_3y_5, \quad (9)$$

де $y_1, y_3 \in \mathbb{F}_2[\sigma_1, \sigma_2]$, $y_4, y_5 \in \mathbb{F}_2[\sigma_2, c_3]$, $\gamma_i = 0$ або 1, $i = \overline{1, 5}$, причому, в довільному мономі $\sigma_1^k\sigma_2^l$ або $\sigma_2^tc_3^s$ полінома y_i змінні σ_1, σ_2, c_3 мають парні степені. Маємо $Sq^1y_i = 0$ для $i = \overline{1, 5}$. Оскільки $\varrho^*(x) = \alpha_3\sigma_1\sigma_2z_3 + \alpha_4c_3z_4$, де σ_1 входить в мономи полінома z_3 з парними степенями і $Sq^1(\sigma_1y_1) = \sigma_1^2y_1$, то у формулі (9) для виразу y виконується рівність $\gamma_1 = 0$. Крім того, можна вважати, що $\gamma_4 = \gamma_3 = 0$, оскільки $Sq^1(c_3y_4) = 0$, $Sq^1(\sigma_1\sigma_2y_3) = 0$. Отже, $y = \gamma_2\sigma_2y_2 + \gamma_5\sigma_2c_3y_5$. Маємо $Sq^1y = \gamma_2\sigma_1\sigma_2y_2 + \gamma_2c_3y_2 + \gamma_5c_3^2y_5$. Оскільки змінна c_3 входить в мономи полінома $\varrho^*(x)$ з непарними степенями, то $\gamma_5 = 0$, $y = \sigma_2y_2$, тобто $Sq^1y = \sigma_1\sigma_2y_2 + c_3y_2 = \alpha_3\sigma_1\sigma_2z_3 + \alpha_4c_3z_4$. Останнє співвідношення виконується тільки при $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Отже, $\varrho^*(x) = (\sigma_1\sigma_2 + c_3)y_2$. Оскільки кожний моном полінома y_2 містить змінні тільки з парними степенями, то $y_2 = \varrho^*P(u, v, z)$ для деякого полінома P . Маємо $\varrho^*(vP) = \varrho^*(x) = (\sigma_1\sigma_2 + c_3)y_2$, тобто $x - vP = 0$ або $x - vP = 2z^s$ для деякого $s > 0$. Отже, x породжується елементами u, v, z .

В кільці $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ між елементами u, v, z можливі співвідношення (нетривіальні) мають наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^t u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i} = 0, \text{ де } 2k_i + 3l_i + 4s_i = n, \quad i = \overline{1, t} \quad (10)$$

або

$$\sum_{i=1}^t u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i} = 2z^n, \text{ де } 2k_i + 3l_i + 4s_i = 4n, \quad i = \overline{1, t} \quad (11)$$

Припустимо, що в $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ виконується нетривіальне співвідношення (11). Тоді $k_i > 0$ або $l_i > 0$ для всіх $i = \overline{1, t}$, оскільки $|z^n| = 4$ і $|2z^n| = 2$. Розглянемо точну пару

$$\begin{array}{ccc} D = H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i'} & H^*(\Sigma_4, \mathbb{Z}) \\ & \swarrow k' \quad \searrow j' & \\ & H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2), & \end{array}$$

де $j' = \varrho^*$. Зведемо подібні члени в лівій частині співвідношення (11). Позначимо ліву частину цього співвідношення через P . Подіявши на обидві частини співвідношення (11) гомоморфізмом ϱ^* , одержимо $\varrho^*P = 0$. Нехай $u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}$ – довільний моном полінома P . Маємо

$$\varrho^*(u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}) = \sigma_1^{2k_i} (\sigma_1 \sigma_2 + c_3)^{l_i} \sigma_2^{2s_i} = \sigma_1^{2k_i+l_i} \sigma_2^{2s_i+l_i} + \sigma_1^{2k_i} c_3^{l_i} \sigma_2^{2s_i}.$$

Якщо $k_i = 0$, то $\varrho^*(u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}) = \sigma_1^{l_i} \sigma_2^{2s_i+l_i} + c_3^{l_i} \sigma_2^{2s_i}$ і співвідношення (11), очевидно, може виконуватись тільки в тому випадку, коли в P входить моном такого ж вигляду $u^0 v^{l_j} z^{s_j}$, причому, $l_i = l_j$ і $2s_i = 2s_j$. Але тоді в P є подібні члени, що суперечить сказаному вище. Отже, $k_i > 0$ для всіх $i \in \overline{1, t}$, і тому поліном P зображається у вигляді $P = uP_1$, де P_1 – деякий поліном від змінних u, v, z . Маємо $k'(\sigma_1 \varrho^*(P_1)) = uP_1$ і $0 = \varrho^*(P) = \varrho^*(u) \varrho^*(P_1) = \sigma_1^2 \varrho^*(P_1)$. З останніх рівностей одержимо $\sigma_1 \varrho^*(P_1) = 0$, $P = k'(\sigma_1 \varrho^*(P_1)) = k'(0)$. Ми отримали суперечність, оскільки елемент $2z^n$ має період 2 і тому $2z^n \neq 0$. Отже, в $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ не виконуються співвідношення (11).

Розглянемо тепер можливе нетривіальне співвідношення (10). Зведемо подібні члени в лівій частині рівності (10). Позначимо поліном $\sum_{i=1}^t u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}$ через P . Як і в попередньому випадку, для довільного монома $u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}$ полінома P виконується умова $k_i > 0$. Розглянемо довільний моном $u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}$ полінома P . Маємо $\varrho^*(u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}) = \sigma_1^{2k_i+l_i} \sigma_2^{2s_i+l_i}$, оскільки $k_i > 0$. Подіявши на обидві частини рівності (10) гомоморфізмом ϱ^* , одержимо співвідношення

$$\sum_{i=1}^t \sigma_1^{2k_i+l_i} \sigma_2^{2s_i+l_i} = 0. \quad (12)$$

Оскільки σ_1 і σ_2 алгебраїчно незалежні в $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$, то рівність (12) виконується тільки в тому випадку, коли для довільного монома $u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}$ полінома P існує такий моном $u^{k_j} v^{l_j} z^{s_j}$ полінома P , що $2k_i+l_i = 2k_j+l_j$ і $2s_i+l_i = 2s_j+l_j$. Таким чином, всі мономи полінома P розбиваються на пари $\langle u^{k_i} v^{l_i} z^{s_i}, u^{k_j} v^{l_j} z^{s_j} \rangle$, так що для кожної з них виконуються умови $2k_i+l_i = 2k_j+l_j$, $2s_i+l_i = 2s_j+l_j$. Отже, довільне нетривіальне співвідношення (12) впливає з співвідношень вигляду

$$u^{k_1} v^{l_1} z^{s_1} = u^{k_2} v^{l_2} z^{s_2}, \quad k_i > 0, \text{ де } 2k_1+l_1 = 2k_2+l_2, \quad 2s_1+l_1 = 2s_2+l_2. \quad (13)$$

Розглянемо можливе нетривіальне співвідношення (13). Для визначеності, нехай $s_2 \leq s_1$. Маємо $(u^{k_2}v^{l_2} - u^{k_1}v^{l_1}z^{s_1-s_2})z^{s_2} = 0$ і

$$\varrho^*(u^{k_2}v^{l_2} - u^{k_1}v^{l_1}z^{s_1-s_2})\varrho^*(z^{s_2}) = \varrho^*(u^{k_2}v^{l_2} - u^{k_1}v^{l_1}z^{s_1-s_2})\sigma_2^{2s_2} = 0.$$

Оскільки $\sigma_2^{2s_2}$ не є дільником нуля в $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$, то $\varrho^*(u^{k_2}v^{l_2} - u^{k_1}v^{l_1}z^{s_1-s_2}) = 0$. Далі, оскільки в $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ не існує співвідношень вигляду $u^{k_2}v^{l_2} - u^{k_1}v^{l_1}z^{s_1-s_2} = 2z^l$, то співвідношення $\varrho^*(u^{k_2}v^{l_2} - u^{k_1}v^{l_1}z^{s_1-s_2}) = 0$ еквівалентне наступному:

$$u^{k_2}v^{l_2} - u^{k_1}v^{l_1}z^{s_1-s_2} = 0, \text{ де } 2k_1 + l_1 = 2k_2 + l_2, \quad 2(s_1 - s_2) + l_1 = l_2. \quad (14)$$

Зауважимо, що в $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ виконується нетривіальне співвідношення $uv^2 - u^2z = 0$. Справді,

$$\varrho^*(uv^2 - u^2z) = \sigma_1^2(\sigma_1\sigma_2 + c_3)^2 + \sigma_1^4\sigma_2^2 = \sigma_1^2(\sigma_1^2\sigma_2^2 + c_3^2) + \sigma_1^4\sigma_2^2 = 0.$$

Оскільки $uv^2 - u^2z \neq 2z^2$, то рівність $\varrho^*(uv^2 - u^2z) = 0$ виконується тільки за умови $uv^2 - u^2z = 0$.

Якщо в (14) $l_2 = 0$ або $l_2 = 1$, то $s_2 - s_1 = 0$ і $l_2 = l_1$, $2k_1 = 2k_2$, тобто ми маємо тривіальне співвідношення $u^{k_1}v^{l_1} = u^{k_1}v^{l_1}$. Якщо в (14) $s_2 - s_1 = 0$, то $k_2 = k_1$ і $l_2 = l_1$, і ми знову отримали тривіальне співвідношення $u^{k_1}v^{l_1} = u^{k_1}v^{l_1}$. Нехай $s = s_1 - s_2 > 0$. Тоді $k_1 = s + k_2 \geq 1 + 1 = 2$ і виконуються рівності

$$u^{k_1}v^{l_1}z^s = u^{k_1-2}v^{l_1}z^{s-1}(u^2z) = u^{k_1-2}v^{l_1}z^{s-1}(uv^2) = u^{k_1-1}v^{l_1+2}z^{s-1},$$

де $2(k_1 - 1) + (l_1 + 2) = 2k_1 + l_1 = 2k_2 + l_2$ і $2(s - 1) + (l_1 + 2) = 2s + l_1 = l_2$. Отже, співвідношення $u^{k_2}v^{l_2} = u^{k_1}v^{l_1}z^s$, де $l_2 - l_1 = 2s = 2(k_1 - k_2) > 0$, випливає із співвідношень $u^2z = uv^2$, $u^{k_2}v^{l_2} = u^{k_1-1}v^{l_1+2}z^{s-1}$. Застосовуючи індукцію по числу $s - j$, ми отримаємо наступне твердження: співвідношення $u^{k_2}v^{l_2} = u^{k_1}v^{l_1}z^s$, де $l_2 - l_1 = 2s = 2(k_1 - k_2) > 0$, випливає із співвідношень $u^2z = uv^2$, $u^{k_2}v^{l_2} = u^{k_1-s}v^{l_1+2s}z^0$, де $k_1 - s = k_2$ і $l_1 + 2s = l_2$, тобто із співвідношення $u^2z = uv^2$.

Твердження 1 і теорема 1 повністю визначають кільцеву структуру в $\widetilde{H}^*(\Sigma_4, \mathbb{Z})$.

Перейдемо до обчислення мультиплікативної структури кільця $H^*(A_6, \mathbb{Z})$. Спочатку обчислимо $H^*(A_6, \mathbb{Z})_{(3)}$ і $H^*(A_6, \mathbb{Z})_{(5)}$.

Підстановка $d = (12345)(6)$ породжує силовську 5-підгрупу $A_{6,5}$ групи A_6 , $A_{6,5} \cong \mathbb{Z}/5$, а підстановка $d_1 = (12345)$ породжує силовську 5-підгрупу $A_{5,5}$ групи A_5 , $A_{5,5} \cong \mathbb{Z}/5$. Легко бачити, що підкільце A_6 -інваріантних елементів кільця $\widetilde{H}^*(A_{6,5}, \mathbb{Z})_{(5)}$ збігається з підкільцем g -інваріантних елементів цього кільця, де $g = (25)(34)$, $gdg^{-1} = d^4$. Аналогічно, підкільце A_5 -інваріантних елементів кільця $\widetilde{H}^*(A_{5,5}, \mathbb{Z})$ збігається з підкільцем g_1 -інваріантних елементів цього ж кільця, де $g_1 = (25)(34)$, $g_1d_1g_1^{-1} = d_1^4$. Таким чином, виконується наступне

Твердження 3. *Кільця $\widetilde{H}^*(A_5, \mathbb{Z})_{(5)}$ і $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(5)}$ ізоморфні.*

З [3] випливає ізоморфізм $H^*(A_5, \mathbb{F}_5) \cong \mathbb{F}_5[y^2] \otimes \Lambda[xy]$, де y – твірна групи $H^2(A_{5,5}, \mathbb{F}_5) \cong \mathbb{F}_5$, x – твірна групи $H^1(A_{5,5}, \mathbb{F}_5) \cong \mathbb{F}_5$. Нехай $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_5$ – канонічний гомоморфізм, $\varrho(1) = 1$, а $\varrho^* : H^*(A_6, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(A_6, \mathbb{F}_5)$ – гомоморфізм когомологій, індукований коефіцієнтним гомоморфізмом ϱ . Із сказаного вище і з теореми про універсальні коефіцієнти випливає наступне

Твердження 4. $H^*(A_6, \mathbb{F}_5) \cong \mathbb{F}_5[y^2] \otimes \Lambda[xy]$, де y – твірні групи $H^2(A_{6,5}, \mathbb{F}_5) \cong \mathbb{F}_5$, x – твірні групи $H^1(A_{6,5}, \mathbb{F}_5) \cong \mathbb{F}_5$. Крім того, якщо y_1 – твірні групи $H^4(A_6, \mathbb{Z})_{(5)}$, $H^4(A_6, \mathbb{Z})_{(5)} \cong \mathbb{Z}/5$, то y_1^n – твірні групи $H^{4n}(A_6, \mathbb{Z})_{(5)}$, $H^{4n}(A_6, \mathbb{Z})_{(5)} \cong \mathbb{Z}/5$, $n > 0$, причому, $\varrho^*(y_1) = y$ і $H^l(A_6, \mathbb{Z})_{(5)} = 0$ при $l \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Твердження 4 повністю описує кільцеву структуру в $H^*(A_6, \mathbb{Z})_{(5)}$.

Підгрупа $A_{6,3}$ групи A_6 , породжена підстановками (123), (456) є силовською 3-підгрупою групи A_6 , $A_{6,3} \cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$. Нехай $\varphi : \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \rightarrow A_6$ – відповідне вкладення групи $A_{6,5}$ в групу A_6 . Легко бачити, що підкільце A_6 -інваріантних елементів кільця $\widetilde{H}^*(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})_{(3)}$ збігається з підкільцем $\{g, h\}$ -інваріантних елементів, де $g = (12)(45)$, $h = (1524)(36)$. Нехай r – твірні групи $H^2(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$, $e = pr_1^*(r)$, $f = pr_2^*(r)$, де pr_i – проекція групи $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$ на i -у компоненту, $i = \overline{1, 2}$. Кільце $\mathcal{U} = \widetilde{H}^*(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$ породжується елементами e, f, s , де $e, f \in H^2(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$, $H^2(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$, $s \in H^3(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z})$, $H^3(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3$, причому, для e, f, s виконуються співвідношення $ef = fe$, $se = es$, $sf = fs$, $s^2 = 0$.

Підкільце $\mathcal{U}_1$ g -інваріантних елементів кільця $\mathcal{U}$ породжується елементами e^2, f^2, ef, s . Іншими словами, якщо $\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_1 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathbb{Z}/3$, розглянути як алгебру над $\mathbb{F}_3$, то має місце ізоморфізм $\mathcal{U}'_1 \cong \mathbb{F}_3[e^2, f^2, ef] \otimes \Lambda[s]$. Крім того, маємо $h^*(e^2) = e^2$, $h^*(f^2) = f^2$, $h^*(ef) = -ef$, $h^*(s) = s$. Нехай $\mathcal{U}_2$ – підкільце всіх h -інваріантних елементів кільця $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}'_2 = \mathbb{Z}/3 \oplus \mathcal{U}_2$. Якщо $\mathcal{U}'_2$ розглянути як алгебру над $\mathbb{F}_3$, то має місце ізоморфізм $\mathcal{U}'_2 \cong \mathbb{F}_3[e^2, f^2] \otimes \Lambda[s]$. Нехай $\alpha = \varphi^*(e^2)$, $\beta = \varphi^*(f^2)$, $t = \varphi^*(s)$. Із сказаного вище впливає наступне

Твердження 5. Кільце $\mathcal{U}_2 = \widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(3)}$ породжується елементами α, β, t , для яких виконуються наступні нетривіальні співвідношення: $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha t = t\alpha$, $\beta t = t\beta$, $t^2 = 0$.

Твердження 5 повністю описує кільцеву структуру $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(3)}$.

Обчислимо кільце когомологій $H^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$. Знайдемо спочатку образ гомоморфізму скорочення $i^* : H^*(A_6, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(D_4, \mathbb{F}_2)$, де i – вкладення груп з діаграми (2).

Твердження 6. Дія мономорфізму i^* на $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$ задається наступними рівностями: $i^*(\sigma_2) = w_1^2 + w_2$, $i^*(\sigma_3) = \xi_1 w_2 + w_1 w_2$, $i^*(c_3) = \xi_1 w_2$.

Доведення твердження 6 проводиться за аналогією з доведенням твердження 2, з використанням дії алгебри Стінрода на кільцях $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$, $H^*(D_4, \mathbb{F}_2)$ і співвідношення $j_1^* i_1^*(c_3) = 0$ [2], де j_1, i_1 – відповідні мономорфізми з діаграми (2)

Теорема 2. Існують такі ненульові елементи x, z, v , $x \in H^3(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$, $z \in H^4(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$, $v \in H^6(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ періодів 3, 4, 6 відповідно, які породжують кільце $\widetilde{H}(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$, причому, $\varrho^*(x) = \sigma_3 + c_3$, $\varrho^*(z) = \sigma_2^2$, $\varrho^*(v) = c_3^2$. Більше того, в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ виконуються співвідношення $v^2 - vx^2 = 0$ і всі нетривіальні співвідношення в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ випливають з останнього.

Доведення. Оскільки $i^* : H^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)} \rightarrow H^*(D_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ – мономорфізм і в $H^*(D_4, \mathbb{Z})$ мають місце співвідношення $H^{4q}(D_4, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4 \times A_q$, $2A_q = 0$, де $q > 0$, і $\exp H^i(D_4, \mathbb{Z}) \leq 2$ при $i \neq 4q$, $i > 0$, то $\exp H^l(A_6, \mathbb{Z})_{(2)} \leq 2$ при $l \neq 4q$ і $\exp H^{4q}(A_6, \mathbb{Z})_{(2)} \leq 4$ при $q > 0$. Нехай $\{E_r\}_1^\infty, \{E'_r\}_1^\infty$ – спектральні послідовності Бокштейна mod 2 для $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$ і $H^*(D_4, \mathbb{F}_2)$ відповідно. Вкладення $i : D_4 \rightarrow A_6$ індукує морфізм спектральних послідовностей

$\tau : \{E_r\}_1^\infty \rightarrow \{E'_r\}_1^\infty$. Нехай $\beta_r(\beta'_r)$ – диференціал в r -ому члені спектральної послідовності $\{E_r\}_1^\infty$ (відповідно $\{E'_r\}_1^\infty$), $\beta_r : E_r \rightarrow E_r$, $\beta'_r : E'_r \rightarrow E'_r$. Маємо $\beta_1(c_3 + \sigma_3) = \beta_1(c_3) + \beta_1(\sigma_3) = 0$, $\beta_1(\sigma_2^2) = Sq^1\sigma_2^2 = 0$. Згідно [8] і твердження 6 виконуються наступні співвідношення: $\tau^{(2)}\beta_2\{c_3 + \sigma_3\} = \beta'_2\{\tau^{(1)}(c_3 + \sigma_3)\} = \beta'_2\{\xi_1 w_2\} = \{w_2^2\} = \{w_2^2 + w_1^4\} = \tau^{(2)}\{\sigma_2^2\}$ і $E_3 = E'_3 = \mathbb{F}_2$. Отже, в $H^4(A_6, \mathbb{Z})$ існує елемент z з періодом 4 і в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ не існує елемента з періодом $2^l = |z|$, де $l > 2$. Оскільки i^* – вкладення, то $i^*(z^l) = (i^*z)^l$, а $(i^*z)^l$ має період 4, то z^l також має період 4. Отже, $H^{4q}(A_6, \mathbb{Z})_{(2)} \cong \mathbb{Z}/4 \times A_q$, де $\exp A_q \leq 2$ і $\exp H^l(A_6, \mathbb{Z})_{(2)} \leq 2$, якщо $l > 0$ і $l \not\equiv 0 \pmod{4}$.

З формули універсальних коефіцієнтів і з кільцевого ізоморфізму

$$H^*(A_6, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\sigma_2, \sigma_3, c_3] / \langle \sigma_3 c_3 = 0 \rangle$$

впливає, що група $H^3(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ ізоморфна $\mathbb{Z}/2$ з твірною x , група $H^4(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ ізоморфна $\mathbb{Z}/4$ з твірною z , група $H^6(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ ізоморфна $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ з твірними v і x^2 відповідно, причому, $\varrho^*(x) = \sigma_3 + c_3$, $\varrho^*(z) = \sigma_2^2$, $\varrho^*(v) = c_3^2$. Крім того, $H^1(A_6, \mathbb{Z})_{(2)} \cong H^2(A_6, \mathbb{Z})_{(2)} = 0$ і виконуються співвідношення

$$Sq^1 c_3 = Sq^1 \sigma_3 = 0, \quad Sq^1 \sigma_2 = c_3 + \sigma_3, \quad Sq^1 \sigma_2 c_3 = c_3^2, \quad Sq^1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_3^2. \quad (15)$$

Покажемо, що довільний елемент $y \in H^n(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$, $n > 0$, є сумою мономів $x^i v^k z^j$, αz^t , де $\alpha = \overline{0, 3}$, тобто кільце $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ породжується елементами x, z, v . Нехай $y \in \widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$, $y \neq 0$. Як і при доведенні теореми 1, нетривіальним є випадок, коли y має період 2, $\varrho^*(y) \neq 0$ і в усякий моном полінома $\varrho^*(y)$ входить змінна з непарним степенем. За таких умов $\varrho^*(y)$ можна зобразити у вигляді:

$$\varrho^*(y) = \alpha_1 \sigma_2 y_1 + \alpha_2 \sigma_3 y_2 + \alpha_3 \sigma_2 \sigma_3 y_3 + \alpha_4 c_3 y_4 + \alpha_5 c_3 \sigma_2 y_5, \quad (16)$$

де $y_i = \varrho^*(t_i) \neq 0$, $t_i \in H^n(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$, y_2, y_3 – поліноми від змінних σ_2, σ_3 ; y_4, y_5 – поліноми від змінних σ_2, c_3 ; $\alpha_i = 0$ або 1, $i = \overline{1, 5}$. Використовуючи (15) і рівність $Sq^1 \varrho^*(y) = 0$, одержимо наступне співвідношення:

$$\alpha_1(\sigma_3 + c_3)y_1 + \alpha_3 \sigma_3^2 y_3 + \alpha_5 c_3^2 y_5 = 0. \quad (17)$$

Зауважимо, що змінні σ_2 і σ_3 алгебраїчно незалежні в $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$. Аналогічно, змінні σ_2, c_3 алгебраїчно незалежні в $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$. Зобразимо y_1 у вигляді $y_1 = s_1 + s_2$, де s_1 – поліном від σ_2^2, σ_3^2 , а s_2 – поліном від σ_2^2, c_3^2 . Підставляючи $y_1 = s_1 + s_2$ в (17), одержимо рівність $P_1(\sigma_2, \sigma_3) + P_2(\sigma_2, c_3) = 0$, де $P_1(\sigma_2, \sigma_3) = \alpha_1 \sigma_3 s_1 + \alpha_3 \sigma_3^2 y_3$, $P_2(\sigma_2, c_3) = \alpha_1 c_3 s_2 + \alpha_5 c_3^2 y_5$. Остання рівність виконується в $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$ тільки за умови $P_1(\sigma_2, \sigma_3) = P_2(\sigma_2, c_3) = 0$. Оскільки змінні σ_2 і σ_3 алгебраїчно незалежні, змінна σ_3 входить в $\alpha_1 \sigma_3 s_1$ з непарним степенем, а в $\alpha_3 \sigma_3^2 y_3$ – з парним степенем, то рівність $P_1(\sigma_2, \sigma_3) = 0$ виконується тільки за умови $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. З рівностей $\alpha_1 = 0$ і $P_2(\sigma_2, c_3) = 0$ впливає співвідношення $\alpha_5 = 0$. Отже, (17) виконується тільки в тому випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$. Таким чином, $\varrho^*(y) = \alpha_2 \sigma_3 y_2 + \alpha_4 c_3 y_4$. Далі, оскільки $|y| = 2$, то існує таке $u \in H^{n-1}(A_6, \mathbb{F}_2)$,

$$u = \gamma_1 \sigma_2 u_1 + \gamma_2 \sigma_3 u_2 + \gamma_3 \sigma_2 \sigma_3 u_3 + \gamma_4 c_3 u_4 + \gamma_5 \sigma_2 c_3 u_5,$$

де u_2, u_3 – поліноми від змінних σ_2^2, σ_3^2 ; u_4, u_5 – поліноми від змінних σ_2^2, c_3^2 ; u_1 – поліном від змінних $\sigma_2^2, \sigma_3^2, c_3^2$; $\gamma_i = 0$ або $\gamma_i = 1$, $i = \overline{1, 5}$, що $Sq^1 u = \varrho^*(y)$. Можна вважати, що $\gamma_2 = \gamma_4 = 0$, оскільки $Sq^1(\sigma_3 u_2) = 0 = Sq^1(c_3 u_4)$. Маємо

$$\begin{aligned} Sq^1 u &= \gamma_1(Sq^1 \sigma_2)u_1 + \gamma_3(Sq^1(\sigma_2 \sigma_3))u_3 + \gamma_5(Sq^1(\sigma_2 c_3))u_5 = \\ &= \gamma_1 \sigma_3 u_1 + \gamma_1 c_3 u_1 + \gamma_3 \sigma_3^2 u_3 + \gamma_5 c_3^2 u_5 = \alpha_2 \sigma_3 y_2 + \alpha_4 c_3 y_4. \end{aligned} \quad (18)$$

Подано (18) у вигляді

$$\gamma_3 \sigma_3^2 u_3 + \gamma_5 c_3^2 u_5 = \alpha_2 \sigma_3 y_2 + \alpha_4 c_3 y_4 + \gamma_1(\sigma_3 + c_3)u_1. \quad (19)$$

Оскільки в лівій частині співвідношення (19) змінні σ_3, σ_2, c_3 мають парний степінь, а в правій – непарний, отримаємо рівності:

$$\gamma_3 \sigma_3^2 u_3 + \gamma_5 c_3^2 u_5 = 0, \quad \alpha_2 \sigma_3 y_2 + \alpha_4 c_3 y_4 + \gamma_1(\sigma_3 + c_3)u_1 = 0.$$

Оскільки u_3 – поліном від σ_2 і σ_3 , u_5 – поліном від σ_2 і c_3 , а в $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$ змінні σ_3 і σ_2 алгебраїчно незалежні, то співвідношення $\gamma_3 \sigma_3^2 u_3 + \gamma_5 c_3^2 u_5 = 0$ виконується тільки тоді, коли $\gamma_3 = \gamma_5 = 0$. З рівностей $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$ і з умови $u \neq 0$ випливає рівність $\gamma_1 \neq 0$. Маємо $\alpha_2 \sigma_3 y_2 + \alpha_4 c_3 y_4 + \sigma_3 u_1 + c_3 u_1 = 0$. З останнього співвідношення випливає рівність $\varrho^*(y) = \alpha_2 \sigma_3 y_2 + \alpha_4 c_3 y_4 = (\sigma_3 + c_3)u_1$. Оскільки в кожному одночлені полінома P змінні σ_2, σ_3, c_3 входять тільки з парними степенями, то u_1 можна зобразити у вигляді $u_1 = \varrho^*(Q(x, z, v))$, де $Q(x, z, v) = \sum_{i=1}^s x^{k_i} v^{l_i} z^{m_i}$. Маємо $\varrho^*(y) = (\sigma_3 + c_3)\varrho^*(Q) = \varrho^*(x) \cdot \varrho^*(Q)$ і $\varrho^*(y - xQ) = 0$. Якщо $\deg y \not\equiv 0 \pmod{4}$, то $y = xQ$. Якщо $\deg y \equiv 0 \pmod{4}$, то $y - xQ = 2\alpha z^l$, де $\alpha = 0$ або $\alpha = 1$, $l > 0$. В усіх випадках елемент y кільця $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ породжується елементами x, z, v .

В кільці $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ між елементами x, z, v можливі нетривіальні співвідношення мають наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^t x^{k_i} v^{l_i} z^{s_i} = 0, \text{ де } 3k_i + 4s_i + 6l_i = n, \quad i = \overline{1, t} \quad (20)$$

або

$$\sum_{i=1}^t x^{k_i} v^{l_i} z^{s_i} = 2z^m, \text{ де } 3k_i + 4s_i + 6l_i = 4m, \quad i = \overline{1, t} \quad (21)$$

Припустимо, що в $\widetilde{H}(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ виконується нетривіальне співвідношення (21). Тоді $k_i > 0$ або $l_i > 0$ для всіх $i = \overline{1, t}$, оскільки $|z^m| = 4$ і $|2z^m| = 2$. Розглянемо точну пару

$$\begin{array}{ccc} D = H^*(A_6, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i'} & H^*(A_6, \mathbb{Z}) \\ & \swarrow k' \quad \searrow j' & \\ & H^*(A_6, \mathbb{F}_2), & \end{array}$$

де $j' = \varrho^*$. Зведемо подібні члени в лівій частині співвідношення (21). Позначимо ліву частину цього співвідношення через P . Подіявши на обидві частини

співвідношення (21) гомоморфізмом ϱ^* , одержимо $\varrho^*P = 0$. Нехай $x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}$ – довільний моном полінома P . Маємо

$$\varrho^*(x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}) = (\sigma_3 + c_3)^{k_i}c_3^{2l_i}\sigma_2^{2s_i} = \sigma_3^{k_i}c_3^{2l_i}\sigma_2^{2s_i} + c_3^{k_i+2l_i}\sigma_2^{2s_i}.$$

Якщо $l_i = 0$, то $\varrho^*(x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}) = \sigma_3^{k_i}\sigma_2^{2s_i} + c_3^{k_i}\sigma_2^{2s_i}$ і співвідношення (21) може виконуватись тільки в тому випадку, коли в P входить моном такого ж вигляду $x^{k_j}v^0z^{s_j}$, причому, $k_i = k_j$ і $s_i = s_j$. Але тоді в P є подібні члени, що суперечить сказаному вище. Отже, $l_i \neq 0$ для всіх $i \in \overline{1, t}$, і тому поліном P зображається у вигляді $P = vP_1$, де P_1 – деякий поліном від змінних x, v, z . Маємо $k'(\sigma_2c_3\varrho^*(P_1)) = vP_1$, $0 = \varrho^*(P) = \varrho^*(v)\varrho^*(P_1) = c_3^2\varrho^*(P_1)$. Ми отримали суперечність $P = k'(\sigma_2c_3\varrho^*(P_1)) = 0$, оскільки елемент z^m має період 4. Отже, в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ не виконується рівність (21).

Розглянемо тепер можливе нетривіальне співвідношення (20). Зведемо подібні члени в лівій частині рівності (20). Позначимо поліном $\sum_{i=1}^t x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}$ через P . Як і в попередньому випадку, для довільного монома $x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}$ полінома P виконується умова $l_i > 0$. Розглянемо довільний моном $x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}$ полінома P . Маємо $\varrho^*(x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}) = c_3^{k_i+2l_i}\sigma_2^{2s_i}$, оскільки $l_i > 0$. Подіявши гомоморфізмом ϱ^* на обидві частини рівності (20), одержимо співвідношення

$$\sum_{i=1}^t c_3^{k_i+2l_i}\sigma_2^{2s_i} = 0. \quad (22)$$

Оскільки c_3 і σ_2 алгебраїчно незалежні в $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$, то співвідношення (22) може виконуватись тільки в тому випадку, коли для довільного монома $x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}$ в лівій частині рівності (20) існує такий моном $x^{k_j}v^{l_j}z^{s_j}$ полінома P , що $k_i + 2l_i = k_j + 2l_j$ і $2s_i = 2s_j$. Таким чином, всі мономи полінома P розбиваються на пари $\langle x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i}, x^{k_j}v^{l_j}z^{s_j} \rangle$, так що для кожної з них виконуються умови $k_i + 2l_i = k_j + 2l_j$, $2s_i = 2s_j$. Оскільки $\varrho^*(x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i} - x^{k_j}v^{l_j}z^{s_j}) = 0$ і в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ не виконується співвідношення (21), то одержимо $x^{k_i}v^{l_i}z^{s_i} - x^{k_j}v^{l_j}z^{s_j} = 0$. Отже, довільне нетривіальне співвідношення (20) впливає із співвідношень вигляду

$$x^{k_1}v^{l_1}z^{s_1} = x^{k_2}v^{l_2}z^{s_2}, \quad k_1 + 2l_1 = k_2 + 2l_2, \quad s_1 = s_2. \quad (23)$$

Розглянемо довільне нетривіальне співвідношення вигляду (23). Маємо

$$(x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2})z^{s_1} = 0, \quad \varrho^*(x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2})\varrho(z^{s_1}) = \varrho(x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2})\sigma_2^{2s_1} = 0.$$

Оскільки $\sigma_2^{2s_1}$ не є дільником нуля в $H^*(A_6, \mathbb{F}_2)$, то із співвідношення $\varrho^*(x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2})\sigma_2^{2s_1} = 0$ випливає рівність $\varrho^*(x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2}) = 0$. Далі, оскільки в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ не виконується співвідношення вигляду $x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2} = 2z^r$, то співвідношення $\varrho^*(x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2}) = 0$ еквівалентне наступному

$$x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_2}v^{l_2} = 0, \quad k_1 + 2l_1 = k_2 + 2l_2. \quad (24)$$

Зауважимо, що в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ виконується нетривіальне співвідношення $x^2v = v^2$. Справді,

$$\varrho^*(x^2v - v^2) = (\sigma_3 + c_3)^2c_3^2 + c_3^4 = \sigma_3^2c_3^2 + c_3^4 + c_3^4 = 0.$$

Оскільки $x^2v - v^2 \neq 2z^3$, то із співвідношення $\varrho^*(x^2v - v^2) = 0$ випливає рівність $x^2v - v^2 = 0$. Якщо в співвідношенні (24) $l_1 = l_2$, то $k_1 = k_2$, і (24) вироджується в тривіальне співвідношення $x^{k_1}v^{l_1} - x^{k_1}v^{l_1} = 0$. Нехай для визначеності $l_1 > l_2$. Оскільки $k_2 - k_1 = 2(l_1 - l_2)$ і $l_1 - l_2 \geq 1$, то $k_2 \geq 2$. Використовуючи $(l_1 - l_2)$ разів співвідношення $x^2v = v^2$, одержимо ланцюжок рівностей

$$x^{k_2}v^{l_2} = x^{k_2-2}v^{l_2-1}(x^2v) = x^{k_2-2}v^{l_2-1}v^2 = x^{k_2-2}v^{l_2+1} = x^{k_2-4}v^{l_2+2} = \dots = x^{k_1}v^{l_1}.$$

Таким чином, довільне співвідношення вигляду (24) в $\widetilde{H}^*(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$ випливає із співвідношення $x^2v = v^2$.

Твердження 5,6 і теорема 2 повністю описують кільцеву структуру в $\widetilde{H}^*(A, \mathbb{Z})$.

§3.

В цій частині праці ми використаємо результати §2 про кільцеву структуру когомологій груп Σ_4 , A_6 для отримання вимірних обмежень на існування вільних дій цих груп на добутках сфер.

Теорема 3. *Нехай X – скінченновимірний CW -комплекс, $X \sim_{\mathbb{Z}} S^m \times S^n$, на якому існує вільна дія групи A_6 . Тоді $n \equiv -1 \pmod{4}$ і $m \equiv -1 \pmod{12}$ або $m \equiv -1 \pmod{4}$ і $n \equiv -1 \pmod{12}$.*

Доведення. Припустимо, що на X існує вільна дія групи A_6 . Оскільки група A_4 не може діяти вільно на скінченновимірному CW -комплексі X , де $X \sim S^n \times S^n$ [9], і $A_4 \subset A_6$, то $m \neq n$. Нехай для визначеності $m > n$. Тоді індукована дія групи A_6 на когомологіях $H^*(X, \mathbb{Z})$ тривіальна. Розглянемо спектральну послідовність когомологій $\{E_r^*, d_r\}_{r=1}^{\infty}$ з коефіцієнтами в $\mathbb{Z}$ для розшарування Серра $X \times_G EG \xrightarrow{p} BG$, де $G = A_6$. Другий член спектральної послідовності $\{E_r\}_1^{\infty}$ має наступний вигляд:

$$E_2^{m,n} \cong H^m(A_6, \mathbb{Z}) \otimes H^n(X, \mathbb{Z}).$$

Оскільки група A_6 діє вільно на X , то $X_G = X \times_G EG \sim X/G$ [9] і спектральна послідовність $\{E_r^*\}_1^{\infty}$ збігається до $H^*(X/G, \mathbb{Z})$. Крім того, з твердження А.П [5] випливає, що $\text{cd}_{\mathbb{F}_3}(X/G) \leq \text{cd}_{\mathbb{F}_3}(X) = m+n$ і $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq \text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X) = m+n$. Припустимо, що $m \not\equiv -1 \pmod{4}$ або $n \not\equiv -1 \pmod{4}$. Тоді з мультиплікативності спектральної послідовності випливає, що всі класи $\{\alpha^i\}$, $i > m+n+1$, або всі класи $\{\beta^i\}$, $i > m+n+1$, де α, β – твірні групи $H^4(A_6, \mathbb{Z})_{(3)}$, доживають до E_{∞}^* . Маємо $\text{cd}_{\mathbb{Z}}(X/G) = \infty$ і $\text{cd}_{\mathbb{F}_3}(X/G) = \infty$, що суперечить нерівності $\text{cd}_{\mathbb{F}_3}(X/G) \leq m+n$. Отже, $m \equiv -1 \pmod{4}$ і $n \equiv -1 \pmod{4}$. Якщо $m \not\equiv -1 \pmod{3}$ і $n \equiv -1 \pmod{3}$, то з мультиплікативних властивостей спектральної послідовності випливає, що всі класи $\{x^i\}$, $i > m+n+1$, доживають до E_{∞}^* , де x – твірна групи $H^3(A_6, \mathbb{Z})_{(2)}$. З отриманої суперечності випливає, що $m \equiv -1 \pmod{3}$ або $n \equiv -1 \pmod{3}$.

Теорема 4. *Група Σ_4 не може діяти вільно на $S^3 \times S^k$, де $k \geq 3$.*

Доведення. Оскільки група A_4 не може діяти вільно на $S^3 \times S^3$, а $A_4 \subset \Sigma_4$, то група Σ_4 не може діяти вільно на $S^3 \times S^3$. Припустимо, що Σ_4 діє вільно на $S^3 \times S^k = X$, де $k \geq 4$. Тоді індукована дія групи Σ_4 на когомологіях $H^*(S^3 \times S^k, \mathbb{Z})$ і $H^*(S^3 \times S^k, \mathbb{F}_2)$ тривіальна. Нехай $\varrho^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{F}_2)$ – гомоморфізм когомологій, що індукується канонічним гомоморфізмом $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2$. Позначимо через a_1 і b_1 твірні груп $H^3(X, \mathbb{Z})$ і $H^k(X, \mathbb{Z})$ відповідно. Покладемо $a = \varrho^*(a_1)$, $b = \varrho^*(b_1)$. Розглянемо спектральні послідовності $\{E_r^*, d_r'\}_{r=1}^{\infty}$, $\{U_r^*, d_r\}_{r=1}^{\infty}$ когомологій з коефіцієнтами з $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{F}_2$ відповідно

для розшарувань Серра $X \times_G EG \xrightarrow{p} BG$, де X – простір з вільною дією групи $G = \Sigma_4$, $X = S^3 \times S^k$, $k \geq 4$. Другий член спектральної послідовності $\{E_r^*, d_r'\}_{r=1}^\infty$ має вигляд

$$E_2^{m,n} \cong H^m(\Sigma_4, \mathbb{Z}) \otimes H^n(X, \mathbb{Z}).$$

Аналогічно,

$$U_2^{m,n} \cong H^m(\Sigma_4, \mathbb{F}_2) \otimes H^n(X, \mathbb{F}_2).$$

Припустимо, що $k = 4$. Якщо диференціал d_2' спектральної послідовності $\{E_r\}_1^\infty$ відмінний від нуля, то $d_2'(b_1) = u \otimes a_1$ і $d_2(b) = \sigma_1^2 \otimes a$, оскільки d_2 індукується диференціалом d_2' . Тоді член U_3^* спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$ має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_3^{*,0} &\cong P = \mathbb{F}_2[\sigma_2, \sigma_1, c_3] / \langle \sigma_1 c_3 = 0 \rangle, & U_3^{*,3} &\cong (P / \langle \sigma_1^2 = 0 \rangle) \otimes a, \\ U_3^{*,4} &\cong P \cdot c_3 \otimes b, & U_3^{*,7} &\cong U_2^{*,7} = P \cdot (1 \otimes ab), \end{aligned}$$

$U_3^{*,i} = 0$ при $i \neq 0, 3, 4, 7$. Нехай $d_4(a) = \tau$. Оскільки $d_4(\sigma_1^2 \otimes a) = d_4(0) = \sigma_1^2 d_4(a)$ і $\deg \tau = 4$, то $d_4(a) = 0$. Маємо $0 = (c_3 \otimes b) \cdot d_4(a) = d_4(c_3 \otimes ab) = c_3 \cdot d_4(ab)$. Оскільки $d_4(ab) \in P \cdot (c_3 \otimes b)$, то з умови $c_3 \cdot d_4(ab) = 0$ випливає рівність $d_4(ab) = 0$. Отже, $U_5^* \cong U_3^*$. Нехай $d_5(c_3 \otimes b) = \lambda$. Оскільки $\sigma_1 \cdot d_5(c_3 \otimes b) = d_5(\sigma_1 c_3 \otimes b) = d_5(0) = 0$, то $\sigma_1 \lambda = 0$, тобто $\lambda = 0$ або $\lambda = c_3 \sigma_2$. Маємо $U_6^{*,0} \cong P / \langle c_3 \sigma_2 = 0 \rangle$ або $U_6^{*,0} = P$. Оскільки в $U_6^{*,0}$ класи $\{\sigma_1\}$ і $\{\sigma_2\}$ алгебраїчно незалежні, то при будь-якій дії диференціала d_8 одержимо $\dim U_\infty^{*,0} = \dim U_9^{*,0} = \infty$. Маємо $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \dim U_\infty^* = \infty$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq 7$. Отже, $d_2 = 0$.

Нехай $d_4(a) = \mu$. Оскільки диференціал d_4 індукується диференціалом d_4' цілочисельної спектральної послідовності, то μ може набувати тільки такі значення: $0, \sigma_1^4, \sigma_2^2, \sigma_2^2 + \sigma_1^4$. Нехай $\mu = 0$. Тоді з мультиплікативних властивостей спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$ випливає, що $d_4(ab) = 0$. Отже, $\dim U_\infty^{*,3} = \infty$ при будь-якій дії диференціалів d_5, d_8 і тому $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$. Отримана суперечність показує, що $\mu \neq 0$.

Для спрощення позначень замість $P / \langle a = 0 \rangle$ будемо вживати також запис $P / \langle a \rangle$. Нехай $\mu = \sigma_1^4$. Тоді $d_4(ab) = \sigma_1^4 \otimes b$ і член U_5^* спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$ має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_5^{*,0} &\cong P / \langle \sigma_1^4 = 0 \rangle, & U_5^{*,3} &= P \cdot (c_3 \otimes a), \\ U_5^{*,4} &\cong (P / \langle \sigma_1^4 = 0 \rangle) \cdot 1 \otimes b, & U_5^{*,8} &\cong P \cdot (c_3 \otimes ab). \end{aligned}$$

Нехай $d_5(b) = \alpha$, де $\deg \alpha = 5$. З останньої умови випливає рівність $d_5(c_3 \otimes ab) = d_5(b) \cdot (c_3 \otimes a) = \alpha c_3 \otimes a$. Маємо $U_6^{*,3} = (c_3 P / \langle c_3 \alpha \rangle) \cdot (1 \otimes a) = U_\infty^{*,3}$ і $\dim U_6^{*,3} = \infty$, оскільки кільце $c_3 P / \langle c_3 \alpha \rangle$ містить всі ненульові класи $\{c_3^i\}$, $i > 0$. Ми отримали суперечність $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$. Отже, $d_4(a) = \sigma_2^2$ або $d_4(a) = \sigma_2^2 + \sigma_1^4$. В обидвох випадках маємо

$$U_5^{*,0} = P / \langle \mu \rangle, \quad U_5^{*,3} = 0, \quad U_5^{*,4} = (P / \langle \mu \rangle)(1 \otimes b), \quad U_5^{*,7} = 0.$$

При будь-якій дії диференціала d_5 отримаємо $U_6^{*,0} = U_\infty^{*,0}$ і $\dim U_6^{*,0} = \infty$, оскільки кільце $P / \langle \mu, d_5(b) = 0 \rangle$ містить всі ненульові класи $\{c_3^i\}$, $i > 0$. Маємо $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq 7$. Отже, Σ_4 не може діяти вільно на $S^3 \times S^4$.

Припустимо, що Σ_4 діє вільно на $S^3 \times S^5$. Нехай $d_3(b) = \tau \otimes a$, де $\tau \neq 0$. Оскільки диференціал d_3 індукується диференціалом d'_3 спектральної послідовності $\{E_r\}_1^\infty$, то $d'_3(b_1) = v \otimes a_1$, де v – твірна групи $H^3(\Sigma_4, \mathbb{Z})_{(2)}$ і $d_3(b) = (c_3 + \sigma_1\sigma_2) \otimes a$. Маємо

$$\begin{aligned} U_4^{*,0} &= P, & U_4^{*,3} &= (P/\langle c_3 + \sigma_1\sigma_2 = 0 \rangle) \cdot 1 \otimes a, \\ U_4^{*,5} &= 0, & U_4^{*,8} &= P \cdot (1 \otimes ab). \end{aligned}$$

Нехай $d_4(a) = \theta$. З останньої рівності отримуємо $d_4(0) = d_4[(c_3 + \sigma_1\sigma_2) \cdot (1 \otimes a)] = (c_3 + \sigma_1\sigma_2)d_4(a) = (c_3 + \sigma_1\sigma_2) \cdot \theta$. Оскільки $c_3 + \sigma_1\sigma_2$ не є дільником нуля в $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$, то з умови $(c_3 + \sigma_1\sigma_2)\theta = 0$ випливає рівність $\theta = 0$. Маємо

$$U_7^{*,0} = U_5^{*,0} = U_4^{*,0} = P, \quad U_\infty^{*,0} = U_{10}^{*,0} = U_9^{*,0} / \text{Im } d_9$$

і тому $U_\infty^{*,0}$ містить ненульовий клас $\{c_3^k \sigma_2^l\}$, де $3k + 2l \geq 11$. Отже, $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \geq 11$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq 8$. Таким чином, якщо Σ_4 діє вільно на $S^3 \times S^5$, то диференціал d_4 спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$ є нульовим. Аналогічно, якщо Σ_4 діє вільно на $S^3 \times S^6$, то диференціал d_4 спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$ є нульовим на рядку $U_4^{*,6}$. Справді, нехай $d_4(a) = \lambda$, $d_4(b) = \tau \otimes a$. Оскільки диференціал d_4 індукується диференціалом d'_4 , то τ і λ можуть набувати тільки такі значення: $0, \sigma_2^2, \sigma_1^4, \sigma_2^2 + \sigma_1^4$. Маємо $0 = d_4(\tau \otimes a) = \tau\lambda$. Оскільки в $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$ елементи σ_2 і σ_1 алгебраїчно незалежні, то з рівності $\tau\lambda = 0$ випливає, що $\tau = 0$ або $\lambda = 0$. Нехай $\tau = \sigma_1^4$. Тоді одержимо

$$U_5^{*,0} = P, \quad U_5^{*,3} \cong (P/\langle \sigma_1^4 \rangle) \cdot (1 \otimes a), \quad U_5^{*,6} = c_3 P \cdot (1 \otimes b), \quad U_5^{*,9} = P \cdot (1 \otimes ab).$$

Крім того, маємо $U_\infty^{*,3} \cong U_8^{*,3} = U_7^{*,3} / \langle d_7(ab) \rangle$. Оскільки кільце $P/\langle \sigma_1^4 \rangle$ містить кільце поліномів $\mathbb{F}_2[\sigma_2, c_3]$, то $\dim U_\infty^{*,3} = \infty$ при будь-якій дії диференціала d_7 , тобто $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$. Ми отримали суперечність з умовою $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq 9$. Отже, $\tau \neq \sigma_1^4$. Припустимо, що $\tau = \sigma_2^2$ або $\tau = \sigma_2^2 + \sigma_1^4$. Маємо

$$U_5^{*,0} = P, \quad U_5^{*,3} \cong (P/\langle \tau \rangle) \cdot (1 \otimes a), \quad U_5^{*,6} = 0, \quad U_5^{*,9} = P \cdot (1 \otimes ab).$$

Крім того, оскільки $U_5^{*,6} = 0$, то $U_8^{*,0} \cong U_5^{*,0} = P$. Нехай $d_7(ab) = \{\lambda \otimes a\}$. Якщо $\{\lambda \otimes a\} = 0$, то $U_\infty^{*,3} = U_8^{*,3} = (1 \otimes a) \cdot (P/\langle \tau \rangle)$ і тоді $\dim U_\infty^{*,3} = \infty$. Якщо $\{\lambda \otimes a\} \neq 0$, то $U_8^{*,9} = \text{Ker}(d_7|U_7^{*,9}) = P \cdot (\alpha \otimes ab)$, де $\alpha = \sigma_2$ або $\alpha = \sigma_1^2$. Маємо ізоморфізми $U_\infty^{*,0} = U_{11}^{*,0} \cong U_8^{*,0} / \langle d_{10}\{(\alpha \otimes ab)\} \rangle$, звідки випливає співвідношення $\dim U_\infty^{*,0} = \infty$. В обох випадках ми отримали: $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq 9$. Отже, $\tau = 0$.

Для завершення доведення теореми залишилось розглянути випадок $k \geq 5$. Якщо $k - 3 \leq 3$, то із сказаного вище випливає, що диференціал d_{k-2} спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$ є нульовим на рядку $U_{k-2}^{*,k}$. Таким чином, якщо d_s – ненульовий диференціал спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$, то $s \geq 4$. Припустимо, що $d_4(a) = 0$. Тоді $d_4(ab) = 0$ і $U_5^* = U_2^*$. Крім того, якщо $k - 3 > 3$, то $d_{k-2}(b) = 0$. Справді, припустимо протилежне. Нехай $d_{k-2}(b) = \tau(1 \otimes a)$. Якщо $\tau = \sigma_1\tau_1$ для деякого $\tau_1 \in \mathbb{F}_2[\sigma_1, \sigma_2]$, то

$$U_{k-1}^{*,0} = U_5^{*,0} = P, \quad U_{k-1}^{*,3} = (P/\langle \tau \rangle)(1 \otimes a), \quad U_{k-1}^{*,k} = c_3 P \cdot (1 \otimes b), \quad U_{k-1}^{*,k+3} = P \cdot (1 \otimes ab).$$

Крім того, маємо $U_\infty^{*,3} = (P/\langle \tau, d_{k+1}(1 \otimes ab) = 0 \rangle)(1 \otimes a)$. Кільце $P/\langle \tau \rangle$ містить кільце поліномів $\mathbb{F}_2[\sigma_2, c_3]$. Тоді $\dim U_\infty^{*,3} = \infty$ при будь-якій дії диференціала d_{k+1} . Ми отримали рівність $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$, яка суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq k + 3$.

Якщо $\tau = c_3\tau_2$, то аналогічно до попереднього випадку отримаємо суперечність $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$. Припустимо, що τ не ділиться ні на σ_1 , ні на c_3 . Маємо

$$U_{k-1}^{*,0} = U_5^{*,0} = P, \quad U_{k-1}^{*,3} = (P/\langle\tau\rangle) \cdot (1 \otimes a), \quad U_{k-1}^{*,k} = 0, \quad U_{k-1}^{*,k+3} = P \cdot (1 \otimes ab).$$

Оскільки $U_{k-1}^{*,k} = 0$, отримаємо ізоморфізм $U_{k+2}^{*,0} = U_{k-1}^{*,0} = P$. Тоді $U_{\infty}^{*,0} = U_{k+5}^{*,0}$ і $\dim U_{k+5}^{*,0} = \infty$ при будь-якій дії диференціала d_{k+4} . Ми знову отримали співвідношення $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$, яке суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq k+3$. Отже, з умови $d_4(a) = 0$ випливає рівність $d_{k-2}(b) = 0$ (при $k > 6$). Таким чином, якщо $d_4(a) = 0$, то для довільного $k \geq 5$ ($k+1$)-ий член спектральної послідовності $\{U_r\}_1^{\infty}$ має наступний вигляд:

$$U_{k+1}^{*,0} = P, \quad U_{k+1}^{*,3} = P(1 \otimes a), \quad U_{k+1}^{*,k} = P(1 \otimes b), \quad U_{k+1}^{*,k+3} = P(1 \otimes ab).$$

Оскільки $U_{k+1}^{*,3} = P \cdot (1 \otimes a) \cong P$, то $\dim U_{\infty}^{*,3} = \infty$ при будь-якій дії диференціала d_{k+1} . Звідси випливає, що $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$. Отримана суперечність показує, що $d_4(a) \neq 0$. Оскільки диференціал d_4 індукується диференціалом d'_4 , то $d_4(a)$ може набувати тільки такі значення: $\sigma_1^4, \sigma_2^2, \sigma_2^2 + \sigma_1^4$.

Нехай $d_4(a) = \sigma_1^4$. Якщо $k = 6$, то із сказаного вище випливає рівність $d_4(b) = 0$. Отже, для довільного $k \geq 5$ член U_5^* спектральної послідовності $\{U_r\}_1^{\infty}$ має наступний вигляд: $U_5^{*,0} \cong P/\langle\sigma_1^4\rangle$, $U_5^{*,3} = P \cdot (c_3 \otimes a)$, $U_5^{*,k} \cong (P/\langle\sigma_1^4\rangle)(1 \otimes b)$, $U_5^{*,k+3} = P \cdot (c_3 \otimes ab)$.

Нехай $d_{k-2}(b) = c_3\lambda \otimes a \neq 0$ (це можливо тільки за умов $k > 6$ і $\lambda \neq 1$). Тоді член U_{k-1}^* спектральної послідовності $\{U_r\}_1^{\infty}$ має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_{k-1}^{*,0} &\cong P/\langle\sigma_1^4\rangle, & U_{k-1}^{*,3} &\cong (c_3P/\langle c_3\lambda\rangle) \cdot (1 \otimes a), \\ U_{k-1}^{*,k} &= (\sigma_1P/\langle\sigma_1^4\rangle) \cdot (1 \otimes b), & U_{k-1}^{*,k+3} &= c_3P \cdot (1 \otimes ab). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $U_{k+1}^{*,0}$ містить кільце $\mathbb{F}_2[\sigma_2, c_3]$. Розглянемо диференціал d_{k+1} спектральної послідовності $\{U_r\}_1^{\infty}$. Нехай $d_{k+1}(\sigma_1 \otimes b) = \alpha$, $\deg \alpha = k+2$ і $d_{k+1}(c_3 \otimes ab) = \beta \otimes a$, $\deg \beta = k+4$. Маємо

$$\begin{aligned} U_{k+2}^{*,0} &= P/\langle\sigma_1^4, \alpha = 0\rangle, & U_{k+2}^{*,3} &\cong (c_3P/\langle c_3\lambda, \beta = 0\rangle) \cdot (1 \otimes a), \\ U_{k+2}^{*,k} &= \text{Ker}(d_{k+1}|U_{k+1}^{*,k}), & U_{k+2}^{*,k+3} &= \text{Ker}(d_{k+1}|U_{k+1}^{*,k+3}). \end{aligned}$$

Якщо $d_{k+4}|U_{k+4}^{*,k+3} = 0$, то $\dim U_{k+5}^{*,k+3} = \infty$, тобто $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq k+3$. Якщо $d_{k+4}|U_{k+4}^{*,k+3} \neq 0$, то для довільного ненульового елемента q кільця $\text{Im}(d_{k+4}|U_{k+4}^{*,3})$ маємо $\deg q \geq 3+(k+4) = k+7$. Таким чином, в $U_{\infty}^{*,0}$ існує ненульовий клас $\{\sigma_2^l c_3^t\}$, де $2l+3t \geq (k+2)+(k+7)-5 = 2k+4$, тобто $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \geq 2k+4$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq k+3$. Отже, $d_{k-2}(b) = 0$. З останньої умови випливає наступна рівність: $U_{k-1}^* = U_5^*$. Розглянемо диференціал d_{k+1} спектральної послідовності $\{U_r\}_1^{\infty}$. Якщо $d_{k+1}(b) = 0$ або $d_{k+1}(b) = \sigma_1\lambda$ для деякого $\lambda \in \mathbb{F}_2[\sigma_1, \sigma_2]$, то кільце $U_{k+2}^{*,0}$ містить в собі кільце поліномів $\mathbb{F}_2[\sigma_2, c_3]$, і тому $\dim U_{\infty}^{*,0} = \dim U_{k+5}^{*,0} = \infty$ при будь-якій дії диференціала d_{k+1} . Ми одержали $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq k+3$. Отже, $d_{k+1}(b) \neq 0$ і σ_1 не ділить $d_{k+1}(b)$. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\tau = d_{k+1}(b)$ — поліном від σ_2 і c_3 . Тоді отримаємо $d_{k+1}(c_3 \otimes ab) = d_{k+1}(b) \cdot (c_3 \otimes a) = c_3\tau \otimes a$. Маємо також $U_{k+2}^{*,0} \cong P/\langle\sigma_1^4, \tau = 0\rangle$, $U_{k+2}^{*,3} \cong (c_3P/\langle c_3\tau\rangle) \cdot (1 \otimes a)$, $U_{k+2}^{*,k} = 0 = U_{k+2}^{*,k+3}$ і

$U_\infty^* = U_{k+5}^* = U_{k+2}^*$. Оскільки $\dim U_{k+2}^{*,0} = \dim U_{k+2}^{*,3} = \infty$, то $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) = \infty$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq k+3$. Отже, $d_4(a) \neq \sigma_1^4$.

Нехай $d_4(a) = \mu$, де $\mu = \sigma_2^2$ або $\mu = \sigma_2^2 + \sigma_1^4$. Оскільки трансгресія переставна з гомоморфізмом Sq , то клас $0 = d_6 Sq^2(a)$ збігається з класом $\{Sq^2 \mu\}$ в $H^6(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)/\text{Im } d_4$. Зауважимо, що $Sq^2(\sigma_2^2 + \sigma_1^4) = Sq^2(\sigma_2^2) = [Sq^1 \sigma_2]^2 = [Sq^1(\sigma_2 + \sigma_1^2)]^2 = (c_3 + \sigma_1 \sigma_2)^2 = c_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2$. Іншими словами, клас $\{c_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2\}$ рівний нулеві в $H^6(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)/\text{Im } d_4$. З мультиплікативних властивостей спектральної послідовності $\{U_r\}_1^\infty$ випливає, що $\text{Im } d_4 = \sigma_2^2 \cdot P$. Отже, елемент $c_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2$ належить головному ідеалу $\sigma_2^2 P = \langle \sigma_2^2 \rangle$, тобто $c_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 = \sigma_2^2 t$, де $t \in P$. Але в $H^*(\Sigma_4, \mathbb{F}_2)$ співвідношення $c_3^2 = \sigma_2^2(\sigma_1^2 + t)$ не виконується ні при якому значенні t . Отримана суперечність показує, що $d_4(a)$ не може набувати значень σ_2^2 , $\sigma_2^2 + \sigma_1^4$. Таким чином, при будь-якому значенні $d_4(a)$ маємо $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \geq 2k-2$, що суперечить умові $\text{cd}_{\mathbb{F}_2}(X/G) \leq k+3$.

Зауважимо, що твердження теореми 4 стає неправильним, якщо умову " $X = S^3 \times S^k$ " замінити на слабшу умову " X – многовид, для якого $X \sim S^3 \times S^k$ ", тобто $H^*(X, \mathbb{Z}) \cong H^*(S^3 \times S^k, \mathbb{Z})$ ". Справді, для групи Лі $SU(3)$ маємо $H^*(SU(3)) \cong H^*(S^3 \times S^5)$ і $\Sigma_4 \subset SU(3)$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Nakaoka M. *Homology of the infinite symmetric group* // Ann. of Math. 1961. V.73. P.229–257.
2. Adem A., Maginnis J., Milgram J. *Symmetric invariants and cohomology of groups* // Math. Ann. 1990. V.287. P.391–411.
3. Нгуен Суан Туен. *О когомологии знакопеременных групп и ее применениях в топологии* // Труды Тбилисского математического института. Обобщенные гомологии и гомотопии. 1992. Т.97. С.18–47.
4. Браун К.С. Когомологии групп. – М.: Наука, 1987.
5. Quillen D. The spectrum of an equivariant cohomology ring I // Ann. of Math. 1971. V.94. P.549–572.
6. Мошер Р., Тангора М. Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий. – М.: Мир, 1970.
7. Мадсен И., Милгрэм Р. Классифицирующие пространства для перестроек и кобордизмов многообразий. – М.: Мир, 1984.
8. Browder W. *Cohomology and group actions* // Invent. Math. V.71. 1983. P.599–608.
9. Oliver R. *Free compact group actions on products of spheres* // Algebraic topology. Aargus 1978. Proceedings. Lect. Notes in Math. 1979. V.763. Berlin, Springer-Verlag. P.539–548.

Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України
Наукова 36, Львів, 290053, Україна

Надійшло 3.10.94.