

РАЗЛОЖИМОСТЬ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

И.В. ПРОТАСОВ

I. Protasov. *Decomposability of permutation groups* // Matematychni Studii, **6** (1996) P.131–134.

A topological group G is called $\aleph$ -decomposable if G can be decomposed into $\aleph$ dense subsets. If in this definition $\aleph$ is equal to the disperse character of G , then G is called maximally decomposable. A group G is called absolutely decomposable if it can be decomposed into two subsets dense in every nondiscrete group topology on G .

The problem of absolute (maximal) decomposability of permutation groups endowed with the pointwise convergence topology is investigated.

Для кардинала $\aleph$ топологическая группа G называется $\aleph$ -разложимой, если ее можно разбить на $\aleph$ плотных подмножеств. Обозначим через $\Delta(G)$ дисперсный характер группы G , т.е. минимальную из мощностей окрестностей единицы. Если топологическая группа G $\aleph$ -разложима, то, очевидно, $\aleph \leq \Delta(G)$. $\Delta(G)$ -разложимая топологическая группа G называется максимально разложимой.

Рассмотрим группу $S(X)$ всех подстановок на бесконечном множестве X . Одной из наиболее естественных топологий на $S(X)$ является топология поточечной сходимости. Базу окрестностей тождественной подстановки id в этой топологии образуют подгруппы $S(X, K) = \{g \in G : g(x) = x \text{ для всех } x \in K\}$, где K пробегает все конечные подмножества из X . Носителем подстановки $g \in S(X)$ называется множество $\text{supp } g = \{x \in X : g(x) \neq x\}$. Базу окрестностей тождественной подстановки в топологии поточечной сходимости на группе $F(X)$ всех подстановок с конечными носителями образуют подгруппы $F(X, K) = \{g \in F(X) : g(x) = x \text{ для всех } x \in K\}$, где K пробегает все конечные подмножества из X .

Теорема 1. *Группы $S(X)$ и $F(X)$ с топологиями поточечной сходимости максимально разложимы.*

Группа G называется абсолютно разложимой, если ее можно разбить на два подмножества, плотные в любой недискретной хаусдорфовой групповой топологии на G . Вопрос об абсолютной разложимости группы $F(X)$ поставлен в статье [1].

Теорема 2. *Группа $F(X)$ не является абсолютно разложимой.*

Вопрос из [1] об абсолютной разложимости группы $S(X)$ остается открытым.

Топологическая группа, обладающая базой окрестностей единицы, состоящей из подгрупп, называется 0-мерной. В связи с теоремой 2 представляет определенный интерес следующее усиление теоремы 5 из [1].

Теорема 3. *Для несчетного множества X группу $F(X)$ можно разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой недискретной 0-мерной групповой топологии несчетного дисперсного характера.*

Перейдем к доказательствам теорем. Все рассматриваемые топологии на группах предполагаются хаусдорфовыми и групповыми.

Доказательство теоремы 1. Вначале докажем максимальную разложимость топологической группы $F(X)$. Пусть $|X| = \gamma$. Разобьем множество X на γ подмножеств $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$, каждое из которых имеет мощность γ . Линейно упорядочим множество X так, чтобы каждое подмножество X_α было конфинальным во множестве $(X, \leq)$.

Для каждого непустого конечного подмножества $K \subset X$ обозначим через $\max K$ максимальный элемент подмножества K в определенном на X линейном порядке. Положим

$$D_\alpha = \{g \in F(X) \setminus \{\text{id}\} : \max \text{supp } g \in X_\alpha\}$$

и покажем, что все подмножества D_α , $\alpha < \gamma$ плотны в топологической группе $F(X)$.

Фиксируем произвольный элемент $g \in F(X)$ и непустое конечное подмножество $K \subset X$. Пользуясь конфинальностью подмножества X_α в $(X, <)$, выберем элементы $a, b \in X_\alpha$ так, чтобы $\max\{K \cup \text{supp } g\} < a < b$.

Определим подстановку $h \in F(X)$, полагая $h(x) = x$ для всех $x \in X \setminus \{a, b\}$, $h(a) = b$, $h(b) = a$. Тогда $h \in F(X, K)$ и $\text{supp } gh = \text{supp } g \cup \{a, b\}$. Так как $\max \text{supp } gh = b$, то $gh \in X_\alpha$ и, следовательно, $gF(X, K) \cap D_\alpha \neq \emptyset$.

Максимальная разложимость топологической группы $S(X)$ достаточно очевидна. Действительно, подгруппа $F(X)$ плотна в $S(X)$. Следовательно, плотен в $S(X)$ и любой левый смежный класс по этой подгруппе, а число таких левых смежных классов равно $2^{|X|}$.

Доказательство теоремы 2. Выделим во множестве X счетное дизъюнктное семейство двухэлементных подмножеств $\{X_n : n < \omega\}$. Обозначим через h_n подстановку, действующую тождественно на множестве $X \setminus X_n$ и переставляющую элементы из X_n . Положим $D_n = \{h_n, \text{id}\}$ и заметим, что подгруппа B , порожденная подмножеством $\{h_n : n < \omega\}$, является прямым произведением подгрупп D_n , $n < \omega$. Обозначим через B_n подгруппу, порожденную подмножеством $\{h_m : n \leq m < \omega\}$.

Подгруппа B достаточно хорошо расположена в группе $F(X)$ в смысле возможности продолжения топологий с B на $F(X)$. Точнее, пусть на B задана топология с базой окрестностей единицы τ , причем каждая подгруппа B_n открыта в этой топологии. Тогда семейство подмножеств τ можно принять в качестве базы окрестностей единицы топологии на группе $F(X)$. Действительно, фиксируем произвольный элемент $g \in F(X)$ и окрестность единицы $U \in \tau$. Выберем натуральное число n так, что $\text{supp } g \cap X_m = \emptyset$ для всех $m \geq n$. Нетрудно убедиться, что $gh = hg$ для всех $h \in B_n$. Положим $V = U \cap B_n$. Тогда $V \in \tau$ и $g^{-1}Vg \subset U$.

Предположим, что группа $F(X)$ абсолютно разложима, D_1, D_2 – непересекающиеся подмножества из $F(X)$, плотные в любой недискретной групповой топологии на $F(X)$, $F(X) = D_1 \cup D_2$. Положим $C_1 = D_1 \cap B$, $C_2 = D_2 \cap B$. По теореме 9 из [1], в одном из подмножеств C_i найдется смежный класс по некоторой бесконечной подгруппе $H \subset B$. Положим $\tau = \{H \cap B_n : n < \omega\}$. Тогда τ – база окрестностей единицы некоторой недискретной топологии на B . Продолжим эту топологию на группу $F(X)$. Так как подмножество gH открыто и $gH \subset D_i$, то подмножество D_i имеет непустую внутренность, что противоречит плотности подмножества $F(X) \setminus D_i$ и доказывает теорему.

Используем возможность продолжения топологий с подгруппы B на группу $F(X)$ для решения одной задачи об экстремально несвязных группах. Напомним, что топологическая группа называется экстремально несвязной, если замыкание любого открытого подмножества открыто. В.И. Малыхин заметил [2], что в любой недискретной экстремально несвязной группе имеется открытая подгруппа экспоненты 2. Но тогда уместен такой вопрос. Верно ли, что недискретная экстремально несвязная группа содержит инвариантную открытую подгруппу экспоненты 2? Первый пример недискретной экстремально несвязной топологии на группе B построил С. Сирота [3], предполагая существование рамсеевых ультрафильтров на счетном множестве. Затем В.И. Малыхин [2] построил на B новую недискретную экстремально несвязную топологию, основываясь на аксиоме Мартина. Отметим, что в этих топологиях все подгруппы B_n , $n < \omega$, группы B открыты. Фиксируем на группе B недискретную экстремально несвязную топологию с открытыми подгруппами B_n , $n < \omega$, и продолжим ее на группу $F(X)$. Так как подгруппа B открыта в $F(X)$, то группа $F(X)$ экстремально несвязна. Однако, инвариантных абелевых подгрупп, отличных от единичной подгруппы, в группе $F(X)$ нет. Таким образом, при естественных теоретико-множественных предположениях ответ на поставленный вопрос отрицателен.

Доказательство теоремы 3. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\langle a_n \rangle$ так, чтобы последовательность $\langle a_{n+1} - a_n \rangle$ также была возрастающей. Положим

$$L_n = \{a \in \mathbb{N} : 2^{a_n} \leq a \leq 2^{a_{n+1}} - 1\}.$$

Разобьем множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ на счетное число подмножеств $\mathbb{N} = \cup \{A_k : k < \omega\}$ так, чтобы каждое подмножество A_k содержало бесконечное число отрезков L_n . Определим разбиение множества $F(X) \setminus \{\text{id}\}$ на подмножества

$$D_k = \{g \in F(X) \setminus \{\text{id}\} : |\text{supp } g| \in A_k\}, \quad k < \omega,$$

где $|\text{supp } g|$ – число элементов подмножества $\text{supp } g$.

Покажем, что каждое подмножество D_k плотно в любой недискретной 0-мерной топологии на $F(X)$ несчетного дисперсного характера. Фиксируем на группе $F(X)$ такую топологию, возьмем произвольный элемент $g \in F(X)$ и открытую подгруппу U . Так как семейство конечных подмножеств $\{\text{supp } g : g \in U\}$ несчетно, по лемме о пересечениях [4, глава 4, §3] найдется такое счетное подмножество $\{g_n : n < \omega\} \subset U$, что семейство подмножеств $\{\text{supp } g_n : n < \omega\}$ дизъюнктно по модулю пересечения. Это означает, что для некоторых чисел s, t , $0 \leq t < s$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} s &= |\text{supp } g_n|, \quad n < \omega, & t &= |\cap \{\text{supp } g_n : n < \omega\}|, \\ |\text{supp } g_i \cap \text{supp } g_j| &= t, \quad 0 < i < j < \omega. \end{aligned}$$

Тогда для любого натурального числа n выполняются неравенства

$$(s - t)n \leq |\operatorname{supp} g_1 g_2 \dots g_n| \leq sn.$$

Положим $d = |\operatorname{supp} g|$ и заметим, что для любого натурального числа n выполняются неравенства

$$(s - t)n - d \leq |\operatorname{supp} gg_1 g_2 \dots g_n| \leq sn + d.$$

Положим $s_1 = s - t$, $d_1 = -d$, $h_n = g_1 \dots g_n$ и отметим, что $s_1 > 0$, $h_n \in U$. В этих обозначениях

$$d_1 + s_1 n \leq |\operatorname{supp} gh_n| \leq d + sn$$

для всех натуральных чисел n .

Учитывая эти неравенства, для доказательства плотности множества D_k достаточно найти такие отрезок $L_m \subset A_k$ и натуральное число n , что $d_1 + s_1 n \in L_m$, $d + sn \in L_m$. Ведь тогда $|\operatorname{supp} gh_n| \in A_k$ и, следовательно, $gU \cap D_k \neq \emptyset$.

По определению подмножества A_k такой выбор возможен, если для всех достаточно больших натуральных чисел m найдутся натуральные числа $n(m)$, удовлетворяющие неравенствам

$$d_1 + s_1 n(m) \geq 2^{a_m}, \quad d + sn(m) \leq 2^{a_{m+1}} - 1.$$

Так как $s_1 > 0$ и последовательность $\langle a_{m+1} - a_m \rangle$ возрастающая, то для любой константы c неравенство

$$s_1 2^{a_{m+1} - a_m} - s > c$$

выполняется для всех достаточно больших натуральных чисел m . Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера,

$$\frac{2^{a_{m+1}} - 1 - d}{s} - \frac{2^{a_m} - d_1}{s_1} \geq 1.$$

Завершая доказательство, выберем натуральное число $n(m)$ так, чтобы

$$\frac{2^{a_m} - d_1}{s_1} \leq n(m) \leq \frac{2^{a_{m+1}} - 1 - d}{s}.$$

В заключение отметим, что используя способ продолжения топологий из доказательства теоремы 2, можно показать, что для любого бесконечного множества X на группе $F(X)$ существует $\operatorname{exr} \operatorname{exr} |X|$ 0-мерных топологий. Следовательно, для несчетного множества X существует столько же 0-мерных топологий несчетного дисперсного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Протасов И.В. Абсолютно разложимые группы // Укр. мат. ж. 1996. Т.48. №3. С.383–392.
2. Малыхин В.И. Экстремально несвязные и близкие к ним группы // ДАН СССР. 1975. Т.220. №1. С.27–30.
3. Сирота С. Произведение топологических групп и экстремальная несвязность // Матем. сб. 1969. Т.79. №2. С.179–192.
4. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во МГУ, 1988. 112 с.

Национальный университет им. Т. Шевченко

Получено 20.02.96.