Математичні студії
випуск 6

УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ДРУГОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

М.О. Колінько, С.П. Лавренюк

M.O. Kolin′ko, S.P. Lavrenyuk. *Fourier problem for one evolution system with the second time derivative* // Matematychni studii. **6** (1996) P.73–84.

In the paper there are obtained sufficient conditions of existence and uniqueness of generalized solution of the problem without initial data for evolution systems with the second time derivative containing, in particular, some parabolic systems.

Нехай $Q \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, T), T < \infty$; $Q \bigcap \{t = \tau\} = \Omega_\tau$; $\partial Q \bigcap \{t = \tau\} = S_\tau$, $S = \bigcup\limits_{\tau \in (-\infty, T]} S_\tau$. Припускатимемо, що для всіх $\tau \in (-\infty, T]$ множина Ω_τ є обмеженою областю в $\mathbb{R}^n$ і $\Omega_\tau^* \subset \Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область , а Ω_τ^* – проекція Ω_τ на площину $t = 0$.

Розглянемо в області Q систему рівнянь вигляду

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{|\alpha|\le m} G_\alpha(x,t) D^\alpha u + \\ + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) + \sum_{|\alpha|\le l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = F(x,t), \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \quad |\alpha| \le m-1; \quad D^\beta u_t\Big|_S = 0, \quad 1 \le |\beta| \le l-1. \qquad (2)$$

Тут $A_{\alpha\beta}$, $B_{\varkappa\sigma}$, G_γ, C_ϱ – квадратні матриці розміру $N \times N$;

$$u = (u_1, \dots, u_N); \quad F = (f_1, \dots, f_N); \quad l \le m;$$
$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Зауважимо, що для довільної функції $v \in H_0^k(\Omega)$ правильна нерівність Фрідріхса ([1], стор.44)

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} (D^\alpha v)^2 dx \le \gamma_{k,j}(\Omega) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha v)^2 dx, \qquad (3)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K22, 35K50.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

де стала $\gamma_{k,j}(\Omega)$ залежить лише від області Ω та чисел j,k.

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (A_0), (A_1), (B_0), (C_0), якщо:

$$(A_i):A_{\alpha\beta}(x,t)=A_{\beta\alpha}(x,t),A_{\alpha\beta}(x,t)=A^*_{\alpha\beta}(x,t),(x,t)\in Q,\quad |\alpha|=|\beta|\le m;$$

$$a_i(\Omega_t)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2dx\le\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}\left(\frac{\partial^i A_{\alpha\beta}(x,t)}{\partial t^i}D^\beta u,D^\alpha u\right)dx\le$$

$$\le a^i(\Omega_t)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2dx,$$

$$a_0(\Omega_t)>0,\quad t\in(-\infty,T],\quad \forall u\in(H_0^m(\Omega_t))^N;\quad i=0,1;$$

$$(B_0):\quad \int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u,D^\alpha u)dx\ge b_0(\Omega_t)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u|^2dx,$$

$$b_0(\Omega_t)>0,\quad t\in(-\infty,T],\quad \forall u\in(H_0^l(\Omega_t))^N;$$

$$(C_0):\quad (C_0(x,t)\xi,\xi)\ge c_0^0(\Omega_t)|\xi|^2,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\quad (x,t)\in Q.$$

Введемо такі позначення:

$$a_i=\inf_{(-\infty,T)}\sup_{(-\infty,t)}a_i(\Omega_\tau);\quad i=0,1;$$

$$a^1=\inf_{(-\infty,T)}\sup_{(-\infty,t)}a^1(\Omega_\tau);\quad b_0=\inf_{(-\infty,T)}\sup_{(-\infty,t)}b_0(\Omega_\tau);$$

$$b_i^1(Q_t)=\max_{j=0,\dots,l}\max_{|\beta|=j}\sup_{Q_t}\sum_{|\alpha|=j}\left\|\frac{\partial^i B_{\alpha\beta}(x,\tau)}{\partial t^i}\right\|,\quad i=0,1;$$

$$b_i^2(Q_t)=\max_{j=0,\dots,l}\max_{|\alpha|=j}\sup_{Q_t}\sum_{|\beta|=j}\left\|\frac{\partial^i B_{\alpha\beta}(x,\tau)}{\partial t^i}\right\|,\quad i=0,1;$$

$$b_i^k(Q)=\inf_{(-\infty,T)}b_i^k(Q_t),\ i=0,1;\ k=1,2;$$

$$g_i(Q_t)=\sup_{Q_t}\sum_{|\alpha|\le m}\left\|\frac{\partial^i G_\alpha(x,\tau)}{\partial t^i}\right\|^2,\quad g_i(Q)=\inf_{(-\infty,T)}g_i(Q_t);\quad i=0,1;$$

$$c_0^0=\inf_{(-\infty,T)}\sup_{(-\infty,t)}c_0^0(\Omega_\tau);\qquad c_i(Q_t)=\sup_{Q_t}\sum_{|\alpha|\le l}\left\|\frac{\partial^i C_\alpha(x,\tau)}{\partial t^i}\right\|^2,\ i=0,1;$$

$$c_2(Q_t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\le|\alpha|\le l}\|C_\alpha(x,\tau)\|^2;\quad c_i(Q)=\inf_{(-\infty,T)}c_i(Q_t);\quad i=0,1,2;$$

$$\gamma_{k,j}=\inf_{(-\infty,T)}\sup_{(-\infty,t)}\gamma_{k,j}(\Omega_\tau);\quad \gamma^k_{m,j}(\Omega_t)=\sum_{s=j}^k\gamma_{m,s}(\Omega_t);\quad \gamma^k_{m,j}=\sum_{s=j}^k\gamma_{m,s}.$$

Означення. Функцію u, яка задовольняє включення

$$u\in L^2_{loc}((-\infty,T];(H_0^m(\Omega_t))^N),\quad u_t\in L^2_{loc}((-\infty,T];(H_0^l(\Omega_t))^N),$$
$$u_{tt}\in L^2_{loc}((-\infty,T];(H^{-m}(\Omega_t))^N)$$

і рівність

$$\int\limits_Q \Bigg[(u_{tt},v)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u,D^\alpha v)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t,D^\alpha v)+$$
$$+\sum_{|\alpha|\le m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u,v)+\sum_{|\alpha|\le l}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t,v)-(F(x,t),v)\Bigg]dx\,dt=0 \quad (4)$$

для довільної функції $v\in C_0^\infty(Q)$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2). Тут через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо таку систему нерівностей:

$$\lambda a_0-a^1-\lambda b_0^1(Q)\gamma_{m,0}^l\delta_1-\frac{\sqrt{g_0(Q)}\gamma_{m,0}^m}{\delta_2}-\frac{\lambda\sqrt{c_0(Q)}\gamma_{m,0}^l}{\delta_3}+\lambda^3\gamma_{m,0}>0, \quad (5)$$
$$2b_0-\frac{\lambda b_0^2(Q)\gamma_{l,0}^l}{\delta_1}-2\sqrt{c_2(Q)\gamma_{l,1}^l\gamma_{l,0}}-\lambda\sqrt{c_0(Q)}\gamma_{l,0}\delta_3+(2c_0^0-3\lambda-\delta_2\sqrt{g_0(Q)})\gamma_{l,0}>0.$$

Будемо називати набір чисел $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ $(\delta_1>0,\delta_2>0,\delta_3>0)$ допустимим для системи (5), якщо вона для цього набору має додатний розв'язок λ.

Позначимо через Δ_1 множину допустимих наборів для системи (5) і через Λ_1 – множину додатних розв'язків цієї системи для всіх $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}\subset\Delta_1$.

Легко бачити, що множина Λ_1 відкрита.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* (A_0), (A_1), (B_0), (C_0) *і, крім того,*
$m=l$;
$A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$,
$B_{\alpha\beta}(|\alpha|=|\beta|\le m)$,
$G_\varkappa$, $C_\varkappa(|\varkappa|\le m)\in L^\infty(Q)$; $\Delta_1\ne\varnothing$.
Тоді задача (1), (2) не може мати більше ніж один розв'язок в класі функцій u *таких, що*

$$\int\limits_{\Omega_t}\left(|u_t|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2\right)dx=o(1)\exp(-\lambda t), \quad (6)$$

коли $t\to-\infty$, *де* $\lambda\in\Lambda_1$.

Доведення. Нехай задача (1), (2) має два узагальнені розв'язки u^1 і u^2, які задовольняють умову (6). Тоді функція $u=u^1-u^2$ теж задовольняє умову (6). На підставі теореми 1.17 ([1],стор.177) $u_t\in C([t_1,t_2];(L^2(\Omega_t))^N)$ для довільних $t_1,t_2(-\infty<t_1<t_2<T)$. Розглянемо область $Q_{t_1,t_2}=Q\cap\{t_1<t<t_2\}$. Тоді для функції u буде справедлива рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[(u_{tt},v)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u,D^\alpha v)+\sum_{|\alpha|\le m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u,v)+$$
$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t,D^\alpha v)+\sum_{|\alpha|\le l}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t,v)\Bigg]dx\,dt=0 \quad (7)$$

для довільної $v \in C_0^\infty(Q_{t_1,t_2})$. Позначимо через $H^{l,0}(Q_{t_1,t_2})$ замикання множини $C_0^\infty(Q_{t_1,t_2})$ за нормою

$$\|u\|_{H^{l,0}(Q_{t_1,t_2})} = \left(\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді рівність (7) буде справджуватися і для всіх функцій $v \in H^{l,0}(Q_{t_1,t_2})$.

Зробимо в (7) заміну $u(x,t) = w(x,t)e^{-\lambda t}$ і за v виберемо функцію w_t. Після простих перетворень отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(w_{tt}, w_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta w, D^\alpha w_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta w_t, D^\alpha w_t) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\le m} (G_\alpha(x,t) D^\alpha w, w_t) + \sum_{|\alpha|\le l} (C_\alpha(x,t) D^\alpha w_t, w_t) - \lambda \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta w, D^\alpha w_t) -$$
$$- \lambda \sum_{|\alpha|\le l} (C_\alpha(x,t) D^\alpha w, w_t) - 2\lambda (w_t, w_t) + \lambda^2 (w, w_t) \Bigg] e^{-\lambda t} dx\, dt = 0. \quad (8)$$

Враховуючи нерівність (3), умови (A_0), (A_1), (B_0), (C_0), теорему 1.17 ([1], стор.177) і позначення, перетворимо кожний член рівності (8) окремо. Матимемо:

$$\Im_1 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (w_{tt}, w_t) e^{-\lambda t} dx\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} |w_t|^2 e^{-\lambda t_2} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} |w_t|^2 e^{-\lambda t_1} dx + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |w_t|^2 e^{-\lambda t} dx\, dt;$$

$$\Im_2 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta w, D^\alpha w_t) e^{-\lambda t} dx dt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} a_0(\Omega_{t_2}) \int\limits_{\Omega_{t_2}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha w|^2 e^{-\lambda t_2} dx - \frac{1}{2} a^0(\Omega_{t_1}) \int\limits_{\Omega_{t_1}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha w|^2 e^{-\lambda t_1} dx +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (\lambda a_0(\Omega_t) - a^1(\Omega_t)) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha w|^2 e^{-\lambda t} dx dt;$$

$$\Im_3 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta w_t, D^\alpha w_t) e^{-\lambda t} dx\, dt \ge \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} b_0(\Omega_t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w_t|^2 e^{-\lambda t} dx\, dt;$$

$$\Im_4 = \lambda \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta w, D^\alpha w_t) e^{-\lambda t} dx\, dt \le$$
$$\le \frac{\lambda}{2} \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[\delta_1 \gamma^l_{m,0}(\Omega_t) b^1_0(Q_t) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha w|^2 + \frac{1}{\delta_1} b^2_0(Q_t) \gamma^l_{l,0}(\Omega_t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w_t|^2 \right] e^{-\lambda t} dx\, dt,$$
$$\delta_1 > 0;$$

$$\Im_5 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|\le m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha w, w_t)e^{-\lambda t}dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[\delta_2\sqrt{g_0(Q_t)}|w_t|^2 + \frac{1}{\delta_2}\sqrt{g_0(Q_t)}\gamma^m_{m,0}(\Omega_t)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2\right]e^{-\lambda t}dx\,dt, \quad \delta_2 > 0;$$

$$\Im_6 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|\le m} (C_\alpha(x,t)D^\alpha w_t, w_t)e^{-\lambda t}dx\,dt \ge$$

$$\ge \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[c^0_0(\Omega_t)|w_t|^2 - \sqrt{c_2(Q_t)\gamma^l_{l,1}(\Omega_t)\gamma_{l,0}(\Omega_t)}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha w_t|^2\right]e^{-\lambda t}dx\,dt;$$

$$\Im_7 = \lambda\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|\le l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha w, w_t)e^{-\lambda t}dx\,dt \le \frac{\lambda}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[\sqrt{c_0(Q_t)}\gamma_{l,0}(\Omega_t)\delta_3\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha w_t|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\delta_3}\sqrt{c_0(Q_t)}\gamma^l_{m,0}(\Omega_t)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2\right]e^{-\lambda t}dx\,dt, \quad \delta_3 > 0;$$

$$\Im_8 = -2\lambda\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (w_t, w_t)e^{-\lambda t}dx\,dt = -2\lambda\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |w_t|^2 e^{-\lambda t}dx\,dt;$$

$$\Im_9 = \lambda^2\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (w, w_t)e^{-\lambda t}dx\,dt =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |w|^2 e^{-\lambda t_2}dx - \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |w|^2 e^{-\lambda t_1}dx + \frac{\lambda^3}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |w|^2 e^{-\lambda t}dx\,dt.$$

З оцінок інтегралів $\Im_1, \ldots, \Im_8$ і рівності (8) випливає нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} \left[|w_t|^2 + a_0(\Omega_{t_2})\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2 + \lambda^2|w|^2\right]e^{-\lambda t_2}dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[\left(2c^0_0(\Omega_t) - 3\lambda - \delta_2\sqrt{g_0(Q_t)}\right)|w_t|^2 + \lambda^3|w|^2 + \right.$$

$$+ \Big(\lambda a_0(\Omega_t) - a^1(\Omega_t) - \lambda b^1_0(Q_t)\gamma^l_{m,0}(\Omega_t)\delta_1 -$$

$$- \frac{1}{\delta_2}\sqrt{g_0(Q_t)}\gamma^m_{m,0}(\Omega_t) - \frac{1}{\delta_3}\lambda\sqrt{c_0(Q_t)}\gamma^l_{m,0}(\Omega_t)\Big)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2 +$$

$$+ \Big(2b_0(\Omega_t) - \frac{1}{\delta_1}\lambda b^2_0(Q_t)\gamma^l_{l,0}(\Omega_t) - 2\sqrt{c_2(Q_t)\gamma^l_{l,1}(\Omega_t)\gamma_{l,0}(\Omega_t)} -$$

$$\left. - \lambda\sqrt{c_0(Q_t)}\gamma_{l,0}(\Omega_t)\delta_3\Big)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha w_t|^2\right]e^{-\lambda t}dx\,dt \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_{t_1}} \left[\lambda^2|w|^2 + |w_t|^2 + a^0(\Omega_{t_1})\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2\right]e^{-\lambda t_1}dx. \qquad (9)$$

Враховуючи умови теореми, з (9) легко отримати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[|w_t|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2\Big]e^{-\lambda t}dx\le 0,\quad t\in(-\infty,t_2),\quad t_2\in(-\infty,T).$$

Звідси і випливає, що $u=0$ майже скрізь в $Q_{-\infty,t_2}$. Далі відомим методом ([2], с.201) легко показати, що $u=0$ майже скрізь в $Q_{t_2,T}$. Теорему 1 доведено.

Розглянемо систему нерівностей

$$\begin{aligned}&\lambda a_0+a_1-\frac{1}{\delta_1}\Big(2\lambda b_0^2(Q)+b_1^2(Q)\Big)\gamma_{m,0}^l-\sqrt{2(g_1(Q)+\lambda^2 g_0(Q))\gamma_{m,0}^m\gamma_{m,0}}-\\&\qquad-\delta_2\sqrt{g_0(Q)}\gamma_{m,0}^m-(2\lambda\sqrt{c_0(Q)}\delta_3+\sqrt{c_1(Q)}\delta_3)\gamma_{m,0}>0;\\&2b_0-\delta_1(2\lambda b_0^1(Q)+b_1^1(Q))\gamma_{l,0}^l-\frac{1}{\delta_2}\sqrt{g_0(Q)}\gamma_{l,0}-\frac{2\lambda}{\delta_3}\sqrt{c_0(Q)}\gamma_{l,0}^l-\\&\qquad-\frac{1}{\delta_3}\sqrt{c_1(Q)}\gamma_{l,0}^l-2\sqrt{c_0(Q)\gamma_{l,0}^l\gamma_{l,0}}+(2c_0^0-7\lambda)\gamma_{l,0}>0.\end{aligned}\tag{10}$$

Назвемо набір чисел $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ $(\delta_1>0,\delta_2>0,\delta_3>0)$ допустимим для системи (10), якщо ця система має для чисел $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ додатний розв'язок λ. Позначимо через Δ_2 множину всіх допустимих наборів $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ системи (10), а через Λ_2 – множину додатних розв'язків системи (10) для всіх $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}\in\Delta_2$.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* (A_0), (A_1), (B_0), (C_0) *і, крім того,*
$l<m$;
$A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $(|\alpha|=|\beta|\le m)$,
$B_{\varkappa\sigma}$, $B_{\varkappa\sigma t}(|\varkappa|=|\sigma|\le l)$
G_γ, $G_{\gamma t}$ $(|\gamma|\le m)$,
C_ϱ, $C_{\varrho t}$ $(|\varrho|\le l)\in L^\infty(Q)$;
$\Delta_2\ne\varnothing$; $\Omega_{t_2}^*\subseteq\Omega_{t_1}^*$
для всіх t_1,t_2 $(-\infty<t_1<t_2\le T)$. *Тоді задача (1), (2) не може мати більше одного розв'язку в класі функцій* u *таких, що*

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2+\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t|^2\Big]dx\to o(1)e^{-\lambda_0 t},$$

коли $t\to-\infty$, *де* $\lambda_0\in\Lambda_2$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

Нехай тепер $\Pi=\Omega\times(-\infty,T)$, $\Gamma=\partial\Omega\times(-\infty,T)$. Будемо надалі припускати, що коефіцієнти системи (1) визначені в області Π. Введемо функцію

$$F_\Pi(x,t)=\begin{cases}F(x,t), & \text{якщо}\quad (x,t)\in Q,\\ 0, & \text{якщо}\quad (x,t)\in\Pi\setminus Q.\end{cases}$$

Розглянемо систему нерівностей

$$\lambda a_0(\Omega) - a^1(\Omega) - \lambda b_0^1(\Pi)\gamma_{m,0}^l(\Omega)\delta_1 - \frac{1}{\delta_2}\sqrt{g_0(\Pi)}\gamma_{m,0}^l(\Omega) - \\ - \frac{1}{\delta_3}\lambda\sqrt{c_0(\Pi)}\gamma_{m,0}^l(\Omega) + \lambda^3\gamma_{m,0}(\Omega) > 0,$$

$$2b_0(\Omega) - \frac{1}{\delta_1}\lambda b_0^2(\Pi)\gamma_{l,0}^l(\Omega) - 2\sqrt{c_2(\Pi)\gamma_{l,1}^l(\Omega)\gamma_{l,0}(\Omega)} - \lambda\sqrt{c_0(\Pi)}\gamma_{l,0}(\Omega)\delta_3 + \\ + (2c_0^0(\Omega) - 3\lambda - \delta_2\sqrt{g_0(\Pi)})\gamma_{l,0}(\Omega) > 0. \tag{11}$$

Будемо називати набір чисел $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ $(\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0)$ допустимим для системи (14) , якщо вона для цього набору чисел має додатний розв'язок λ.

Позначимо через Δ_3 множину всіх допустимих наборів для системи (11) і через Λ_3 – множину додатних розв'язків цієї системи для всіх $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \in \Delta_3$.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) в області* Π *виконуються умови* (A_0), (A_1), (B_0), (C_0) *і, крім того,*
$A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $(|\alpha| = |\beta| \le m)$,
$B_{\varkappa\sigma}(|\varkappa| = |\sigma| \le l)$
G_γ, $(|\gamma| \le m)$,
C_ϱ, $(|\varrho| \le l) \in L^\infty(\Pi)$;
$l \le m$; $\partial\Omega \subset C^{m-1,1}$; $\Delta_3 \ne \varnothing$;
межа S *області* Q *така, що якщо* $t \in (-\infty, T]$, $v \in H_0^m(\Omega)$ *і* $v = 0$ *майже скрізь в* $\Omega \setminus \Omega_t$, *то* $v \in H_0^m(\Omega_t)$; $\int\limits_Q |F(x,t)|^2 e^{\lambda t}dx\,dt < \infty$, *де* $\lambda \in \Lambda_3$; *області* Ω_t, $t \in (-\infty, T]$, *однозв'язні. Тоді існує узагальнений розв'язок и задачі (1), (2) такий, що*

$$\int\limits_{\Omega_t}\left(|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2\right)dx = o(1)e^{-\lambda t},$$

коли $t \to -\infty$.

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}$ – базис простору $H_0^m(\Omega)$ і $\{u^{j,\varepsilon}\}$ – послідовність функцій, яка визначається формулою

$$u^{j,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{j} c_k^j(t)\varphi^k(x), \quad j = 1, 2, ...,$$

де $c_1^j(t), \ldots, c_j^j(t)$ – розв'язок такої задачі Коші:

$$\int\limits_\Omega \Bigg[(u_{tt}^{j\varepsilon}, \varphi^k) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^{j,\varepsilon}, D^\alpha\varphi^k) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^{j,\varepsilon}, D^\alpha\varphi^k) + \\ + \sum_{|\alpha|\le m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u^{j,\varepsilon}, \varphi^k) + \sum_{|\alpha|\le l}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^{j,\varepsilon}, \varphi^k) + \frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{E}(x,t)u_t^{j,\varepsilon}, \varphi^k) + \\ + \frac{\lambda}{\varepsilon}(\mathfrak{E}(x,t)u^{j,\varepsilon}, \varphi^k) - (F_\Pi(x,t), \varphi^k)\Bigg]dx = 0, \tag{12}$$

$$c_k^j(t_0) = 0, \quad c_{kt}^j(t_0) = 0, \quad k = 1, \ldots, j, \ -\infty < t_0 < T, \ \varepsilon > 0, \tag{13}$$

де

$$\mathfrak{E}(x,t)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad (x,t)\in Q,\\ 1, & \text{якщо} \quad (x,t)\in \Pi\setminus Q.\end{cases}$$

Зробимо в (12) заміну

$$u^{j,\varepsilon}(x,t)=w^{j,\varepsilon}(x,t)e^{-\lambda t}.$$

Тоді система (12) набуде вигляду

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\Bigg[&(w_{tt}^{j,\varepsilon},\varphi^k)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}w^{j,\varepsilon},D^{\alpha}\varphi^k)+\\ &+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}w_t^{j,\varepsilon},D^{\alpha}\varphi^k)-\\ &-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}w^{j,\varepsilon},D^{\alpha}\varphi^k)-\\ &-\sum_{|\alpha|\le m}(G_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}w^{j,\varepsilon},\varphi^k)+\sum_{|\alpha|\le l}C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}w_t^{j,\varepsilon},\varphi^k)-\\ &-\lambda\sum_{|\alpha|\le l}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}w^{j,\varepsilon},\varphi^k)-2\lambda(w_t^{j,\varepsilon},\varphi^k)+\lambda^2(w^{j,\varepsilon},\varphi^k)+\\ &+\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{j,\varepsilon},\varphi^k)-(F_{\Pi}(x,t)e^{\lambda t},\varphi^k)\Bigg]e^{-\lambda t}dx=0,\quad k=0,\dots,j.\end{aligned}\tag{14}$$

Помножимо кожне з рівнянь системи (14) відповідно на функцію $c_{kt}^{j}(t)e^{\lambda t}$, і додамо їх, потім помножимо кожне рівняння системи (7) відповідно на функції $\lambda c_k^j(t)e^{\lambda t}$ і додамо їх. Якщо тепер додати результати попередніх дій і проінтегрувати по проміжку $[t_0,\tau]$, то отримаємо рівність

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}}&\left[(w_{tt}^{j,\varepsilon},w_t^{j,\varepsilon})+\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{j,\varepsilon},w_t^{j,\varepsilon})-(F_{\Pi}(x,t)e^{\lambda t},w_t^{j,\varepsilon})\right]e^{-\lambda t}dx\,dt+\\ &+\int\limits_{t_0}^{\tau}\mathfrak{A}_{\lambda}(w^{j,\varepsilon},w_t^{j,\varepsilon})e^{-\lambda t}dt=0,\end{aligned}\tag{15}$$

де

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{\lambda}(y,z)=\int\limits_{\Omega}\Bigg[&\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}y,D^{\alpha}z)+\\ &+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}y_t,D^{\alpha}z_t)-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}y,D^{\alpha}z_t)+\\ &+\sum_{|\alpha|\le m}(G_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}y,z_t)+\sum_{|\alpha|\le l}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}y_t,z_t)-\\ &-\lambda\sum_{|\alpha|\le l}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}y,z_t)-2\lambda(y_t,z_t)+\lambda^2(y,z_t)\Bigg]dx,\end{aligned}$$

$\Pi_{t_0,\tau} = \Omega \times (t_0, \tau)$. Рівність (15) у порівнянні з (8) містить лише два нові члени:

$$\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}} \frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon})e^{-\lambda t}dx\,dt;$$

$$\Im_{10} = \int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}} (F_\Pi(x,t)e^{\frac{\lambda}{2}t}, w_t^{j,\varepsilon}e^{\frac{-\lambda}{2}t})dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\delta_4}\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}} |F_\Pi|^2 e^{\lambda t}dx\,dt + \frac{\delta_4}{2}\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}} |w_t^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\lambda t}dx\,dt,\ \delta_4 > 0.$$

Тоді, враховуючи оцінки інтегралів $\Im_1, \ldots, \Im_{10}$, і умови (13), ми з рівності (15) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|w_t^{j,\varepsilon}|^2 + a_0(\Omega)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2 + \lambda^2|w^{j,\varepsilon}|^2\right]e^{-\lambda\tau}dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left[\left(2c_0^0(\Omega) - 3\lambda - \delta_4 - \delta_2\sqrt{g_0(\Pi_t)}\right)|w_t^{j,\varepsilon}|^2 + \lambda^3|w^{j,\varepsilon}|^2 +\right.$$

$$+\left(\lambda a_0(\Omega) - a^1(\Omega) - \lambda b_0^1(\Pi_t)\gamma_{m,0}^l(\Omega)\delta_1 - \frac{1}{\delta_2}\sqrt{g_0(\Pi_t)}\gamma_{m,0}^m(\Omega) -\right.$$

$$-\frac{1}{\delta_3}\lambda\sqrt{c_0(\Pi_t)}\gamma_{m,0}^l(\Omega)\Big)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2 + \Big(2b_0(\Omega) - \frac{1}{\delta_1}\lambda b_0^2(\Pi_t)\gamma_{l,0}^l(\Omega) -$$

$$\left.\left.-2\sqrt{c_2(\Pi_t)\gamma_{l,1}^l(\Omega)\gamma_{l,0}(\Omega)} - \lambda\sqrt{c_0(\Pi_t)}\gamma_{l,0}(\Omega)\delta_3\Big)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}|^2\right]e^{-\lambda t}dxdt +\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}}(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon})e^{-\lambda t}dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{\delta_4}\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}}|F_\Pi|^2 e^{\lambda t}dx\,dt,\ \text{де}\ \Pi_t = \Omega\times(-\infty, t). \tag{16}$$

Оскільки $\lambda \in \Lambda_3$, то знайдеться такий набір $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \in \Delta_3$ і такі числа $\tau_0(-\infty < \tau_0 < T)$, $\delta_4 > 0$, що в області Π_{τ_0} справджуватимуться оцінки

$$\int\limits_{\Pi_{\tau_0}}\left[\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2 + \sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}|^2\right]e^{-\lambda t}dx\,dt \le \mu_{11}, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Pi_{\tau_0}}(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon})e^{-\lambda t}dx\,dt \le \mu_{11}\varepsilon, \tag{18}$$

де стала μ_{11} не залежить від j і ε, а функція $w^{j,\varepsilon}$ продовжена нулем на область Π_{t_0}. Оцінки (17), (18) отримуємо цілком подібно як і при доведенні теореми 1.

Далі легко отримати оцінки (17), (18) і в області $\Pi_{\tau_0,T}$. Отже,

$$\int\limits_{\Pi}\Big[\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2+\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}|^2\Big]e^{-\lambda t}dx\,dt\le\mu_{11},\tag{19}$$

$$\int\limits_{\Pi}(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{j,\varepsilon},w_t^{j,\varepsilon})e^{-\lambda t}dx\,dt\le\mu_{11}\varepsilon.\tag{20}$$

З оцінки (19) випливає існування такої підпослідовності $\{w^{s,\varepsilon,t_0}\}\subset\{w^{j,\varepsilon}\}$, що

$$\begin{aligned}&e^{-\lambda t}w^{s,\varepsilon,t_0}\to e^{-\lambda t}w^{\varepsilon,t_0}\quad\text{слабо в}\quad L^2((-\infty,T);(H_0^m(\Omega))^N);\\&e^{-\lambda t}w_t^{s,\varepsilon,t_0}\to e^{-\lambda t}w_t^{\varepsilon,t_0}\quad\text{слабо в}\quad L^2((-\infty,T);(H_0^l(\Omega))^N),\end{aligned}$$

коли $s\to\infty$, причому для кожної функції w^{ε,t_0} тепер правильні оцінки (19), (20). Тоді

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}_\lambda(w^{s,\varepsilon,t_0},v)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}\Big[(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{s,\varepsilon,t_0},v)-\varepsilon(F_{\Pi,t_0}(x,t)e^{\lambda t},v)\Big]e^{-\lambda t}dx\to\\&\qquad\to\mathfrak{A}_\lambda(w^{\varepsilon,t_0},v)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}\Big[(\mathfrak{E}(x,t)w_t^{\varepsilon,t_0},v)-\varepsilon(F_{\Pi,t_0}(x,t)e^{\lambda t},v)\Big]e^{-\lambda t}dx,\end{aligned}$$

коли $s\to\infty$ для довільної $v\in C_0^\infty(\Omega)$. Тут

$$F_{\Pi,t_0}(x,t)=\begin{cases}F_\Pi(x,t), & \text{якщо}\quad (x,t)\in\Pi_{t_0,T},\\ 0, & \text{якщо}\quad (x,t)\in\Pi_{t_0}.\end{cases}$$

Легко бачити, що

$$w_{tt}^{\varepsilon,t_0}e^{-\lambda t}\in L^2((-\infty,T);(H^{-m}(\Omega))^N)$$

і w^{ε,t_0} є узагальненим розв'язком задачі:

$$\begin{aligned}&w_{tt}+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w_t)-\\&-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w)+\sum_{|\alpha|\le m}G_\alpha(x,t)D^\alpha w+\sum_{|\alpha|\le l}C_\alpha(x,t)D^\alpha w_t-\\&-\lambda\sum_{|\alpha|\le l}C_\alpha(x,t)D^\alpha w-2\lambda w_t+\lambda^2 w+\frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{E}(x,t)w_t=F_{\Pi,t_0}(x,t),\end{aligned}\tag{21}$$

$$D^\alpha w\Big|_\Gamma=0,\quad |\alpha|\le m-1.\tag{22}$$

Будемо тепер надавати послідовно для t_0 значення

$$t_0=T-1,\ \ t_0=T-2,\dots,t_0=T-k,\dots$$

Тоді отримаємо послідовність функцій $\{w^{\varepsilon,k}(x,t)\}$, кожна з яких є узагальненим розв'язком задачі (21),(22) відповідно з правою частиною $F_{\Pi,T-k}(x,t)$ і для цих функцій правильні оцінки (19), (20). Отже, з $\{w^{\varepsilon,k}\}$ можна виділити підпослідовність $\{w^{\varepsilon,i}\}$ таку, що

$$e^{-\lambda t}w^{\varepsilon,i} \to e^{-\lambda t}w^{\varepsilon} \quad \text{слабо в} \quad L^2((-\infty,T);(H_0^m(\Omega))^N);$$
$$e^{-\lambda t}w_t^{\varepsilon,i} \to e^{-\lambda t}w_t^{\varepsilon} \quad \text{слабо в} \quad L^2((-\infty,T);(H_0^l(\Omega))^N),$$

коли $i \to \infty$, і для функцій $w^{\varepsilon}(x,t)$ правильні оцінки (19), (20). Нехай $t_1 (-\infty < t_1 < T)$ – довільне фіксоване число. Неважко переконатися, що $w^{\varepsilon}(x,t)$ є узагальненим розв'язком задачі (21), (22) з правою частиною F_{Π}. На підставі оцінки (19), яка правильна для функцій w^{ε}, можемо вибрати підпослідовність $\{w^{\varepsilon_k}\}$ таку, що

$$e^{-\lambda t}w^{\varepsilon_k} \to e^{-\lambda t}w \quad \text{слабо в} \quad L^2((-\infty,T);(H_0^m(\Omega))^N);$$
$$e^{-\lambda t}w_t^{\varepsilon_k} \to e^{-\lambda t}w_t \quad \text{слабо в} \quad L^2((-\infty,T);(H_0^l(\Omega))^N),$$

коли $\varepsilon_k \to 0$, і для граничної функції правильні оцінки (19), (20). Тоді з (20) випливає, що

$$\int\limits_{\Pi} (\mathfrak{E}(x,t)w_t, w_t)e^{-\lambda t}dx\,dt = 0,$$

тобто $w_t = 0$ майже скрізь в $\Pi \setminus Q$. Оскільки $w\big|_{\Gamma} = 0$, то $w = 0$ майже скрізь в $\Pi \setminus Q$. Звідси на підставі умови теореми випливає, що $w \in H_0^m(\Omega_t)$ і $w_t \in H_0^l(\Omega_t)$ для майже всіх $t \in (-\infty,T)$. Тепер легко показати, що w є узагальненим розв'язком задачі (21), (22) з правою частиною F_{Π}. Звідси маємо, що функція $u = we^{-\lambda t}$ буде узагальненим розв'язком задачі (1), (2) з відповідною поведінкою, коли $t \to -\infty$. Теорему 3 доведено.

Зауваження. Якщо $\Omega_t^* = \Omega$, $t \in (-\infty,T)$, то в теоремі 3 можна відмовитись від однозв'язності області Ω.

На закінчення зауважимо, що задача Фур'є для еволюційних рівнянь і систем розглядалась у роботах [3]–[15].

ЛІТЕРАТУРА

1. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, – М.:Мир, 1978. 336 с.
2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, – М.:Наука, 1973. 408 с.
3. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* // Успехи матем. наук. 1976. Т.31. №6. С.142–166.
4. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1989. вып.14. С.3–44.
5. Бокало Н.М. *Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности* // Сиб. матем. ж. 1993. 34, №4. С.33–40.
6. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. матем. ж. 1982. 34, №5. С.547–552.

7. Кадыров Р.Р., Жураев Б.Б. *О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высшего порядка* // Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. н. 1985. №2. С.23–29.

8. Лавренюк С.П. *Задача для одного эволюционного уравнения в неограниченном по времени цилиндре* // Укр. матем. ж. 1990. 42, №11. С.1481–1486.

9. Лавренюк С.П. *Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единсвенности* // Нелинейные граничные задачи. 1993. вып.5. С.53–58.

10. Кирилич В.М., Мишкіс А.Д. *Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу* // Доп. АН УРСР, сер.А. 1991. №5. С.8–10.

11. Ивасишен С.Д. *О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий* // Дифф. уравнения. 1978. 14, №2. С.361–363.

12. Олейник О.А. *О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // Успехи матем. наук. 1975. 30, вып.2. С.219–220.

13. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *О поведении решений общих параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // Доклады АН СССР. 1975. 220, №5. С.1027–1030.

14. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функ. анализ и его приложения. 1974. 8, вып.4. С.59–70.

15. Лавренюк С.П. *Про єдиність розв'язку задачі без початкових умов для одного еволюційного рівняння* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-матем. 1993. вип.38. С.3–6.

Львівський державний університет ім. Ів. Франка,

механіко-математичний факультет

290602, м.Львів, вул. Університетська, 1

Надійшло 10.01.96.