

ПРО НУЛІ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ В ПІВПЛОЩИНІ

Б.В. Винницький

B. Vynnytskyi. *On zeros of some classes of functions analytic in half-plane* // Matematychni Studii. **6** (1996) P.67–72.

It is proved that the condition

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n + \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|} \right) - \frac{\sigma}{\pi} \ln(r) \right) < +\infty$$

is necessary and sufficient for existence of an analytic in the right half-plane $\mathbb{C}_+$ function $F \not\equiv 0$ which has zeroes in every point $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$ and

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r |\sin \varphi|} dr \right\} < +\infty, \quad p > 0, \quad \sigma \geq 0.$$

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – довільна послідовність точок із півплощини $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Скажемо, що аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція F належить класу Λ_+ , якщо $F \not\equiv 0$ і в кожній точці λ_n вона має нуль (нуль кратності $k \geq m$, якщо m членів послідовності λ дорівнює λ_n). Із [1] випливає наступне твердження. Для того, щоб існувала функція $F \in \Lambda_+$, для якої (через $c_1, c_2, \dots$ позначаємо додатні сталі) при всіх $z \in \mathbb{C}_+$ виконується $|F(z)| \leq c_1 \exp(\sigma r)$, $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $\sigma \geq 0$, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n + \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (S(r) - (\sigma/\pi) \ln r) < +\infty, \tag{1}$$

де

$$S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \cos \varphi_n, \quad \varphi_n = \arg \lambda_n.$$

Метою даної замітки є доведення наступної теореми, яка для $p = 2$ також доведена в [1].

Теорема 1. Для того, щоб існувала аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $F \in \Lambda_+$, яка для заданих $\sigma \geq 0$ і $p > 0$ задовольняє умову

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin \varphi|} dr \right\} < +\infty, \quad (2)$$

необхідно і досить, щоб виконувалася умова (1).

Відзначимо, що при $\sigma = 0$ клас аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій F , які задовольняють умову (2), збігається [2] з класом Харді $H^p(\mathbb{C}_+)$ і умова (1) рівносильна [1] умові

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n + \sum_{|\lambda_n| > 1} \operatorname{Re} \lambda_n / |\lambda_n|^2 < +\infty,$$

а остання [3–5] описує ті послідовності λ , які можуть служити послідовностями нулів функцій $F \in H^p(\mathbb{C}_+)$, $F \not\equiv 0$. Відмітимо також, що теорема 1 залишається в силі, якщо Λ_+ визначити як клас аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $F \not\equiv 0$, для кожної з яких λ є послідовністю нулів.

Доведення теореми 1 базується на декількох лемах. Добре відомими є формула Т. Карлемана (див. [6, с.19; 7, с.291]) та формула Р. Неванлінни для півкруга [6, с.16]. Відомими є і узагальнення цих формул (див. [8,9], а також [10, 11]). Ці узагальнені формули доведені в [8, с.22–29] для функцій $F \not\equiv 0$, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, і обмежених в кожному півкрузі $Q_R = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$, $0 < R < +\infty$. Тому для таких функцій F справедливими є наведені нижче нерівності (3) і (4). Відзначимо, що (3) встановлюється в [4] в ході доведення теореми 2.1, а для отримання (4) слід врахувати монотонність кутової граничної сингулярної функції.

Лема 1. Нехай функція $F \not\equiv 0$ задовольняє наступні умови:

- а) F має майже всюди на уявній осі кутові граничні значення;
- б) для кожного $R \in (0, +\infty)$ виконується

$$\int_{\partial Q_R} \ln^+ |F(z + i\varepsilon)| |dz| \leq c_1,$$

де $c_1 = c_1(R) < +\infty$ від ε , $0 < \varepsilon < 1$, не залежить;

- в) для кожного $R \in (0, +\infty)$ знайдеться така послідовність (ε_n) , $0 < \varepsilon_n \rightarrow 0$, для якої

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \ln^+ |F(iy + \varepsilon_n)| dy = \int_{-R}^R \ln^+ |F(iy)| dy.$$

Тоді для кожного $R \in (1; +\infty)$ виконується

$$\sum_{|z_n| \leq R} \operatorname{Re} z_n < +\infty, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 < |z_n| \leq R} \left(\frac{1}{|z_n|} - \frac{|z_n|}{R^2} \right) \cos \theta_n &\leq \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |F(Re^{i\theta})| \cos \theta d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln |F(-it)F(it)| dt + c_1, \end{aligned} \quad (4)$$

де $c_1 = c_1(F)$ – стала і $z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$ – нулі F із $\mathbb{C}_+$.

Лему 1 можна, напевно, отримати із результатів статті [9] методом, подібним до [4, с.80]. Проте, ми наведемо дещо інше доведення, яке придатне для отримання і інших нерівностей. Із умови б) випливає обмеженість інтегралів

$$\int_{-R}^R \ln^+ |1/F(it + \varepsilon)| dt, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln^+ |1/F(Re^{i\theta} + \varepsilon)| \cos \theta d\theta$$

сталюю $c_1 = c_1(R) < +\infty$, яка від ε , $0 < \varepsilon < 1$, не залежить. Це фактично показано в [8, с.24]. Тому, завдяки б),

$$\int_{-R}^R \left| \ln |F(it + \varepsilon)| \right| dt \leq c_2, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \ln |F(Re^{i\theta} + \varepsilon)| \right| \cos \theta d\theta \leq c_2. \quad (5)$$

Далі, оскільки $\cos \theta$ є малим в околі точок $\theta = -\pi/2$ і $\theta = \pi/2$, то із умови б) для кожного $R > 0$ маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln^+ |F(Re^{i\theta} + \varepsilon)| \cos \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln^+ |F(Re^{i\theta})| \cos \theta d\theta. \quad (6)$$

Крім цього

$$\int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln^+ |F(it + \varepsilon)| dt = \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) d\Phi_\varepsilon(t),$$

де

$$\Phi_\varepsilon(t) = \int_{-R}^t \ln^+ |F(it + \varepsilon)| dt.$$

Із б) випливає, що функція Φ_ε і її повна варіація на $[-R, R]$ обмежені сталою, яка від ε , $0 < \varepsilon < 1$, не залежить. Тому із в) і теорем Хелі отримаємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln^+ |F(it + \varepsilon_n)| dt = \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln^+ |F(it)| dt. \quad (7)$$

Тепер скористаємось наступною формулою [12, с.645]:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 < |z_n| \leq R} \left(\frac{1}{|z_n|} - \frac{|z|}{R^2} \right) \cos \theta_n + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \sum_{|z_n| < r} \operatorname{Re} z_n = \\ & = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln^+ |F(Re^{i\theta})| \cos \theta d\theta + \int_r^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln^+ |F(it)F(-it)| dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \int_0^r \ln^+ |F(it)F(-it)| dt - \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln^+ |F(re^{i\theta})| \cos \theta d\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

яка справедлива для всіх r і R , $0 < r < R < +\infty$, та функцій $F \neq 0$, аналітичних в $\overline{\mathbb{C}}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$, і в якій z_n – нулі F із $\mathbb{C}_+$. Застосувавши рівність (8) до функції $F_\varepsilon(z) = F(z + \varepsilon)$, завдяки (5), отримуємо

$$\sum_{\substack{|z_k - \varepsilon| < r, \\ \operatorname{Re} z_k > \varepsilon}} \operatorname{Re}(z_k - \varepsilon) \leq c_1,$$

де $c_1 < +\infty$ від ε , $0 < \varepsilon < 1$, не залежить. Звідси випливає (3). Далі, візьмемо в розглядуваній формулі $\varepsilon = \varepsilon_n$ і скористаємось рівністю $\ln |F_\varepsilon| = \ln^+ |F_\varepsilon| - \ln^+ |1/F_\varepsilon|$. Перейшовши в отриманій рівності до границі і застосувавши співвідношення (5)–(7) та лему Фату, отримуємо (4).

Лема 2. Нехай аналітична в $\mathbb{C}^+$ функція F задовольняє умову (2). Тоді F має майже всюди на уявній осі кутові граничні значення,

$$F(re^{\pm i\pi/2}) \exp(-\sigma r) \in L^p(0, +\infty), \quad (9)$$

$$|F(z)| \leq c_1 \exp(c_1|z|)/x^{1/p}, \quad z \in \mathbb{C}^+. \quad (10)$$

Доведення. Нехай $F_1(z) = F(z)e^{i\sigma z}$, $f_1(z) = F_1(z^{1/2})/z^{1/2p}$. Тоді при звичайному виборі віток

$$\sup_{0 < \varphi < \pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |F_1(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty, \quad \sup_{0 < \varphi < \pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty \quad (11)$$

і, значить, f_1 належить класу Харді H^p у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ [2]. Тому [4, с.59] $|f_1(z)| \leq c_2/y^{1/p}$, $z \in \mathbb{C}^+$, і, отже, $|F_1(z)| \leq c_3/(r \cos \varphi)^{1/p}$, $\pi/6 \leq \varphi < \pi/2$. Звідси випливає (10) для $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$. Аналогічно, функція $f_2(z) = F_2(z^{1/2})/z^{1/2p}$, де $F_2(z) = F(z)e^{-i\sigma z}$, належить H^p в нижній півплощині і тому (10) виконується для $\varphi \in (-\pi/2, -\pi/6]$. Нарешті, розглянувши функції $F_3(z) = F(z)e^{-\sigma z}$ і $f_3(z) = F_3(z^{1/2})/z^{1/2p}$, переконуємось, що $f_3 \in H^p(\mathbb{C}^+)$ і $|f_3(z)| \leq c_4/(r \cos \varphi)$, $z \in \mathbb{C}_+$, а звідси отримуємо (10) і для $\varphi \in [-\pi/6, \pi/6]$. Отже, нерівність (10) доведено, а існування кутових граничних значень і (9) випливає із того, що f_1 і f_2 належать класам Харді у відповідних півплощинах.

Лема 3. Якщо аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція F задовольняє умову (2), то

$$\sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|} dy \right\} < +\infty.$$

Доведення леми 3 подібне до доведення аналогічного твердження в [2]. Досить показати, що

$$\sup_{x>0} \left\{ \int_0^{+\infty} |F_1(x+iy)|^p dy \right\} < +\infty.$$

При відображенні $w = z^2$ півпряма $\{z : \operatorname{Re} z = x; y > 0\}$, $x > 0$, перейде у вітку параболи $l_x = \{w = u + iv : u = x^2 - v^2/2x^2, v > 0\}$. При цьому

$$\int_0^{+\infty} |F_1(x+iy)|^p dy = \int_{l_x} |F_1(\sqrt{w})|^p \frac{|dw|}{2\sqrt{|w|}} = \frac{1}{2} \int_{l_x} |f_1(w)|^p |dw|.$$

Довжина частини l_x , яка лежить в будь-якому квадраті $\Delta(u_0, h) = \{w = u + iv : u_0 < u < u_0 + h, 0 < v < h\}$, $h > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$, не перевищує $8h$ (в цьому простіше переконатися геометричними міркуваннями). Тому міра $\mu_x(D) = \int_{l_x \cap D} |dw|$ є мірою Карлесона в $\mathbb{C}^+$. Залишилось скористатися наступною властивістю таких мір [4, с.70] (в потрібній редакції вона наведена в [2, с.78]). Якщо μ – міра Карлесона в $\mathbb{C}^+$, тобто $\mu(\Delta(u_0, h)) \leq c_1(\mu)h$, то для кожної функції $f_1 \in H^p(\mathbb{C}^+)$ виконується

$$\int |f_1|^p d\mu \leq c_2 \cdot c_1(\mu) \|f_1\|_{H^p(\mathbb{C}^+)}^p,$$

де c_2 від f_1 і μ не залежить.

Лема 4. Якщо аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $F \neq 0$ задовольняє умову (2), то для неї виконуються умови а)–в) лему 1.

Доведення. Виконання умови а) випливає із лему 2. Далі, згідно із (10),

$$|F(z + \varepsilon)| \leq c_1 \exp(c_1|z + \varepsilon|)/x^{1/p}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Звідси і із лему 3 отримуємо б). Крім цього, враховуючи нерівність Ієнсена [4, с.42] і лему 3, для кожної вимірної множини $e \subset [-R; R]$ отримуємо

$$\begin{aligned} \int_l^{\ln^+} |F(it + \varepsilon)|^p dt &\leq \mu(l) \left(\int_l^{\ln^+} (1 + |F(it + \varepsilon)|^p) \frac{dt}{\mu(l)} \right), \\ \int_l^{\ln^+} |F(it + \varepsilon)| dt &\leq \frac{1}{p} \mu(l) \ln \left(1 + \frac{c_1}{\mu(l)} \right), \end{aligned}$$

де $\mu(l)$ – міра Лебега множини e і стала $c_1 = c_1(R)$ від множини $e \subset [-R, R]$ і ε , $0 < \varepsilon < 1$, не залежить. Значить, сім'я функцій

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_{-R}^x \ln^+ |F(iy + \varepsilon)| dy, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

є одностайно абсолютно неперервною на $[-R, R]$ і тому [3, с.22] виконується в).

Доведемо теорему 1. Якщо $F \in \Lambda_+$ із властивістю (2) існує, то, із лем 1 і 4 отримуємо, що

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} S(r) &\leq \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |F(Re^{i\theta})| \cos \theta d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln |F(it)F(-it)| dt + c_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Але із (10) випливає, що перший доданок із правої частини (13) є обмеженим зверху на $[1, +\infty)$. Крім цього, завдяки (9),

$$\begin{aligned} \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln |F(it)| dt &\leq \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \sigma t dt + \frac{1}{p} \int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \times \\ &\times \ln (1 + e^{-p\sigma t} |F(it)|^p) dt \leq c_4 + \sigma \ln R + \frac{1}{p} \int_1^{+\infty} e^{-p\sigma t} |F(it)|^p dt \leq \sigma \ln R + c_5. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln |F(-it)| dt \leq \sigma \ln R + c_6.$$

Тому необхідну частину теореми 1 доведено. Нехай тепер виконується (1). Тоді із (12) випливає [8, с.30] рівномірна збіжність на компактах із $\mathbb{C}_+$ добутку

$$G_1(z) = \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n},$$

а за лемою 2 із [1] добуток

$$G_2(z) = \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right)$$

також збігається рівномірно на компактах із $\mathbb{C}_+$ і

$$|G_2(z)| \leq c_1 \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln r + c_1 x\right), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Оскільки $|G_1(z)| \leq 1$ для $z \in \mathbb{C}_+$, то при звичайному виборі віток функція

$$F(z) = G_1(z)G_2(z) \exp\left(-c_1 z - \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right) / (1+z)^{2/p},$$

задовольняє умову (2) і $F \in \Lambda_+$. Тому теорему 1 доведено.

Зазначимо, що якщо функція $a(\varphi)$ неперервна на $[-\pi/2, \pi/2]$ і $\sigma = (a(-\pi/2) + a(\pi/2)) > 0$, то умова (1) описує також послідовність нулів тих аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $F \not\equiv 0$, які задовольняють співвідношення

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p \exp(-pa(\varphi)r) dr \right\} < +\infty.$$

Це твердження доводиться тим же шляхом, що і теорема 1.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Винницький Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, в полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. 1994. 46, №5. С.484–500.
2. Седлецкий А.М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. 1975. 96, №1. С.75–86.
3. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций*. – Л.: ГИТТЛ, 1950. 337с.
4. Гарнет Дж. *Ограниченные аналитические функции*. – М.: Наука, 1980. 384с.
5. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p* . – М.: Мир, 1984. 368с.
6. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций*, – М.: Наука, 1970. 591с.
7. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*, – М.: ГИТТЛ, 1956. 560с.
8. Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом*. – М.: Наука, 1986. 240с.
9. Ito, J.-I. *Subharmonic functions in half-plane* // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V.129. №3. P.479–499.
10. Гришин А.Ф. *Субгармонические функции конечного порядка. Автореферат дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Харьков. 1992. 30с.*
11. Гришин А.Ф. *Функции первого порядка, субгармонические в полуплоскости, и одна тауберова теорема* // Теория функций, функц. анализ и их прил. 1990. Вып.53. С.87–94.
12. Хабибуллин Б.Н. *О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями* // Матем. заметки. 1988. 43. №5. С.644–650.

Department of Mathematics and Physics,
Drohobych Pedagogical Institute, Stryiska 3,
Drohobych, 293720, Ukraine.

Надійшло 1.12.94.