

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

Е.Г. ЗЕЛЕНЮК

Е. Zelenyuk. *Topological groups with finite semigroups of ultrafilters* // Matematychni Studii. **6** (1996) P.41–52.

Under CH for every natural number m there are constructed three group topologies p_m , λ_m , $\varkappa_m$ on a countable Boolean group B such that their semigroups of ultrafilters are m -element. Each discrete subset of the group (B, p_m) $((B, \lambda_m), (B, \varkappa_m))$ is closed. The group $(B, \varkappa_m)$ is irresolvable and extremally disconnected. The group (B, λ_m) , $m \geq 2$, is irresolvable and not extremally disconnected. This fact answers negatively the question of Comfort and van Mill whether an irresolvable abelian group is extremally disconnected [5].

Хорошо известно, что топология топологической группы полностью определяется фильтром окрестностей единицы, а следовательно, и ультрафильтрами, сходящимися к единице. Известно также, что число последних либо конечно, либо $\geq 2^c$. Это две принципиально различные возможности. Все обычные недискретные группы (метризуемые, компактные и т.д.) относятся, понятно, ко второму случаю. В данной работе изучаются топологические группы с конечным числом свободных сходящихся к единице ультрафильтров. Ранее был известен лишь один пример такой группы, построенный В.И. Малыхиным [1] в предположении аксиомы Мартина МА. Группа Малыхина – счетная булева группа, т.е. счетная группа экспоненты 2, с единственным свободным сходящимся к нулю ультрафильтром. Каждая топологическая группа с единственным свободным сходящимся к единице ультрафильтром содержит открытую счетную булеву подгруппу [1,2]. Топологическая группа с единственным свободным сходящимся к единице ультрафильтром обладает следующими экстремальными топологическими свойствами, достаточно известными топологам. Она неразложима, экстремально несвязна и каждое дискретное подмножество в ней замкнуто. “Наивные” примеры недискретных топологических групп, обладающих хотя бы одним из таких свойств, неизвестны. Более того, лишь для экстремальной несвязности были известны примеры, отличные от примера Малыхина. Недавно И.В. Протасовым [3] было доказано, что из существования топологической группы с единственным свободным сходящимся к единице

ультрафильтром вытекает существование P -точки в пространстве $\beta\omega \setminus \omega$. Следовательно, “наивно” такую группу построить невозможно.

В построении и изучении топологических групп с конечным числом $m > 1$ свободных сходящихся к единице ультрафильтров, в отличие от случая $m = 1$, существенную роль играет полугрупповая операция на ультрафильтрах, естественно продолжающая операцию умножения элементов группы. Относительно этой операции все свободные сходящиеся к единице ультрафильтры на топологической группе образуют полугруппу, называемую полугруппой ультрафильтров соответствующей топологической группы или топологии [4].

В данной работе для каждого натурального числа m на счетной булевой группе B в предположении континуум гипотезы СН построены три групповые топологии ϱ_m , λ_m , $\varkappa_m$, полугруппы ультрафильтров которых есть m -элементные полугруппы правых нулей, левых нулей и цепь идемпотентов соответственно. Во всех группах (B, ϱ_m) , (B, λ_m) , $(B, \varkappa_m)$ каждое дискретное подмножество замкнуто. Группы $(B, \varkappa_m)$ неразложимы и экстремально несвязны. Группы (B, ϱ_m) при $m \geq 2$ не более, чем m -разложимы и экстремально несвязны. Группы (B, λ_m) при $m \geq 2$ неразложимы и не экстремально несвязны. Последняя серия примеров отрицательно решает вопрос Комфорта-ван Милла из [5]: верно ли, что неразложимая абелева группа экстремально несвязна?

Доказано, что каждая хаусдорфова абелева группа с m -элементной полугруппой ультрафильтров содержит открытую счетную подгруппу периода $\leq 2^m$.

Доказано также, что из существования недискретной абелевой группы с конечной полугруппой ультрафильтров вытекает существование P -точки в $\beta\omega \setminus \omega$. Следовательно, “наивно” такую группу построить невозможно.

Основные результаты работы анонсированы в [6].

§1. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА.

Пусть G – бесконечная группа, βG – чех-стоунова компактификация G как дискретного пространства. Элементами пространства βG являются ультрафильтры на множестве G . При этом главные ультрафильтры отождествляются с соответствующими элементами из G . Базу топологии пространства βG образуют множества вида $\bar{A} = \{p \in \beta G : A \in p\}$, где A пробегает все подмножества из G . Каждый фильтр φ на множестве G определяет в βG непустое замкнутое подпространство $\bar{\varphi} = \bigcap \{\bar{A} : A \in \varphi\}$. Обратно, каждое непустое замкнутое подпространство из βG однозначно представимо в таком виде. Характер подпространства $\bar{\varphi}$ в объемлющем пространстве βG равен характеру фильтра φ – минимальной из мощностей баз фильтра φ .

Операция умножения элементов группы G естественно продолжается до операции умножения ультрафильтров – элементов пространства βG , – непрерывной по второму аргументу, когда первый аргумент фиксирован и принадлежит G , и непрерывной по первому аргументу при любом фиксированном втором. Если $p, q \in \beta G$, то множества вида $\bigcup \{a \cdot B_a : a \in A\}$, где $A \in p$, $B_a \in q$, образуют базу ультрафильтра $p \cdot q$. Продолженная операция остается ассоциативной, превращая, таким образом, βG в полугруппу. Такое продолжение возникло и интенсивно используется в комбинаторике чисел (см., например, обзор [7]).

Замкнутые подполугруппы полугруппы βG называются *полугруппами ультрафильтров* на группе G . В каждой полугруппе ультрафильтров $\bar{\varphi}$ операция

умножения непрерывна по первому аргументу, а сама полугруппа $\bar{\varphi}$ компактна. Следовательно (см., например, [8]), $\bar{\varphi}$ содержит минимальный идеал $I(\bar{\varphi})$, который является вполне простой полугруппой.

Лемма 1. Пусть $S = \{p_i : i < m\}$ – конечная полугруппа свободных ультрафильтров на группе G , $\{F_n(p_i) : n < \omega\}$ – убывающая последовательность элементов ультрафильтра p_i , $F_0(p_i) \cap F_0(p_j) = \emptyset$, если $i \neq j$, $p(a) = p_i$, если $a \in F_n(p_i)$. Тогда существует такая последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ различных элементов из G , что

- 1) $a_n \in F_n(p_i)$, где i – остаток от деления n на m ;
- 2) $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \in F_{n_0}(p(a_{n_0}) \cdot \dots \cdot p(a_{n_k}))$, где $n_0 < \dots < n_k$.

Доказательство. Выберем множество $A_0 \in p_0$ такое, что

$$\overline{A_0 \cdot p} \subset \overline{F_0(p_0 \cdot p)}$$

для всех $p \in S$, затем выберем $a_0 \in A_0 \cap F_0(p_0)$.

Предположим, что уже построена последовательность $\{a_n : n < l\}$ такая, что

- 1) $a_n \in F_n(p_i)$, где i – остаток от деления n на m ;
- 2) $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \in F_{n_0}(p(a_{n_0}) \cdot \dots \cdot p(a_{n_k}))$, где $n_0 < \dots < n_k < l$;
- 3) $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \cdot p \in \overline{F_{n_0}(p(a_{n_0}) \cdot \dots \cdot p(a_{n_k}) \cdot p)}$, где $n_0 < \dots < n_k < l$, $p \in S$.

Пусть j – остаток от деления l на m . Выберем $A_l \in p_j$ такое, что

$$\begin{aligned} a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \cdot A_l &\subset F_{n_0}(p(a_{n_0}) \cdot \dots \cdot p(a_{n_k}) \cdot p_j), \\ \overline{A_l \cdot p} &\subset \overline{F_l(p_j \cdot p)}, \\ a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \cdot \overline{A_l \cdot p} &\subset \overline{F_{n_0}(p(a_{n_0}) \cdot \dots \cdot p(a_{n_k}) \cdot p_j \cdot p)}, \end{aligned}$$

где $n_0 < \dots < n_k < l$, $p \in S$. Затем выберем $a_l \in A_l \cap F_l(p_j) \setminus \{a_n : n < l\}$. Тогда условия 1)–3) нашего индуктивного процесса будут также выполняться и с заменой l на $l + 1$.

Очевидно, что так построенная последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ будет требуемой.

Фильтр φ на группе G называется *элементарным* FP -*фильтром*, если существует последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ различных элементов из G такая, что множества вида

$$U_n = \text{FP}\{a_i : i \geq n\} = \{a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} : n \leq n_0 < \dots < n_k\}$$

образуют базу φ . FP -*фильтром* называется объединение возрастающей цепи элементарных FP -фильтров. Если группа G абелева, то вместо приставки “ FP ” используется “ FS ”. Отметим, что если G – булева группа, а φ – FS -фильтр на G , то фильтр $\varphi_0 = \{F \cup \{0\} : F \in \varphi\}$ имеет базу из подгрупп.

Лемма 2. Если φ – FP -фильтр, то для любого $U \in \varphi$ найдется $V \in \varphi$ такое, что $\overline{V \cdot \varphi} \subset \overline{U}$, в частности, $\bar{\varphi}$ – полугруппа.

Доказательство. Пусть ψ – элементарный FP -фильтр такой, что $U \in \psi \subset \varphi$, $\{a_n : n < \omega\}$ – последовательность различных элементов на G такая, что множества $U_n = \text{FP}\{a_i : i \geq n\}$ образуют базу ψ , n – номер такой, что $U_n \subset U$.

Достаточно показать, что $\overline{U}_n \cdot \overline{\psi} \subset \overline{U}_n$. Пусть $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k}$, где $n \leq n_0 < \dots < n_k$, – произвольный элемент из U_n . Тогда $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \cdot U_{n'} \subset U_{n_0}$ для всех $n' > n_k$. Но тогда $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \cdot \overline{\psi} \subset \overline{U}_{n_0}$ и, значит, $\overline{U}_n \cdot \overline{\psi} \subset \overline{U}_n$.

Полугруппа ультрафильтров $\overline{\varphi}$ на группе G называется *ФР-полугруппой* (элементарной ФР-полугруппой), если φ – ФР-фильтр (элементарный ФР-фильтр). Очевидно, что элементарная ФР-полугруппа имеет счетный характер.

Теорема 1. Пусть $S = \{p_i : i < t\}$ – конечная полугруппа свободных ультрафильтров на G , $\overline{\varphi}_i$ – замкнутые подпространства из βG счетного характера такие, что $p_i \in \overline{\varphi}_i$, $\overline{\varphi}_i \cap \overline{\varphi}_j \neq \emptyset$, если $i \neq j$. Тогда существуют непустые замкнутые подпространства $\overline{\psi}_i \subset \overline{\varphi}_i$ счетного характера такие, что $\overline{\psi} = \bigcup \{\overline{\psi}_i : i < t\}$ – элементарная ФР-полугруппа, причем $\overline{\psi}_i \cdot \overline{\psi}_j = \overline{\psi}_l$, где номер l определяется из уравнения $p_i \cdot p_j = p_l$.

Доказательство. В каждом фильтре φ_i выберем убывающую базу $\{F_n(p_i) : n < \omega\}$ так, что $F_0(p_i) \cap F_0(p_j) = \emptyset$, если $i \neq j$. Пусть $\{a_n : n < \omega\}$ – последовательность, предоставляемая леммой 1, ψ – элементарный ФР-фильтр, порожденный ею, т. е. фильтр, базу которого образуют множества $U_n = \text{ФР}\{a_r : r \geq n\}$, ψ_i – фильтр, базу которого образуют множества $U_n \cap F_0(p_i) = V_n(p_i)$. Тогда $\psi_i \supset \varphi_i$, $\psi = \bigcap \{\psi_i : i < t\}$. Нам осталось доказать включение $\overline{\psi}_i \cdot \overline{\psi}_j \subset \overline{\psi}_l$. Для этого достаточно проверить, что $\overline{V}_n(p_i) \cdot \overline{\psi}_j \subset \overline{V}_n(p_l)$. Пусть $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k}$, где $n \leq n_0 < \dots < n_k$, – произвольный элемент из $V_n(p_i)$. Тогда $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \cdot V_{n'}(p_j) \subset V_{n_0}(p_l)$ для всех $n' > n_k$. Но тогда $a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \cdot \overline{\psi}_j \subset V_{n_0}(p_l)$ и, значит, $\overline{V}_n(p_i) \cdot \overline{\psi}_j \subset \overline{V}_n(p_l)$.

Следствие. Каждая полугруппа свободных ультрафильтров счетного характера содержит элементарную ФР-полугруппу.

§2.

Рассмотрим на группе G произвольный ФР-фильтр φ . Для каждого $a \in G$ через φ_a обозначим фильтр на G , состоящий из множеств $a \cdot F$, где $F \in \varphi$. Тогда $\varphi_a = a \cdot \varphi_e$ и для любого $U \in \varphi_e$ найдется $V \in \varphi_e$ такое, что $U \in \varphi_a$ для всех $a \in V$. Действительно, первое утверждение очевидно, второе вытекает из леммы 2: выберем $V \in \varphi_e$ такое, что $\overline{V} \cdot \overline{\varphi}_e \subset \overline{U}$, тогда $a \cdot \overline{\varphi}_e = \overline{\varphi}_a \subset U$ для всех $a \in V$ или, что то же, $U \in \varphi_a$. Следовательно, на группе G существует топология, в которой умножение непрерывно по второму аргументу и φ_e – фильтр окрестностей единицы. Обозначим ее $\langle \varphi \rangle$.

Лемма 3. Каждая полугруппа свободных ультрафильтров $\overline{\varphi}$ счетного характера содержит элементарную ФР-полугруппу $\overline{\psi}$ такую, что топология $\langle \psi \rangle$ регулярна.

Доказательство. По следствию из теоремы 1 можно считать, что φ – элементарный ФР-фильтр, порожденный некоторой последовательностью $\{a_n : n < \omega\}$. Нам достаточно построить в ней подпоследовательность $\{a_{n_k} : k < \omega\}$ такую, что

- 1) для любого неединичного $g \in G$ найдется номер j такой, что $g \notin U_j = \{e\} \cup \text{ФР}\{a_{n_r} : r \geq j\}$;
- 2) для любых номера j и неединичного $g \in G$ таких, что $g \notin U_j$, найдется номер i такой, что $g \cdot U_i \cap U_j = \emptyset$.

Пусть $\{g_i : i < \omega\}$ – множество неединичных элементов подгруппы, порожденной множеством $\{a_n : n < \omega\}$. Выберем номер n_0 такой, что $g_0 \cdot \{e, a_{n_0}\} \cap \{e, a_{n_0}\} = \emptyset$. Предположим, что уже построена последовательность $\{n_i : i < k\}$ номеров такая, что $g_i \cdot U(i, k) \cap U(j(i), k) = \emptyset$, где

$$U(i, k) = \{e\} \cup \text{FP}\{a_{n_r} : i \leq r < k\},$$

$$j(i) = \begin{cases} i, & \text{если } g_i \in U(j, i) \text{ для всех } j < i, \\ \min\{j : g_i \notin U(j, i)\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но тогда можна выбрать и номер $n_k > n_{k-1}$ такой, что $g_i \cdot U(i, k+1) \cap U(j(i), k+1) = \emptyset$ для всех $i < k+1$. Действительно, если это не так, то найдутся номер $i < k+1$ и бесконечно много номеров n_k такие, что

$$\begin{aligned} g_i \cdot U(i, k) \cdot \{e, a_{n_k}\} \cap U(j(i), k) \cdot \{e, a_{n_k}\} &\neq \emptyset, \text{ если } i < k, \\ g_i \cdot \{e, a_{n_k}\} \cap U(j(k), k) \cdot \{e, a_{n_k}\} &\neq \emptyset, \text{ если } i = k, j(k) < k, \\ g_i \cdot \{e, a_{n_k}\} \cap \{e, a_{n_k}\} &\neq \emptyset, \text{ если } i = k, j(k) = k. \end{aligned}$$

Однако каждая из этих возможностей влечет противоречие.

Лемма 4. (Протасов, [4]). Пусть $I(\bar{\varphi})$ – минимальный идеал полугруппы ультрафильтров $\bar{\varphi}$. Если $p \in I(\bar{\varphi})$, то для любых $A \in p$, $U \in \varphi$ найдется конечное подмножество $K \subset U$ такое, что $K^{-1}AA^{-1} \in \varphi$.

Лемма 5. Каждая полугруппа свободных ультрафильтров $\bar{\varphi}$ счетного характера содержит элементарную ФР-полугруппу $\bar{\psi}$ такую, что $\bar{\psi} \cap I(\bar{\varphi}) = \emptyset$.

Доказательство. По следствию из теоремы 1 полугруппа $\bar{\varphi}$ содержит элементарную ФР-полугруппу $\bar{\psi}$, порожденную некоторой последовательностью $\{a_n : n < \omega\}$. По лемме 4 достаточно построить подпоследовательность $\{a_{n_l} : l < \omega\}$ последовательности $\{a_n : n < \omega\}$ такую, что $U \setminus K^{-1}AA^{-1} \neq \emptyset$ для любых $U \in \varphi$ и конечного $K \subset V$, где $A = \text{FP}\{a_{n_l} : l < \omega\}$, а V – некоторый фиксированный элемент φ , и взять в роли ψ элементарный ФР-фильтр, порожденный этой последовательностью.

Если φ состоит лишь из несчетных множеств, то положим $n_l = n$. В противном случае выберем счетное $V \in \varphi$. Пусть $\{\alpha_n : n < \omega\}$ – множество всех пар $\alpha = (U_\alpha, K_\alpha)$, где U_α – элемент некоторой фиксированной счетной базы φ , K_α – конечное подмножество из V . Выберем какой-то номер n_0 и элемент $b_0 \in U_{\alpha_0} \setminus K_{\alpha_0}^{-1} \cdot \{e, a_{n_0}, a_{n_0}^{-1}\}$. Если для каждого $i < l$ уже выбраны n_i, b_i такие, что $b_i \in U_{\alpha_i} \setminus K_{\alpha_i}^{-1} A_l A_l^{-1}$, где $A_l = \text{FP}\{a_{n_i} : i < l\}$, то выберем $n_l > n_{l-1}$ такой, что $b_i \in U_{\alpha_i} \setminus K_{\alpha_i}^{-1} A_{l+1} A_{l+1}^{-1}$ для всех $i < l$, и выберем $b_l \in U_{\alpha_l} \setminus K_{\alpha_l}^{-1} A_{l+1} A_{l+1}^{-1}$. В результате этого процесса получим $b_l \in U_{\alpha_l} \setminus K_{\alpha_l}^{-1} AA^{-1} \neq \emptyset$ для всех $l < \omega$.

Напомним определения некоторых полугрупп идемпотентов. Полугруппа S называется *полугруппой правых (левых) нулей*, если $pq = q$ ($pq = p$) для любых $p, q \in S$, т. е., если каждый элемент из S является правым (левым) нулем. Полугруппа S называется *цепью идемпотентов*, если $pq = qp = p$ или $pq = qp = q$ для любых $p, q \in S$, т. е., если S – цепь относительно стандартного частичного порядка на идемпотентах:

$$p \leq q \iff pq = qp = p \iff pS \subset qS, Sp \subset Sq.$$

Теорема 2. Пусть $\bar{\varphi}$ – произвольная полугруппа свободных ультрафильтров счетного характера на группе G . Для каждого натурального числа m полугруппа $\bar{\varphi}$ содержит m -элементные полугруппы правых нулей, левых нулей и цепь идемпотентов.

Доказательства Из теории вполне простых полугрупп (таковой является $I(\bar{\varphi})$) вытекает, что для того, чтобы найти в $\bar{\varphi}$ m -элементную полугруппу правых нулей, достаточно найти в полугруппе $\bar{\varphi}$ m дизъюнктивных левых идеалов. По лемме 3 полугруппа $\bar{\varphi}$ содержит элементарную FP -полугруппу $\bar{\psi}$ такую, что топология $\langle \psi \rangle$ регулярна; снабдим этой топологией группу G . Выберем в G бесконечную последовательность различных элементов, сходящуюся к единице, и обозначим через A множество ее элементов. Пусть p, q – произвольные различные свободные ультрафильтры на G , содержащие A , – таких ультрафильтров имеется 2^c и все они принадлежат полугруппе $\bar{\psi}$. Докажем, что $\beta G \cdot p \cap \beta G \cdot q = \emptyset$. Пусть $H = \{h_n : n < \omega\}$ – подгруппа, порожденная множеством A , $\{g_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – множество представителей левых смежных классов группы G по H . Выберем в A дизъюнктивные подмножества $P_0 \in p$, $Q_0 \in q$ и положим $R_0 = h_0 \cdot (P_0 \cup Q_0)$. Затем выберем в A дизъюнктивные $P_1 \in p$, $Q_1 \in q$ такие, что $R_1 = h_1 \cdot (P_1 \cup Q_1) \subset H \setminus R_0$. Затем выберем в A дизъюнктивные $P_2 \in p$, $Q_2 \in q$ такие, что $R_2 = h_2 \cdot (P_2 \cup Q_2) \subset H \setminus (R_0 \cup R_1)$, и т. д. По завершении процесса положим $P = \{g_\alpha h_n P_n : n < \omega, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $Q = \{g_\alpha h_n Q_n : n < \omega, \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Тогда $P \cap Q = \emptyset$, $\beta G \cdot p \subset \bar{P}$, $\beta G \cdot q \subset \bar{Q}$. Заметим, что в приведенных рассуждениях нужна даже не регулярность топологии $\langle \psi \rangle$, а лишь ее хаусдорфовость.

Докажем, что $p \cdot \bar{\psi} \cap q \cdot \bar{\psi} = \emptyset$. Так как топология $\langle \psi \rangle$ регулярна, то существуют дизъюнктивные открытые множества $U \in p$, $V \in q$. Для каждого $a \in A \cap U$ выберем $W_a \in \psi$ такое, что $a \cdot W_a \subset U$, и для каждого $b \in A \cap V$ выберем $W_b \in \psi$ такое, что $b \cdot W_b \subset V$. Положим $P = \cup \{a \cdot W_a : a \in A \cap U\}$, $Q = \cup \{b \cdot W_b : b \in A \cap V\}$. Тогда $P \cap Q = \emptyset$, $p \cdot \bar{\psi} \subset \bar{P}$, $q \cdot \bar{\psi} \subset \bar{Q}$.

Докажем, что полугруппа $\bar{\varphi}$ содержит m -элементную цепь идемпотентов. С помощью леммы 5 построим убывающую последовательность полугрупп $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 \supset \bar{\varphi}_2 \supset \dots \supset \bar{\varphi}_{m-1} \supset \bar{\varphi}_m$ счетного характера такую, что $I(\bar{\varphi}_1) \cap \bar{\varphi}_2 = \emptyset, \dots, I(\bar{\varphi}_{m-1}) \cap \bar{\varphi}_m = \emptyset$. Пусть p_m – идемпотент из $\bar{\varphi}_m$, L – минимальный левый идеал $\bar{\varphi}_{m-1}$, содержащийся в $\bar{\varphi}_{m-1} \cdot p_m$, R – минимальный правый идеал $\bar{\varphi}_{m-1}$, содержащийся в $p_m \cdot \bar{\varphi}_{m-1}$, p_{m-1} – единица группы $R \cap L$. Тогда $p_{m-1} < p_m$. Затем в $\bar{\varphi}_{m-1}$ выбираем $p_{m-2} < p_{m-1}$ и т. д.

Вопрос 1. Существует ли на $\mathbb{Z}$ конечная полугруппа ультрафильтров, отличная от полугрупп правых нулей, левых нулей и цепей идемпотентов?

§3.

Для произвольной групповой топологии τ на группе G множество всех свободных сходящихся к единице ультрафильтров на (G, τ) есть замкнутая подполугруппа в βG , которая называется *полугруппой ультрафильтров топологической группы (G, τ)* или *полугруппой ультрафильтров топологии τ* [4]. Если G – булева группа, то каждая FS -полугруппа $\bar{\varphi}$ свободных ультрафильтров на G задает на G групповую топологию, полугруппа ультрафильтров которой есть $\bar{\varphi}$.

Теорема 3 (СН). Пусть $\bar{\varphi}$ – произвольная полугруппа свободных ультрафильтров счетного характера на группе G . Для каждого натурального числа

т полугруппа $\bar{\varphi}$ содержит *т*-элементные FR-полугруппы правых нулей, левых нулей и цепь идемпотентов.

Доказательство. Докажем теорему для полугрупп правых нулей. По следствию из теоремы 1 можно считать, что группа G счетна. Пусть $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ – семейство всех подмножеств группы G . По теореме 2 в $\bar{\varphi}$ существует *т*-элементная полугруппа правых нулей $S_0 = \{p_i^0 : i < t\}$. Выберем попарно дизъюнктные $F_i^0 \in p_i^0$ такие, что $F_i^0 \subset X_0$ или $F_i^0 \subset G \setminus X_0$, и образуем фильтры Φ_i^0 замыканием системы множеств $\varphi \cup \{F_i^0\}$ относительно конечных пересечений и надмножеств. По теореме 1 существуют непустые замкнутые подпространства $\bar{\varphi}_i^0 \subset \bar{\Phi}_i^0$ счетного характера такие, что пространство $\bar{\varphi}^0 = \cup\{\bar{\varphi}_i^0 : i < t\}$ – элементарная FR-полугруппа, причем $\bar{\varphi}_i^0 \cdot \bar{\varphi}_j^0 \subset \bar{\varphi}_j^0$.

Зафиксируем ненулевое $\xi < \omega_1$ и предположим, что уже построены убывающие ξ -последовательности непустых замкнутых подпространств счетного характера $\{\bar{\varphi}_i^\alpha : \alpha < \xi\}$ ($i < t$) такие, что для каждого $\alpha < \xi$ пространство $\bar{\varphi}^\alpha = \cup\{\bar{\varphi}_i^\alpha : i < t\}$ – элементарная FR-полугруппа, причем $\bar{\varphi}_i^\alpha \cdot \bar{\varphi}_j^\alpha \subset \bar{\varphi}_j^\alpha$. Положим $\bar{\psi}_i^\xi = \cap\{\bar{\varphi}_i^\alpha : \alpha < \xi\}$, $\bar{\psi}^\xi = \cup\{\bar{\psi}_i^\xi : i < t\}$. Пусть R – минимальный правый идеал полугруппы $\bar{\psi}^\xi$. Тогда $\emptyset \neq R \cap \bar{\psi}_i^\xi$ – правый идеал полугруппы $\bar{\psi}_i^\xi$. Значит, существует идемпотент $p_i^\xi \in R \cap \bar{\psi}_i^\xi$. Но тогда $S_\xi = \{p_i^\xi : i < t\}$ – полугруппа правых нулей. Далее, для каждого $i < t$ выберем $F_i^\xi \in p_i^\xi$ такое, что $F_i^\xi \subset X_\xi$ или $F_i^\xi \subset G \setminus X_\xi$, и образуем фильтр Φ_i^ξ замыканием системы множеств $\psi_i^\xi \cup \{F_i^\xi\}$ относительно конечных пересечений и надмножеств. По теореме 1 существуют непустые замкнутые подпространства $\bar{\varphi}_i^\xi \subset \bar{\Phi}_i^\xi$ счетного характера такие, что пространство $\bar{\varphi}^\xi = \cup\{\bar{\varphi}_i^\xi\}$ – элементарная FR-полугруппа, причем $\bar{\varphi}_i^\xi \cdot \bar{\varphi}_j^\xi \subset \bar{\varphi}_j^\xi$.

По завершении описаного процесса для каждого $i < t$ положим $\bar{p}_i = \cap\{\bar{\varphi}_i^\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Тогда p_i – ультрафильтр и $S = \{p_i : i < t\}$ – FR-полугруппа правых нулей.

Для полугрупп левых нулей теорема доказывается точно так же. Почти также доказывается теорема и для цепей идемпотентов. Остановимся лишь на одном основном моменте.

Предположим, что уже построены убывающие ξ -последовательности непустых замкнутых подпространств счетного характера $\{\bar{\varphi}_i^\alpha : \alpha < \xi\}$ ($i < t$) такие, что для каждого $\alpha < \xi$ пространство $\bar{\varphi}^\alpha = \cup\{\bar{\varphi}_i^\alpha : i < t\}$ – элементарная FR-полугруппа, причем $\bar{\varphi}_i^\alpha \cdot \bar{\varphi}_j^\alpha \subset \bar{\varphi}_{\min\{i,j\}}^\alpha$. Положим $\bar{\psi}_i^\xi = \cap\{\bar{\varphi}_i^\alpha : \alpha < \xi\}$, $\bar{\mu}_i^\xi = \cup\{\bar{\psi}_j^\xi : i \leq j < t\}$. Тогда $\{\bar{\mu}_i^\xi : i < t\}$ – убывающая последовательность полугрупп и $I(\bar{\mu}_i^\xi) \cap \bar{\mu}_{i+1}^\xi = \emptyset$ ($i < t - 1$). Следовательно, существует возрастающая цепь идемпотентов $S_\xi = \{p_i^\xi : i < t\}$ такая, что $p_i^\xi \in \bar{\psi}_i^\xi$.

Следствие (СН). Пусть B – счетная булева группа. Для каждого натурального числа t на B существуют групповые топологии $\varrho_t, \lambda_t, \varkappa_t$, полугруппы ультрафильтров которых есть *т*-элементные полугруппы правых нулей, левых нулей и цепь идемпотентов соответственно.

Замечание. Теорему 3 можно доказать и в предположении МА, однако рассуждения заметно усложняются.

§4.

Лемма 6. Пусть G – хаусдорфова группа с конечной полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$. Если $|\bar{\varphi}| \leq m$, то G содержит окрестность единицы из элементов порядка $\leq 2^m$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся ультрафильтр $p \in \bar{\varphi}$ и множество $A \in p$ из элементов порядка $> 2^m$. Для каждого $i \leq m$ определим отображение $f_i : G \rightarrow G$ правилом

$$f_i(x) = x^{2^i}$$

и отметим, что

- 1) $f_{i+j} = f_j f_i$;
- 2) если $i \neq j$, то $f_i(a) \neq f_j(a)$ для каждого $a \in A$.

Положим $p_i = \bar{f}_i(p)$, где $\bar{f}_i : \beta G \rightarrow \beta G$ – непрерывное продолжение f_i . Понятно, что $p_i \in \bar{\varphi}$. Докажем, что $p_i \neq p_j$, если $i \neq j$. Пусть для определенности $i < j$. Тогда

$$p_j = \bar{f}_j(p) = \overline{f_{j-i} f_i}(p) = \bar{f}_{j-i}(\bar{f}_i(p)) = \bar{f}_{j-i}(p_i).$$

Напомним известный факт, который легко следует из леммы де Брейна-Эрдеша [9]: для любых ультрафильтра q на множестве X и отображения $h : X \rightarrow X$

$$\bar{h}(q) = q \iff \{x \in X : h(x) = x\} \in q.$$

Возьмем произвольный $b \in f_i(A) \in p_i$ и покажем, что $f_{j-i}(b) \neq b$. Действительно, если это не так, то

$$f_i(a) = b = f_{j-i}(f_i(a)) = f_j(a)$$

для некоторого $a \in A$, чего быть не может. Таким образом, $|\bar{\varphi}| \geq m + 1$, – противоречие.

Лемма 7. Пусть G – топологическая группа с конечной полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$. Если G алгебраически есть прямое произведение не более чем счетных групп, то G содержит счетную окрестность единицы.

Доказательство. Пусть $G = \prod \{G_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $|G_\alpha| \leq \omega$, $|\alpha| > \omega$, $|\bar{\varphi}| = m$. Для произвольного $l \geq 1$ через $f(l)$ обозначим максимальное $k \geq 0$ такое, что $2^k | l$. Зафиксируем $n > m$ и устроим разбиение $\mathcal{A} = \{A_j : j < n\}$ множества $G \setminus \{e\}$ по правилу

$$g \in A_j \iff f(|\text{supp}(g)|) \equiv j \pmod{n},$$

где, как обычно, $\text{supp}(g) = \{\alpha \in \mathfrak{A} : \text{pr}_\alpha(g) \neq e\}$. Так как $n > m$, то найдутся окрестность U единицы G и $j^* < n$ такие, что $U \cap A_{j^*} = \emptyset$. Выберем окрестность V единицы G такую, что

$$(V \cdot V^{-1})^{2^n} \subset U,$$

и покажем, что $|V| \leq \omega$. Предположим противное. По лемме о пересечениях найдутся несчетное множество $M \subset V$ и конечное множество $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ такие, что

$$|\text{supp}(g_1)| = |\text{supp}(g_2)|, \quad \text{supp}(g_1) \cap \text{supp}(g_2) = \mathfrak{A}_0, \quad \text{pr}_{\mathfrak{A}_0}(g_1) = \text{pr}_{\mathfrak{A}_0}(g_2)$$

для любых различных $g_1, g_2 \in M$. Возьмем в M 2^{n+1} различных элементов a_i, b_i ($i < 2^n$) и положим $c_i = a_i b_i^{-1}$. Отметим, что

$$c_i \in V \cdot V^{-1}, \quad |\text{supp}(c_i)| = |\text{supp}(c_j)| \geq 1, \quad \text{supp}(c_i) \cap \text{supp}(c_j) = \emptyset,$$

если $i \neq j$. Наконец, рассмотрим n элементов

$$d_j = \prod \{c_i : i < 2^j\} \in U \quad (j < n).$$

Так как $|\text{supp}(d_j)| = 2^j \cdot t$, где $t = |\text{supp}(c_i)|$, то все n элементов d_j попадут в различные блоки разбиения $\mathcal{A}$. В частности, какой-то из них попадет в A_{j^*} , — противоречие.

Теорема 4. Пусть G — хаусдорфова группа с конечной полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$. Если G абелева, а $|\bar{\varphi}| \leq m$, то G содержит открытую счетную подгруппу периода $\leq 2^m$.

Доказательство. По лемме 6 группа G содержит окрестность единицы U из элементов порядка $\leq 2^m$. Рассмотрим открытую подгруппу H , порожденную U . Так как G абелева, то H имеет период $\leq 2^m$ и, следовательно, удовлетворяет условию леммы 7. Пусть V — счетная окрестность H . Тогда, подгруппа, порожденная V , будет требуемой.

Вопрос 2. Верно ли, что хаусдорфова группа с конечной полугруппой ультрафильтров содержит открытую булеву подгруппу?

Вопрос 3. Верно ли, что счетная булева группа с единственным свободным сходящимся к нулю ультрафильтром имеет базу окрестностей нуля из подгрупп?

§5.

Лемма 8. Пусть G — хаусдорфова группа с полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$. Если ультрафильтр $p \in \bar{\varphi}$ содержит счетное дискретное подмножество из G , то p имеет бесконечный порядок в $\bar{\varphi}$.

Доказательство. Предположим противное: $p^n = p^m$ для некоторых различных $m, n \geq 1$. Тогда $pq = pr$ для некоторых различных $q, r \in \bar{\varphi} \cup \{e\}$. Ультрафильтр p содержит некоторое счетное дискретное подмножество $A \subset G$. Выберем для каждого $a \in A$ окрестность U_a точки a так, что $U_a \cap U_b = \emptyset$, если $a \neq b$. Затем для каждого $a \in A$ выберем $Q_a \in q$, $R_a \in r$ так, что $a \cdot Q_a \subset U_a$, $a \cdot R_a \subset U_a$, $Q_a \cap R_a = \emptyset$. Тогда $Q = \cup \{a \cdot Q_a : a \in A\} \in pq$, $R = \cup \{a \cdot R_a : a \in A\} \in pr$, $Q \cap R = \emptyset$. Следовательно, $pq \neq pr$, — противоречие.

Следствие. Пусть G — хаусдорфова группа с конечной полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$. Тогда $p \in p \cdot \bar{\varphi}$ для каждого ультрафильтра $p \in \bar{\varphi}$, содержащего счетное подмножество из G . Если G абелева, то $p \in p \cdot \bar{\varphi}$ для каждого $p \in \bar{\varphi}$

Доказательство. Предположим, что для некоторого $p \in \bar{\varphi}$, содержащего счетное подмножество $B \subset G$, $p \notin p \cdot \bar{\varphi}$. Тогда найдется $A \in p$ такое, что $\bar{A} \cap \bar{A} \cdot \bar{\varphi} = \emptyset$ (ввиду конечности $\bar{\varphi}$). Но тогда для каждого $a \in A$ найдется $V_a \in \varphi$ такое, что $A \cap a \cdot V_a = \emptyset$. Так как $V_a \cup \{e\}$ — окрестность единицы G , то это означает,

что A дискретно. Таким образом, ультрафильтр p содержит дискретное подмножество $A \subset G$, а значит, p содержит и счетное дискретное подмножество $A \cap B \subset G$. Но тогда по лемме 8 ультрафильтр p имеет бесконечный порядок, откуда $\bar{\varphi}$ бесконечна, – противоречие. Отсюда и из теоремы 4 вытекает и второе утверждение.

Теорема 5. Пусть G – хаусдорфова группа с конечной полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$. Тогда каждое счетное дискретное подмножество из G замкнуто. Если G абелева, то каждое дискретное подмножество из G замкнуто.

Доказательство. Если существует счетное дискретное незамкнутое подмножество из G , то существует ультрафильтр $p \in \bar{\varphi}$, содержащий счетное дискретное подмножество, откуда по лемме 8 полугруппа $\bar{\varphi}$ бесконечна. Вторая часть теоремы вытекает из первой и теоремы 4.

Лемма 9. Пусть G – хаусдорфова группа с полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$, ψ – фильтр на G , содержащий φ . Если фильтр ψ имеет базу из открытых подмножеств, то $\bar{\psi}$ – правый замкнутый идеал $\bar{\varphi}$. В случае, когда $\bar{\varphi}$ конечна, справедливо и обратное: если $\bar{\psi}$ – правый идеал $\bar{\varphi}$, то фильтр ψ имеет базу из открытых подмножеств.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что для каждого открытого множества U из G , имеющего единицу точкой прикосновения, множество $\bar{U} \cap \bar{\varphi} = \{p \in \bar{\varphi} : U \in p\}$ – правый замкнутый идеал $\bar{\varphi}$ [4]. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что так как $\bar{\psi} \cdot \bar{\varphi} \subset \bar{\psi}$ и полугруппа $\bar{\varphi}$ конечна, то множества вида $\cup\{\{a\} \cup a \cdot B_a : a \in A\}$, где $A \in \psi$, $B_a \in \varphi$, образуют базу фильтра ψ .

Топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если в нем замыкание каждого открытого подмножества открыто. Топологическое пространство называется *неразложимым*, если его нельзя разбить на два плотные подмножества.

Теорема 6. Пусть G – хаусдорфова группа с конечной полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi}$.

- 1) G экстремально несвязна тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}$ имеет единственный минимальный правый идеал.
- 2) G неразложима тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}$ имеет левый нуль.

Доказательство. Экстремальная несвязность группы G эквивалентна отсутствию в G двух дизъюнктивных открытых подмножеств, касающихся единицы. По лемме 9 это эквивалентно отсутствию в полугруппе $\bar{\varphi}$ двух дизъюнктивных правых идеалов или, что то же, единственности минимального правого идеала. Неразложимость группы G эквивалентна существованию свободного ультрафильтра на G , сходящегося к единице и имеющего базу из открытых подмножеств [10]. По лемме 9 это эквивалентно существованию в полугруппе $\bar{\varphi}$ одноэлементного правого идеала или, что то же, существованию левого нуля.

Проанализируем построенные в §3 топологические группы (B, κ_m) , (B, ϱ_m) , (B, λ_m) с помощью теорем 5, 6. Во всех этих группах каждое дискретное подмножество замкнуто. Группы (B, κ_m) экстремально несвязны и неразложимы. Группы (B, ϱ_m) при $m \geq 2$ экстремально несвязны и разложимы. Группы

(B, λ_m) при $m \geq 2$ неразложимы и не экстремально несвязны. Последняя серия примеров отрицательно решает вопрос Комфорта и ван Милла [5]: верно ли, что неразложимая абелева группа экстремально несвязна?

§6. P -

Точка в топологическом пространстве называется P -точкой, если пересечение произвольного счетного семейства ее окрестностей есть окрестность. Нас будут интересовать P -точки в пространстве $\beta\omega \setminus \omega$. Известно, что свободный ультрафильтр p на ω есть P -точка в $\beta\omega \setminus \omega$ тогда и только тогда, когда для любого отображения $f : \omega \rightarrow \omega$ найдется $A \in p$ такое, что либо образ $f|A$ конечный, либо все прообразы точек отображения $f|A$ конечны (через $f|A$ обозначается, как обычно, сужение отображения f на множество A).

Лемма 10. Пусть $\{p_i : i < t\}$ – конечное множество свободных ультрафильтров на ω . Среди ультрафильтров p_i есть P -точка тогда и только тогда, когда для любого отображения $f : \omega \rightarrow \omega$ найдутся $i < t$ и $A \in p_i$ такие, что либо образ $f|A$ конечный, либо все прообразы точек $f|A$ конечны.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим противное. Тогда для каждого $i < t$ существует отображение $f_i : \omega \rightarrow \omega$ такое, что для любого $A \in p_i$ отображение $f_i|A$ имеет бесконечный образ и не все конечные прообразы точек. Для каждого $i < t$ выберем $F_i \in p_i$ так, что $F_i \cap F_j = \emptyset$, если $i \neq j$, и построим отображение $f : \omega \rightarrow \omega$ такое, что $f|F_i = f_i|F_i$. Тогда для любых $i < t$ и $A \in p_i$ отображение $f|A$ имеет бесконечный образ и не все прообразы точек конечны, – противоречие.

P -точку в $\beta\omega \setminus \omega$ несложно построить с помощью, например, СН. Однако, как показал Шелах [11], существуют модели ZFC, в которых $\beta\omega \setminus \omega$ не содержит P -точек.

Теорема 7. Если существует неметризуемая абелева группа с конечной полугруппой ультрафильтров, то в $\beta\omega \setminus \omega$ существует P -точка.

Доказательство. Пусть G – неметризуемая абелева группа с конечной полугруппой ультрафильтров $\bar{\varphi} = \{p_i : i < t\}$. По теореме 4 можно считать, что $G = \sum\{G_n : n < \omega\}$, где G_n – конечные абелевы группы. Обозначим через $\max$, $\min$ отображения из $G \setminus \{0\}$ в ω , сопоставляющие каждому $g \in G \setminus \{0\}$ соответственно наибольший и наименьший элементы множества $\text{supp}(g)$, а через $\overline{\max}$, $\overline{\min}$ их непрерывные продолжения $\beta G \setminus \{0\} \rightarrow \beta\omega$. Рассмотрим на ω ультрафильтры $\overline{\max}(p_i)$, $\overline{\min}(p_i)$ ($i < t$).

Покажем вначале, что среди ультрафильтров $\overline{\min}(p_i)$ есть по крайней мере один свободный. Предположим противное. Тогда найдется достаточно большое n и окрестности нуля U такие, что $\min(g) < n$ для любого $g \in U \setminus \{0\}$. Выберем окрестность нуля V такую, что $V - V \subset U$. Так как множество V бесконечно, а группа $\sum\{G_j : j < n\}$ конечна, то найдутся различные $g_1, g_2 \in V$ такие, что $\text{rg}_j(g_1) = \text{rg}_j(g_2)$ для каждого $j < n$. Но тогда $0 \neq g_1 - g_2 \in U$, а $\min(g_1 - g_2) \geq n$, – противоречие.

Итак, среди ультрафильтров $\overline{\min}(p_i)$ есть по крайней мере один свободный ультрафильтр $\overline{\min}(p_{i^*})$. Рассматривая в случае необходимости группу G , снабженную максимальной групповой топологией, в которой ультрафильтр p_{i^*} сходится к нулю, можно считать, что все ультрафильтры $\overline{\min}(p_i)$ свободные.

Докажем теперь, что среди ультрафильтров $\overline{\max}(p_i)$ есть P -точка. Возьмем произвольное отображение $f : \omega \rightarrow \omega$ и для каждого $i < t$ выберем $A_i \in p_i$ такое, что либо $f \circ \max(g) \leq \min(g)$ для любого $g \in A_i$, либо $f \circ \max(g) > \min(g)$ для любого $g \in A_i$.

Предположим, что для некоторого $i < t$ имеет место первый случай. По следствию из леммы 8 найдется $p \in \overline{p}$ такой, что $p_i + p = p_i$. Выберем элемент $b \in G \setminus \{0\}$ такой, что $b + p \in \overline{A}_i$, а затем, используя то, что ультрафильтр $\overline{\min}(p)$ свободный, выберем множество $A \in p$ такое, что $\min(a) > \max(b)$ для любого $a \in A$ и $b + A \subset A_i$. Тогда $f \circ \max(a) = f \circ \max(b + a) \leq \min(b + a) = \min(b)$ для любого $a \in A$. Это означает, что образ $f \circ \max|_A$ — конечный. Но тогда для $\max(A) \in \overline{\max}(p)$ конечным будет и образ отображения $f|_{\max(A)}$.

Предположим теперь, что для каждого $i < t$ имеет место второй случай. Положим $U = \cup\{A_i : i < t\} \cup \{0\}$ и выберем окрестность нуля V такую, что $V - V \subset U$. Покажем, что все прообразы точек $f \circ \max|_V$ конечны. Тогда для $\max(V) \in \overline{\max}(p_i)$ (для любого $i < t$) конечными будут также прообразы точек отображения $f|_{\max(V)}$.

Допустим противное. Тогда найдутся число n и бесконечное подмножество $C \subset V \setminus \{0\}$ такие, что $f \circ \max(c) = n$ для любого $c \in C$. Выберем бесконечное подмножество $C_0 \subset C$ такое, что $\text{pr}_j(c_1) = \text{pr}_j(c_2)$ для любых $c_1, c_2 \in C_0$, $j < n$, а затем выберем $c, d \in C_0$ такие, что $\max(c) > \max(d)$. Тогда $f \circ \max(c) = f \circ \max(c - d) > \min(c - d) \geq n$, — противоречие.

Следовательно, по лемме 10 среди ультрафильтров $\overline{\max}(p_i)$ есть P -точка.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Малыхин. *Экстремально несвязные и близкие к ним группы* // ДАН СССР. 1975. Т.220. №1. С.27–30.
2. В.И. Малыхин. *О максимальных и разложимых пространствах* // ДАН СССР. 1975. Т.223. №5. С.1060–1063.
3. И.В. Протасов. *Фильтры и топологии на полугруппах* // Матем. студії. Праці Львівського матем. товариства. 1994. Вип.3. С.15–28.
4. И.В. Протасов. *Ультрафильтры и топологии на группах* // Сиб. мат. ж. 1993. Т.34. №5. С.163–180.
5. W.W. Comfort, J. van Mill. *Groups with only resolvable group topologies* // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V.120. №3. P.687–696.
6. Е.Г. Зеленюк. *Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров* // Докл. НАН Украины. Сер.А. 1995. №5. С.37–38.
7. N. Hindman. *Ultrafilters and combinatorial number theory* // Lecture Notes in Math. 1979. V.751. P.49–184.
8. W. Ruppert. *Compact semitopological semigroups: an infradic theory* // Lecture Notes in Math. 1984. V.1079. P.1–260.
9. W.W. Comfort. *Ultrafilters: some old some new results* // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V.83. P.417–454.
10. Е.Г. Елькин. *Ультрафильтры и неразложимые пространства* // Вестник МГУ. 1969. №5. С.51–52.
11. S. Shelah. *Proper forcing* // Lecture Notes in Math. 1982. V.940.