Математичні студії
випуск 6

УДК 511.364

НАБЛИЖЕННЯ ЧИСЕЛ, ЗВ'ЯЗАНИХ З $\operatorname{CN} Z$

Я.М. Холявка

Y. Kholyavka, *On the approximation of numbers connected with* $\operatorname{cn} z$ // Matematychni Studii **6** (1996) P.17–22.

Let $\operatorname{cn} z$, ω, ω' and $\varkappa$ be the notations of the Jacobi elliptic function theory; let β be any complex number different from the poles of $\operatorname{cn} z$. We estimate from below the simultaneous approximation of $\varkappa$, ω, ω', β and $\operatorname{cn} \beta$.

Нехай $\operatorname{cn} z$ – еліптична функція Якобі, $\varkappa$ – модуль ($\varkappa \neq 0, 1$), 4ω та $2(\omega' + \omega)$ – довільна фіксована пара основних періодів $\operatorname{cn} z$ (позначення [1], с.216); $\xi_1, \dots, \xi_5$ – наближаючі алгебраїчні числа. Позначимо через n_i та L_i їх степені та довжини, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_5)$. В роботі доводиться наступна

Теорема. *Нехай $\beta \in \mathbb{C}$, β відмінне від полюсів $\operatorname{cn} z$. Тоді*

$$\max\bigl\{|\omega - \xi_1|, |\omega' - \xi_2|, |\varkappa - \xi_3|, |\beta - \xi_4|, |\operatorname{cn} \beta - \xi_5|\bigr\} > \exp(-\Lambda\, T^4), \qquad (1)$$

де

$$T = n\left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \dots + \frac{\ln L_5}{n_5} + \ln n\right], \qquad (2)$$

Λ – деяка ефективна стала, залежна лише від β та $\varkappa$.

Сформулюємо наступні твердження, які використаємо при доведенні теореми. Доведення лем подібне до доведення відповідних тверджень для еліптичних функцій Вейєрштрасса та $\operatorname{sn} z$, тому деколи будемо посилатись на випадок $\wp(z)$ або $\operatorname{sn} z$.

Лема 1 ([2]). *Нехай $s, l \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$(\operatorname{cn}^l z)^{(s)} = \mathcal{D}_{s,l}(\varkappa, \operatorname{cn} z, \operatorname{cn}' z),$$

де многочлен $\mathcal{D}_{s,l}$ задовольняє наступні умови:
$\mathcal{D}_{s,l} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$,
$\deg_{x_1} \mathcal{D}_{s,l} \le s$, $\deg_{x_2} \mathcal{D}_{s,l} \le s + l$, $\deg_{x_3} \mathcal{D}_{s,l} \le 1$,
$L(\mathcal{D}_{s,l}) \le 6^{s+l}(s+l)!$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11J89.

Робота виконана при підтримці фонду "Відродження", гранд №APU 051106.

Лема 2 ([3], с.115). *Нехай*

$$\alpha, \beta \in \mathbb{A}, \quad \gamma^2 = (1-\alpha^2)(1-\alpha^2-\alpha^2\beta^2).$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\deg\gamma \geq \deg \mathbb{Q}(\alpha,\beta) \min{}^{-1}(2d(\alpha), 4d(\beta)),\\ &L(\gamma) < \exp\left(6\deg\mathbb{Q}(\alpha,\beta)\big(d^{-1}(\alpha)\ln L(\alpha) + d^{-1}(\beta)\ln L(\beta)+1\big)\right), \end{aligned}$$

де $d(a)$ та $L(a)$ – степінь та довжина алгебраїчного числа a.

Лема 3 ([4], с.56). *Нехай B і P – натуральні числа,*
$Q_{p,b} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$,
$0 \leq b < B$, $0 \leq p < P$,
$L(Q_{p,b}) \leq T$,
$\deg_{x_i} Q_{p,b} \leq \mathcal{N}_i$;
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A}$, $m = \deg\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.
Якщо $P > mB$, то система лінійних рівнянь

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p Q_{p,b}(a_1,\ldots,a_n) = 0, \quad 0 \leq b < B,$$

має цілі раціональні розв'язки $c_0, \ldots, c_{p-1}$ такі, що

$$0 < \max|c_i| < 1 + (TP\prod_{i=1}^{n}(1+\mathcal{N}_i)\left(L(\alpha_i)\Big(1+d(\alpha_i)\Big)^{\frac{\mathcal{N}_i}{d(\alpha_i)}}\right)^{\frac{mB}{P-mB}}.$$

Лема 4 ([5], с.46). *Нехай*
$P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$,
$\deg_{x_i} P \leq \mathcal{N}_i$;
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A}$, $m = \deg\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.
Якщо $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \not\equiv 0$, то

$$|P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)| \geq L(P)^{1-m}\prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-N_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Лема 5 ([6], с.78). *Функції $\sigma(z)$ та $\sigma(z)\operatorname{cn} z$ цілі і для $M > 1$ виконуються оцінки*

$$|\sigma(z)\operatorname{cn} z|_{|z|\leq M}, |\sigma(z)| \leq C_1^{M^2}.$$

Якщо ε – віддаль від найближчого полюса $\operatorname{cn} z$ до z_0 і $|z_0| \leq M$, то

$$|\sigma z_0| \geq \varepsilon C_2^{-M^2},$$

де C_1, C_2 – постійні, залежні тільки від основних періодів $\operatorname{cn} z$.

Лема 6 ([4], с.58). *Нехай* $R_1,\ R_2 \in \mathbb{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ *регулярна в крузі* $|z| \le R_2$, E *– множина з* $\mathcal{D}^2$ *точок, які належать кругу* $|z| \le R_1$, *віддаль між якими для кожної пари точок не менше* ε, $0 < \varepsilon < 1$. *Тоді*

$$|f(z)|_{|z|\le R_1} \le 2|f(z)|_{|z|\le R_2}\left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{\mathcal{D}^2 S} + 2\mathcal{D}R_1^{-1}\left(\frac{33R_1}{\varepsilon\mathcal{D}}\right)^{\mathcal{D}^2 S}\max_{x\in E,0\le s\le S}\left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|.$$

Лема 7 ([7]). *Нехай* $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$ *– многочлен степеня не більше* $\mathcal{N}_1$ *по* x_1 *і* $\mathcal{N}_2$ *по* x_2, $\mathcal{N}_2 \ge 1$, $a_i \in \mathbb{C}$, K_i *– кількість нулів* $P(z, \mathrm{cn}(z+a_i))$ *з врахуванням їх кратності,* $i = 0, \dots, M$. *Тоді*

$$K_0 + \dots + K_M < C(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1 + M)),$$

де C *– деяка постійна, яка не залежить від многочлена та чисел* $a_i, i = 0, \dots, M$.

Доведення теореми. Припустимо, що (1) не виконується, тобто для досить великого $\lambda \in \mathbb{N}$ маємо

$$\max\bigl\{|\omega - \xi_1|, |\omega' - \xi_2|, |\varkappa - \xi_3|, |\beta - \xi_4|, |\,\mathrm{cn}\,\beta - \xi_5|\bigr\} < \exp(-\lambda^6 T^4). \qquad (3)$$

Надалі будемо дотримуватись наступних позначень:
$|f(z)|_{z\in\mathcal{D}} = \sup_{z\in\mathcal{D}}|f(z)|$;
$(m, m_1, s) \in \Omega(A, S)$ означає, що $s, m, m_1 \in \mathbb{Z}$, $0 \le s \le S$, $|m|, |m_1| \le A$;
$\zeta_1, \dots, \zeta_n$ – твірні елементи поля $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_5)$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\xi_3 \ne 0, 1$.

Розглянемо функцію $\mathrm{sn}\, z$, модуль якої рівний ξ_3 [1, с.235]. Надалі будемо позначати відповідну їй функцію $\mathrm{cn}\, z$ через $\widetilde{\mathrm{cn}} z$. Нехай $4\widetilde{\omega}$ та $2\widetilde{\omega}' + 2\widetilde{\omega}$ – деяка пара основних періодів $\widetilde{\mathrm{cn}} z$. Використавши [1, с.235], отримаємо оцінку зверху для $|g_i - \widetilde{g}_i|$ (g_i, $\widetilde{g}_i$ – інваріанти $\wp(z)$ і визначаються по $\varkappa$ і ξ_3 відповідно), порядок якої рівний порядкові оцінки (3) :

$$|g_2 - \widetilde{g}_2| + |g_3 - \widetilde{g}_3| < \exp(-2^{-1}\lambda^6 T^4).$$

Із запису ω та $\widetilde{\omega}$ за допомогою еліптичних інтегралів першого роду через g_2, g_3 та $\widetilde{g}_2$, $\widetilde{g}_3$ відповідно [1, с.251] випливає, що їх можна вибрати таким чином, щоб виконувалась оцінка

$$|\omega - \widetilde{\omega}| + |\omega' - \widetilde{\omega}'| < \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\lambda^6 T^4\Bigr). \qquad (4)$$

Приймемо

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{L} C_{k,l} z^k \widetilde{\mathrm{cn}}^l z, \qquad C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l,\tau}\zeta_\tau,\ C_{k,l,\tau} \in \mathbb{Z}; \qquad (5)$$

$$F_{m,t}(z) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{L} C_{k,l} z^k \widetilde{\mathrm{cn}}^l (z - \alpha_{m,t}), \qquad (6)$$

де

$$\alpha_{m,t} = 4m\widetilde{\omega} + 2t(\widetilde{\omega} + \widetilde{\omega}') + \xi_4 - \Theta,$$

Θ – таке число з найменшим модулем, що $\widetilde{\text{cn}}\Theta = \xi_5$;

$$K = \lambda^4 T^2,\ S = \lambda^2 \ln \lambda T^2,\ \mathcal{N} = \lambda T,\ L = \lambda \ln \lambda T^2,\ \overline{\mathcal{N}} = \lambda^2 T. \tag{7}$$

Позначимо через ξ_6 найближче до $\widetilde{\text{cn}}'\Theta$ число, яке задовольняє рівність

$$\xi_6^2 = (1 - \xi_5^2)(1 - \xi_4^2 - \xi_4^2\xi_5^2). \tag{8}$$

Розглянемо

$$F^{(s)}_{m,t}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1 + \xi_2) + \xi_4), \quad (m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}, S),$$

як $\mathcal{N}^2 S$ лінійних форм від nKL змінних $C_{k,l,\tau}$. Використавши леми 1, 2, 3 та (1), (6), (7), виберемо не всі рівні нулю $C_{k,l,\tau}$ такими, що

$$\begin{gathered} F^{(s)}_{m,t}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1 + \xi_2) + \xi_4) = 0, \\ |C_{k,l,\tau}| < \exp(-\lambda^3 \ln \lambda T^4 n^{-1}). \end{gathered} \tag{9}$$

Використавши (3)–(8), представлення $\widetilde{\wp}'(z)$ [1, с.163] та формулу (3) в [1, с.215], отримаємо оцінку

$$|\widetilde{\text{cn}}\beta - \xi_5| + |\widetilde{\text{cn}}'\beta - \xi_6| < \exp(-4^{-1}\lambda^6 \ln \lambda T^4). \tag{10}$$

З (3)–(10) і леми 1 отримаємо для $(m,t,s) \in \Omega(2\overline{\mathcal{N}}, S)$

$$\begin{aligned} \big|F^{(s)}(4m\widetilde{\omega} + 2t(\widetilde{\omega} + \widetilde{\omega}') + \beta) - F^{(s)}_{m,t}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1 + \xi_2) + \xi_4)\big| < \\ < \exp\Big(-\frac{1}{5}\lambda^6 \ln \lambda T^4\Big). \end{aligned} \tag{11}$$

З (9), (11) при $(m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}, S)$ отримаємо

$$\big|F^{(s)}(4m\widetilde{\omega} + 2t(\widetilde{\omega} + \widetilde{\omega}') + \beta)\big| < \exp\Big(-\frac{1}{5}\lambda^6 \ln \lambda T^4\Big). \tag{12}$$

Покажемо, що (12) виконується для $(m,t,s) \in \Omega(\overline{\mathcal{N}}, S)$.

Основна Лема. *Якщо оцінка (12) виконується для $(m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}_p, S)$, то вона виконується і для $(m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S)$, де $\mathcal{N}_p = 2^p\mathcal{N}$, $2^{p+1} < \lambda$.*

Доведення. Нехай

$$G(z) = F(z)\widetilde{\sigma}^L(z - \widetilde{\omega}'),$$

де $\widetilde{\sigma}(z)$ визначається числами $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}'$ [1, с.179]. Виберемо найменше можливе ціле r так, щоби в крузі радіуса r містився паралелограм з вершинами

$$\pm 8(\mathcal{N}_{p+1} + 1)\widetilde{\omega} \pm 4(\mathcal{N}_{p+1} + 1)\widetilde{\omega}'$$

та виконувалась умова $r > |\Theta| + |\beta|$. Нехай $R = 12r$. Тоді з (5), (7), (19) та леми 5 випливає

$$|G(z)|_{|z|<R} < \exp\big(\lambda^3(2^{2p} + \lambda) \ln \lambda T^4\big). \tag{13}$$

Використавши (7), (13) та припущення основної леми, з леми 6 отримаємо

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\le r} < \exp(-\lambda^4 2^{2p+2} \ln \lambda T^4). \tag{14}$$

В досить малому ε-околі точок $2m\widetilde{\omega}+2t\widetilde{\omega}'+\beta$ функція $\widetilde{\sigma}(z-\widetilde{\omega}')$ не має нулів, тому з леми 5 для $|m_1|, |m_1| \le 4\mathcal{N}_{p+1}$ випливає

$$|\widetilde{\sigma}(z+\widetilde{\omega}')|_{z\in V(\varepsilon, 2m\widetilde{\omega}+2m_1\widetilde{\omega}'+\beta)} > \exp(-\lambda^2 2^{2p+2} \ln(\lambda T) T^2). \tag{15}$$

З (13)–(15) для $(m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S)$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4m\widetilde{\omega} + 2t(\widetilde{\omega}+\widetilde{\omega}') + \beta)| < \exp(-2^{2p+1,5}\lambda^4 \ln \lambda T^4). \tag{16}$$

Враховуючи (11), з (16) для $(m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S)$ випливає

$$|F^{(s)}_{m,t}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1+\xi_2) + \xi_4)| < \exp(-\lambda^4 2^{2p+1,3} \ln \lambda T^4). \tag{17}$$

Розглядаючи

$$F^{(s)}_{m,t}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1+\xi_2) + \xi_4), \quad (m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S),$$

як значення відповідних многочленів в алгебраїчних точках, з леми 4, враховуючи (2), (6), (7), для

$$F^{(s)}_{m,t}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1+\xi_2) + \xi_4) \ne 0, \quad (m,t,s) \in \Omega(2\mathcal{N}_1, S),$$

отримаємо оцінку

$$\left|F^{(s)}_{m}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1+\xi_2) + \xi_4)\right| > \exp(-2\lambda^4 T^2 (T^2 + \ln \lambda)). \tag{18}$$

Оцінки (17) та (18) суперечливі, тому

$$F^{(s)}_{m,t}(4m\xi_1 + 2t(\xi_1+\xi_2) + \xi_4) = 0, \quad (m,t,s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S). \tag{19}$$

З (11) та (19) отримаємо твердження основної леми.

З (19) при $\frac{1}{2}\lambda \le 2^{p+1} < \lambda$ отримаємо, що многочлени

$$P(z, \widetilde{\mathrm{cn}}(z-\lambda_{m,n})) = F_{m,n}(z)$$

мають не менше $5^{-1}\lambda^6 \ln \lambda T^4$ нулів (з врахуванням кратності). З леми 7 отримаємо, що нулів може бути не більше $C\lambda^5 \ln \lambda T^4$, тому припущення (3) приводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. 648с.
2. Холявка Я.М. *Деякі властивості еліптичних функцій Якобі,* (II) // Деп. в ДНТБ України 28.10.1993, №2144–УК93, 10с.

3. Холявка Я.М. *О совместных приближениях инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами* // Диофантовы приближения, ч.2, Изд. МГУ, 1986, С.114–121.
4. Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exponentielle* // Bull. Soc. Math. France. 1980. №1. P.47–79.
5. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. – М.: Изд-во МГУ, 1982. 311с.
6. Masser D. *Elliptic functions and transcendence* // Lect. Notes Math. 1975. V.437. P.1–143.
7. Brownawell W.D., Masser D.W. *Multiplicity estimates for analitic functions,* (I) // J. Reine Angew. Math. 1980. V.314. P.200–216.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University,
Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшло 6.06.95.