

РЕШЕТКА ЛЕВЫХ ИДЕАЛОВ УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ V -ОБЛАСТЕЙ БЕЗУ И ЕЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Н.Я. КОМАРНИЦКИЙ

N.Ya. Komarnytskyi. *Lattice of left ideals of the ultraproduct of V -domains of Bezout and its elementary properties* // Matematychni Studii, **6** (1996) P.1–16.

In the terms of the Δ -filters of principal closed sets, we describe the lattice of left ideals of a ring which is the ultraproduct of family of Bezout V -domain.

Напомним, что V -кольцом называется ассоциативное кольцо с единицей, над которым все простые левые и все простые правые модули являются инъективными [6].

В монографии [14] сформулирована проблема: будет ли ультрапроизведение счетного семейства экземпляров V -области Койфмана-Коззенса относительно счетно-неполного ультрафильтра над множеством натуральных чисел V -областью? Как известно, Михлер и Вильямайор [20] доказали, что условие быть левым V -кольцом эквивалентно тому, что каждый левый идеал кольца является пересечением максимальных левых идеалов, а это эквивалентно тому, что радикал Джекобсона каждого левого модуля является нулевым. Поэтому решение проблемы тормозилось отсутствием информации об идеалах в ультрапроизведении колец. Некоторые незначительные факты о простейших из таких идеалов можно найти в [18], [26]. Информацию об идеалах в ультрапроизведениях почти колец с условием обрыва убывающих цепей идеалов можно извлечь из работы [15]. Наиболее полное описание идеалов в ультрапроизведениях колец алгебраических чисел получил Г. Черлин [10]. Автору неизвестна ни одна работа, где бы описывались левые или правые идеалы в ультрапроизведениях (ультрастепенях) некоммутативных колец. Обратив внимание на некоторую аналогию ультрапроизведений колец с кольцами функций, за модель подхода к описанию решетки идеалов ультрапроизведений колец автор взял теорию идеалов колец мероморфных функций, построенную Алингом [7]. Построенное в работе описание левых идеалов и максимальных левых идеалов дало возможность доказать, что каждый левый идеал в “счетной” ультрастепени кольца Койфмана-Коззенса относительно неглавного ультрафильтра над множеством натуральных чисел является пересечением некоторого семейства максимальных левых идеалов. Отметим, что техника построения идеалов в

ультрапроизведениях области Коззенса-Койфмана без особых идейных трудностей переносится на случай произвольных ультрапроизведений колец. Но автор остановился на изложении результата в частном случае, поскольку это упрощает изложение. Отметим, что ультрапроизведения в различных классах колец рассматривались еще в работах [5], [8], [17], [18], [23], [24].

Аксиоматизируемость ряда классов колец установил П. Кон [12]. Среди них класс колец, в которых каждый необратимый элемент имеет левый атомный делитель. Это условие используется при изучении идеалов в ультрапроизведениях областей главных идеалов. В ряде работ ультрапроизведения нужны при построении контрпримеров к известным гипотезам (см., например, [11]).

Мы отметили только те результаты, которые стоят ближе всего к результатам автора. В настоящей работе исследуется строение левых идеалов в ультрапроизведениях V -областей Безу относительно счетно-неполного ультрафильтра. Особо выделяется случай областей главных идеалов. Итак, данную работу можно рассматривать как подготовительную по отношению к работе [4], где положительно решается проблема Коззенса-Фейса, отмеченная выше. Основной результат настоящей работы (Теорема 14) анонсирован еще в 1991 году [3]. Он утверждает, что решетка левых идеалов ультрапроизведения семейства V -областей Безу относительно счетно-неполного ультрафильтра над множеством индексов изоморфна решетке дельта-фильтров главных замкнутых подмножеств в левом максимальном спектре кольца-ультрапроизведения.

§1 ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯХ КОЛЕЦ И МОДУЛЕЙ.

Пусть Ω – произвольное бесконечное множество, которое в дальнейшем будет использоваться как множество индексов. Допустим, что $\mathfrak{D}$ – неглавный ультрафильтр над множеством Ω и $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ – некоторое семейство ассоциативных колец с единицей. Пусть $A_1 = \prod_{i \in \Omega} A_i$. Для каждого элемента $r = (r_i)_{i \in \Omega} \in A_1$ положим $\Theta(r) = \{i \in \Omega \mid r_i = 0\}$. Тогда множество $S = \{r \in A_1 \mid \Theta(r) \in \mathfrak{D}\}$ является двусторонним идеалом в A_1 . Фактор-кольцо A_1/S называется ультрапроизведением семейства колец $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ относительно ультрафильтра $\mathfrak{D}$ и обозначается через $(\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$. Если $\mathfrak{D}$ – не ультрафильтр, а только фильтр над Ω , то это фактор-кольцо называется фильтрованным (или редуцированным) произведением семейства колец $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ относительно фильтра $\mathfrak{D}$.

Общие свойства ультрапроизведений и фильтрованных произведений можно найти в таких работах [5], [8], [17], [18], [19].

В случае, если $A_i = A$ – одно и то же кольцо для каждого $i \in \Omega$, то говорят об ультрастепени кольца A относительно ультрафильтра $\mathfrak{D}$ (или же об фильтрованной степени, если $\mathfrak{D}$ – только фильтр). Конструкция ультрапроизведения впервые рассматривалась Лосем [19] при описании разных элементарно-эквивалентных моделей. Их роль в том, что многие теоретико-модельные свойства моделей элементарных теорий описываются на языке ультрапроизведений. В частности, если любое предложение языка первого порядка истинно на каждой компоненте, то оно истинно и в произвольном ультрапроизведении этих компонент. На этом эффекте легко строятся разные нестандартные модели классических теорий, в частности, арифметики Пеано, теории вещественнозамкнутых полей и т.д. С другой стороны, ультрапроизведения дают возможность строить примеры колец и модулей, которые трудно получить

каким-либо другим методом (см., например, [23], [27]).

Пусть $A = \prod_{i \in \Omega} A_i / \mathfrak{D}$. Если $\{M_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых модулей, причем для $i \in \Omega$ M_i является модулем над A_i , тогда можно рассмотреть ультрапроизведение $M = \prod_{i \in \Omega} M_i / \mathfrak{D}$ семейства $\{M_i\}_{i \in \Omega}$ относительно того же ультрафильтра $\mathfrak{D}$, по которому строилось ультрапроизведение семейства колец $\{A_i\}_{i \in \Omega}$. Тогда, понятно, M является левым A -модулем относительно естественных операций сложения и покомпонентного умножения на “скаляры” слева. Если в качестве M_i , $i \in \Omega$, взять левый (правый, двусторонний) идеал кольца R_i , то приходим к понятию ультрапроизведения левых (правых, двусторонних) идеалов. Точнее, если $\{I_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых (правых, двусторонних) идеалов, причем I_i является левым (правым, двусторонним) идеалом кольца R_i , то $I = \prod_{i \in \Omega} I_i / \mathfrak{D}$ также является левым (правым, двусторонним) идеалом кольца R . В поэлементной записи имеем

$$I = \{\bar{a} = \overline{(a_i)_{i \in \Omega}} \mid \forall i \in \Omega, a_i \in I_i\} = \{\bar{a} \in A \mid \exists U \in \mathfrak{D}, \forall i \in U, a_i \in I_i\}.$$

Поэтому

$$I = \left(\prod_{i \in \Omega} I_i \right) / \mathfrak{D} \neq 0$$

тогда и только тогда, когда множество $U = \{i \in \Omega \mid I_i \neq 0\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{D}$. Отметим, что здесь и в дальнейшем черточка над элементом обозначает его образ при действии естественного наложения кольца на фактор-кольцо.

Левые (правые, двусторонние) идеалы кольца R , обладающие представлением $I = (\prod_{i \in \Omega} I_i) / \mathfrak{D}$ назовем основными левыми (правыми, двусторонними) идеалами кольца R соответственно. Ясно, что сумма, пересечение, и частное от деления основного одностороннего или двустороннего идеала на элемент кольца R снова является односторонним или двусторонним основным идеалом кольца R . Таким образом, множество всех основных левых идеалов кольца A является решеткой относительно порядка включения. Эту решетку обозначим через $L_{(oc)}(A)$. Она является подрешеткой решетки $L(A)$ всех левых идеалов кольца A . В случае, если все кольца A_i являются левыми кольцами Безу, решетка $L_{(oc)}(A)$ содержит в качестве подрешетки решетку главных левых идеалов кольца A , поскольку каждый главный левый идеал в кольце A является основным. Решетка $L(A)$ намного шире решетки $L_{(oc)}(A)$, но последняя является “плотной” в первой, в том понимании, что все элементы из $L(A)$ можно построить (некоторым образом) исходя из элементов решетки $L_{(oc)}(A)$.

Приведем формулировки ряда вспомогательных утверждений, часть которых имеет фольклорный характер.

Предложение 1. *Для произвольного семейства колец $\{A_i\}_{i \in \Omega}$, любого неглавного ультрафильтра $\mathfrak{D}$ над Ω , и любого фиксированного семейства левых (правых, двусторонних) идеалов $\{I_i\}_{i \in \Omega}$, где $I_i \in L(A_i)$ для каждого $i \in \Omega$, справедливы следующие утверждения:*

1. *Левый (правый) идеал $I = (\prod_{i \in \Omega} I_i) / \mathfrak{D}$ является максимальным левым (правым) идеалом в A тогда и только тогда, когда существует такое множество $U \in \mathfrak{D}$, что для каждого $i \in U$ подмножество I_i является максимальным левым (правым) идеалом кольца A_i .*
2. *Идеал $I = (\prod_{i \in \Omega} I_i) / \mathfrak{D}$ является первичным идеалом тогда и только тогда, когда $U = \{i \in \Omega \mid I_i \text{ — первичный идеал кольца } R_i\} \in \mathfrak{D}$.*

3. Левый (правый) идеал $I = (\prod_{i \in \Omega} I_i)/\mathfrak{D}$ является главным n -порожденным (n – фиксированное) левым (правым) идеалом в R тогда и только тогда, когда $U = \{i \in \Omega \mid I_i \text{ является главным (} n\text{-порожденным) левым (правым) идеалом в } A_i\} \in \mathfrak{D}$. В частности, для каждого натурального n n -порожденный левый (правый) идеал кольца A является основным.
4. Равенство

$$I = (\prod_{i \in \Omega} I_i)/\mathfrak{D} = (\prod_{i \in \Omega} J_i)/\mathfrak{D}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $U = \{i \in \Omega \mid I_i = J_i\} \in \mathfrak{D}$.

5. Максимальный левый (правый) идеал кольца A содержит хотя бы один регулярный факториальный элемент тогда и только тогда, когда он является главным.

Доказательство этого факта является прямым следствием определений и мы его здесь не приводим. Отметим еще, что ультрапроизведение конечно порожденных левых (правых) идеалов, количество образующих которых не ограничено никаким натуральным числом, не является конечно порожденным. Аналогичное предложение имеет место для модулей.

Предложение 2. Пусть задано семейство $\{M_i\}_{i \in \Omega}$ левых A_i -модулей. Тогда истинны следующие утверждения:

1. Модуль $(\prod_{i \in \Omega} M_i)/\mathfrak{D}$ является простым левым R -модулем тогда и только тогда, когда $U = \{i \in \Omega \mid M_i \text{ является простым } A_i\text{-модулем}\} \in \mathfrak{D}$.
2. Модуль $(\prod_{i \in \Omega} M_i)/\mathfrak{D}$ является неразложимым R -модулем тогда и только тогда, когда $U = \{i \in \Omega \mid M_i \text{ – неразложимый } A_i\text{-модуль}\} \in \mathfrak{D}$.
3. Модуль $(\prod_{i \in \Omega} M_i)/\mathfrak{D}$ является циклическим (n -порожденным) левым A -модулем тогда и только тогда, когда $U = \{i \in \Omega \mid M_i \text{ – циклический (} n\text{-порожденный) } A_i\text{-модуль}\} \in \mathfrak{D}$.

4. Равенство

$$(\prod_{i \in \Omega} M_i)/\mathfrak{D} = (\prod_{i \in \Omega} N_i)/\mathfrak{D}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $U = \{i \in \Omega \mid M_i = N_i\} \in \mathfrak{D}$.

Предложение 3. Решетка $L_{(oc)}(A)$ изоморфна решетке $(\prod_{i \in \Omega} L(A_i))/\mathfrak{D}$. При этом изоморфизме максимальные элементы переходят в максимальные.

Замечание. Если задано семейство $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ некоторых колец и ультрафильтр $\mathfrak{D}$ над Ω , то модули вида $(\prod_{i \in \Omega} M_i)/\mathfrak{D}$ также называются основными левыми A -модулями и образуют полную подкатегорию в категории $A\text{-mod}$. Эту категорию обозначим через $A\text{-mod}_{(oc)}$. Она эквивалентна категории $(\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$, являющейся ультрапроизведением семейства категорий $\{A_i\text{-mod}\}_{i \in \Omega}$.

Поскольку мы хотим получить описание решетки $L(A)$ при помощи решетки $L_{(oc)}(A)$, то нам необходимо изучить свойства последней более подробно. Так как в общей ситуации это сделать трудно, то ограничимся тем случаем, который необходим при решении проблемы, указанной во введении. Точнее, пусть $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых V -областей. Сосредоточим внимание на максимальном левом основном спектре $\text{LSpec}_{(oc)} A$ кольца $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$, т.е. на множестве всех максимальных элементов решетки $L_{(oc)}(A)$. При этом будем рассматривать главные замкнутые подмножества в $\text{LSpec}_{(oc)}(A)$, по аналогии с коммутативными кольцами, и техникой, используемой при описании идеалов

в кольцах мероморфных функций [7] и нестандартных кольцах целых алгебраических чисел [10].

Предложение 4. Пусть $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых V -областей и $\mathfrak{D}$ – неглавный ультрафильтр над Ω . Тогда каждый основной левый идеал кольца $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ является пересечением некоторого семейства основных максимальных левых идеалов кольца A . Другими словами, каждый элемент решетки $L_{(oc)}(A)$ является пересечением семейства всех максимальных элементов, которые его покрывают.

Доказательство. Пусть $I = (\prod_{i \in \Omega} I_i)/\mathfrak{D}$, где I_i – левый идеал в кольце A_i для каждого $i \in \Omega$. Поскольку A_i является левым V -кольцом для каждого $i \in \Omega$, то $I_k = \cap_{j \in \Lambda_k} M_j^k$, где M_j^k – максимальный левый идеал в кольце A_k , а Λ_k – некоторое множество индексов для каждого $k \in \Omega$. Рассмотрим множество $\Lambda = \prod_{k \in \Omega} \Lambda_k$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$, $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \Omega}$ можно построить основной максимальный левый идеал $(\prod_{i \in \Omega} M_{\lambda_i}^i)/\mathfrak{D}$, который, очевидно, содержит левый идеал I . Множество всех максимальных левых идеалов, построенных таким образом, обозначим через Σ . Мы утверждаем, что $I = \cap_{M \in \Sigma} M$. С одной стороны, $I \subseteq \cap_{M \in \Sigma} M$. С другой стороны, допустим, что это включение является строгим. Тогда существует некоторый элемент $a \in (\cap_{M \in \Sigma} M) \setminus I$. Пусть $a = (a_i)_{i \in \Omega}$, где $a_i \in A_i$ для каждого $i \in \Omega$. Теперь рассмотрим левый идеал $I + Aa \neq I$. Очевидно, что

$$I + Aa \subseteq \bigcap_{M \in \Sigma} M.$$

Таким образом существует такое множество $U \in \mathfrak{D}$, что $I_i + A_i a_i \neq I_i$ для каждого $i \in U$. Так как A_i является левым V -кольцом, то существует максимальный левый идеал N_i^0 кольца A_i , для которого $I_i \subseteq N_i^0$, но

$$I_i + A_i a_i \not\subseteq N_i^0.$$

Положим $N_i = N_i^0$, если $i \in U$ и $N_i = M_{\lambda}^i$, где λ – произвольный фиксированный элемент из Λ_i , если $i \notin U$. Теперь построим основной максимальный левый идеал $M = (\prod_{i \in \Omega} N_i)/\mathfrak{D}$, для которого $I \subseteq M$, но $a \notin M$. Последнее ведет к противоречию с тем, что $a \in \cap_{M \in \Sigma} M$. Следовательно, левый идеал I является пересечением всех левых максимальных основных идеалов, которые его содержат. Предложение доказано.

Теорема 5. Каждый главный левый идеал в ультрапроизведении левых V -областей относительно неглавного ультрафильтра, является пересечением максимальных левых основных идеалов кольца A . В частности, если все сомножители в ультрапроизведении являются областями главных идеалов, то каждый главный левый идеал кольца A будет пересечением главных максимальных левых идеалов.

§2. НЕСОКРАТИМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ЛЕВЫХ ИДЕАЛОВ В УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯХ V -ОБЛАСТЕЙ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Изображение левого идеала I кольца A в виде пересечения максимальных левых идеалов $I = \cap_{i \in \Lambda} M_i$ назовем несократимым (или неприводимым), если для каждого $\beta \in \Lambda$ $I \neq \cap_{i \in \Lambda \setminus \{\beta\}} M_i$.

В области главных идеалов каждый ненулевой левый идеал обладает несократимым конечным изображением в виде пересечения максимальных левых идеалов, [1]. В такой области есть еще одна важная характеристика элементов – их длина. Под длиной элемента понимают число атомов в любом из атомных разложений этого элемента (символически $l(a)$). При изучении левых идеалов в ультрапроизведениях колец необходимо более общее понятие нестандартной длины. Обычное обозначение $\mathbb{N}_0$ используется для полукольца натуральных чисел с нулем (считаем, что $0 \in \mathbb{N}_0$). Кроме этого, $\mathbb{N}_0$ рассматривается как линейно упорядоченное полукольцо. Обозначим через $\tilde{\mathbb{N}}_0$ ультрастепень семейства экземпляров $\mathbb{N}_0$, заиндексированного элементами $i \in \Omega$, относительно того же ультрафильтра, по которому берется ультрапроизведение колец $\{A_i\}_{i \in \Omega}$. Тогда нестандартной длиной $\tilde{l}(a)$ элемента $a = \overline{(a_i)}_{i \in \Omega} \in (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ назовем нестандартное натуральное число $\tilde{m} = \overline{(l(a_i))}_{i \in \Omega}$, $\tilde{m} \in \tilde{\mathbb{N}}_0$.

Нестандартная длина, как функция $A \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}_0$, имеет такие же свойства, как и обычная длина элементов области главных идеалов. Выпишем некоторые из этих свойств. Фигурирующие в формулировках всех этих свойств элементы берутся из $A^* = A \setminus \{0\}$.

Н.Д.1. $\tilde{l}(a) = \tilde{0}$ тогда и только тогда, когда $a \in U(A)$.

Н.Д.2. $\tilde{l}(ab) > \tilde{l}(a)$ и $\tilde{l}(ab) > \tilde{l}(b) \Leftrightarrow a \notin U(A)$.

Н.Д.3. $\tilde{l}(ab) = \tilde{l}(a) + \tilde{l}(b)$.

Н.Д.4. Если $Aa + Ab = Ad$ и $Aa \cap Ab = Am$, то $\tilde{l}(m) = \tilde{l}(a) + \tilde{l}(b) - \tilde{l}(d)$.

Отметим, что поскольку $\mathbb{N}_0$ – линейно упорядоченное полукольцо, то $\tilde{\mathbb{N}}_0$ – также линейно упорядоченное полукольцо и поэтому нестандартная длина имеет еще одно свойство.

Н.Д.5. Для любых двух элементов $a, b \in A^*$, или $\tilde{l}(a) \leq \tilde{l}(b)$, или $\tilde{l}(b) \leq \tilde{l}(a)$.

Предложение 6. Пусть $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых V -областей Безу, в каждой из которых любой необратимый ненулевой элемент обладает атомным делителем, и $\mathfrak{D}$ – счетно-неполный ультрафильтр над Ω . Тогда каждый ненулевой главный левый идеал в кольце $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ обладает несократимым изображением в виде пересечения некоторого семейства левых главных максимальных идеалов.

Доказательство. Случай, когда образующий элемент a главного левого идеала имеет конечную (стандартную) длину, очевиден. Поэтому пусть $a = \overline{(a_i)}_{i \in \Omega}$ является ненулевым и нефакториальным. Тогда множество чисел $\{l(a_\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ не является ограниченным. Будем строить несократимое пересечение максимальных главных левых идеалов методом трансфинитной индукции. В качестве $\mathfrak{M}_0$ возьмем произвольный главный максимальный левый идеал Ap_0 , в котором содержится левый идеал Aa . Допустим, что уже построено семейство максимальных левых главных идеалов $\{Ap_i\}_{i < \alpha}$ такое, что $\cap_{i \neq \beta, i < \alpha} Ap_i \neq \cap_{i < \alpha} Ap_i$ для каждого $\beta < \alpha$ и $Aa \subseteq \cap_{i < \alpha} Ap_i$. Далее построение продолжается следующим образом:

а) Если α не является предельным трансфинитным числом, то $\alpha = \beta_0 + 1$, где β_0 – предшествующее α трансфинитное число. Если $\cap_{i < \alpha} Ap_i = Aa$, то построение завершено, а если нет, то в силу теоремы 5 существует такой главный максимальный левый идеал $\mathfrak{M} = Ap_\alpha$, что $Aa \subseteq Ap_\alpha$, но $\cap_{i \leq \beta_0} Ap_i \not\subseteq Ap_\alpha$. Очевидно, что $Aa \subseteq \cap_{i \leq \alpha} Ap_i$. Покажем, что $\cap_{i \neq \beta, i \leq \alpha} Ap_i \neq \cap_{i \leq \alpha} Ap_i$ для каждого $\beta \leq \alpha$. Если $\beta = \alpha$, то это неравенство имеет место по построению. Если

же $\beta < \alpha$, т.е. $\beta \leq \beta_0$, то $\bigcap_{i \neq \beta, i < \alpha} Ap_i \supsetneq \bigcap_{i < \alpha} Ap_i$ по предположению индукции. Таким образом существует элемент $0 \neq b \in \bigcap_{i \neq \beta, i < \alpha} Ap_i \setminus \bigcap_{i < \alpha} Ap_i$. Если предположить, что имеет место цепочка равенств

$$\bigcap_{i \neq \beta, i \leq \alpha} Ap_i = \left(\bigcap_{i \neq \beta, i < \alpha} Ap_i \right) \bigcap Ap_\alpha = \left(\bigcap_{i < \alpha} Ap_i \right) \bigcap Ap_\alpha = \bigcap_{i \leq \alpha} Ap_i,$$

где крайние равенства действительно имеют место, то мы получим $[b, p_\alpha]_l \in \bigcap_{i \leq \alpha} Ap_i$, а отсюда имеем $[b, p_\alpha]_l \in Ap_\beta$. Поэтому $[b, p_\beta]_l$ является правым делителем элемента $[b, p_\alpha]_l$. Так как $d \notin Ap_\beta$ и $b \notin Ap_\alpha$, то $\tilde{l}([b, p_\alpha]_l) = \tilde{l}([b, p_\beta]_l)$. Отсюда получим, что $[b, p_\beta]_l = [b, p_\alpha]_l$ (с точностью до ассоциированности). Поскольку $[b, p_\alpha]_l \in \bigcap_{i \leq \alpha} Ap_i$, то $[b, p_\beta]_l \in \bigcap_{i \leq \alpha} Ap_i$. Отсюда следует, что $(\bigcap_{i \neq \beta, i \leq \alpha} Ap_i) \cap Ap_\alpha = \bigcap_{i < \alpha} Ap_i$. Это противоречит тому, что $\bigcap_{i < \alpha} Ap_i \not\subseteq Ap_\alpha$. Таким образом $\bigcap_{i \neq \beta, i \leq \alpha} Ap_i \neq \bigcap_{i \leq \alpha} Ap_i$, и поэтому в случае а) построение, относящееся к шагу индукции, закончено.

б) Пусть α – предельное трансфинитное число. Если $\bigcap_{i < \alpha} Ap_i = Aa$, то построение закончено. Если же нет, то в силу теоремы 5 снова можно выбрать такой главный левый максимальный идеал Ap_α , что $\bigcap_{i < \alpha} Ap_i \not\subseteq Ap_\alpha$ и $Aa \subseteq Ap_\alpha$. То, что пересечение $\bigcap_{i \leq \alpha} Ap_i$ является несократимым (в случае б)), проверяется очевидным образом. Поскольку семейство главных левых максимальных идеалов, в которых содержится Aa , имеет фиксированную мощность, то на некотором шаге построения получим $Aa = \bigcap_{i < \alpha_0} Ap_i$ и это пересечение несократимо. Предложение доказано.

Заметим, что несократимое изображение в Предложении 6 можно получить из любого семейства максимальных левых идеалов, пересечение которых равно Aa . Другими словами, из сократимого пересечения всегда можно получить несократимое, выбрасывая ”лишние” максимальные левые идеалы. Отметим, что несократимое пересечение для левого идеала Aa может содержать только неглавные максимальные левые идеалы, а поэтому говорить об однозначности изображения в виде бесконечного несократимого пересечения максимальных левых идеалов в кольце $(\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ нельзя. Как связаны разные несократимые пересечения главного левого идеала через главные максимальные левые идеалы показано в Предложении 7.

Выясним теперь, можно ли получить несократимое изображение в виде пересечения максимальных левых идеалов, исходя из несократимых пересечений компонент некоторого представителя образующего элемента главного левого идеала Aa .

Пусть $a = \overline{(a_i)}_{i \in \Omega}$ – ненулевой необратимый элемент кольца $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$, где A_i – область главных идеалов для каждого $i \in \Omega$. Тогда существует несократимое изображение $Aa_i = Ap_{i_1} \cap Ap_{i_2} \cap \dots \cap Ap_{i_k}$ при любом $i \in \Omega$. Зафиксируем эти изображения и на их основе построим континуум атомных правых делителей элемента a , занумерованных нестандартными натуральными числами из $\tilde{\mathbb{N}}$. Пусть для каждого $i \in \Omega$ задано натуральное число m_i , $1 \leq m_i \leq k_i$. Тогда нестандартное число $\overline{(m_i)}_{i \in \Omega}$ обозначим через $\tilde{m}$, а через $p_{\tilde{m}}$ атом $\overline{(p_{m_i})}_{i \in \Omega}$, который является, очевидно, правым делителем элемента a . Очевидно также, что если $\tilde{m} \neq \tilde{n}$, то $p_{\tilde{m}}$ и $p_{\tilde{n}}$ – неассоциированные атомы, то есть $Ap_{\tilde{m}} \neq Ap_{\tilde{n}}$. Нестандартное число $\tilde{m}$ будем называть нестандартным номером атома $p_{\tilde{m}}$. Понятно, что все нестандартные номера построенных выше правых атомных

делителей элемента a удовлетворяют неравенству $\tilde{l} \leq \tilde{m} \leq \tilde{k}$, где $\tilde{k} = \overline{(k_i)}_{i \in \Omega}$. Теперь видно, что несократимое изображение в виде пересечения максимальных левых главных идеалов можно получить используя атомные делители элемента a с нестандартными натуральными номерами.

Предложение 7. Пусть $a = \overline{(a_i)}_{i \in \Omega}$ – произвольный ненулевой необратимый элемент кольца $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$, где A_i – левая V -область главных идеалов, а $\mathfrak{D}$ – неглавный ультрафильтр над Ω . Тогда главный левый идеал Aa представим в виде несократимого пересечения главных максимальных левых идеалов, образующими которых являются правые атомные делители $p_{\tilde{m}}$ элемента a с попарно различными нестандартными номерами $\tilde{m}$, удовлетворяющими неравенству $\tilde{l} \leq \tilde{m} \leq \tilde{k}$.

Если $\tilde{l}(a)$ не является стандартным натуральным числом, $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – другая нефинитарная последовательность атомов кольца A , которые также могут быть взяты в качестве образующих несократимых компонент, то существует такая нестандартная подстановка $\tilde{\sigma} \in S_{\tilde{l}(a)}$, что атомы $p_{\tilde{m}}$ и $q_{\tilde{\sigma}(\tilde{m})}$ являются подобными.

Доказательство. Понятно, что $Aa \subseteq \cap_{\tilde{l} \leq \tilde{m} \leq \tilde{k}} Ap_{\tilde{m}} = I$. Наоборот, пусть $b \in I$. Рассмотрим такой элемент d , что $Aa + Ab = Ad$. Очевидно $d \in I$ и d является правым делителем элемента a . Поэтому $\tilde{l}(a) \geq \tilde{l}(d)$. Если $\tilde{l}(a) > \tilde{l}(d)$, то существует такое множество $U \in \mathfrak{D}$, что $\tilde{l}(a_i) > \tilde{l}(d_i)$ для каждого $i \in U$. Поскольку A_i является левой V -областью, то существуют такие атомы p_{r_i} , $1 \leq r_i \leq k_i$, что $Ad_i \not\subseteq Ap_{r_i}$ для каждого $i \in U$. Пусть $\tilde{m} = \overline{(r_i)}_{i \in \Omega}$, где $r_i = 0$ для $i \notin U$. Тогда $Ad \not\subseteq Ap_{\tilde{m}}$, а это противоречит тому, что $Ad \subseteq I$. Таким образом $\tilde{l}(a) = \tilde{l}(d)$, а поэтому $Aa = Ad$. Отсюда $b \in Aa$ и окончательно $I \subseteq Aa$. Мы доказали, что $I = Aa$, т. е. $Aa = \cap_{\tilde{l} \leq \tilde{m} \leq \tilde{k}} Ap_{\tilde{m}} = I$. Остается доказать, что это представление несократимо. Но это очевидно, поскольку отбрасывание каждого максимального левого идеала вида $Ap_{\tilde{m}}$ приводит к уменьшению нестандартной длины образующего элемента пересечения на единицу. Предложение доказано.

Докажем теперь утверждение об однозначности. Имеем

$$a = \overline{([p_{i1}, \dots, p_{in_i}]l)_{i \in \Omega}} = \overline{([q_{i1}, \dots, q_{in_i}]l)_{i \in \Omega}}.$$

Поэтому каждый атом $q_{\tilde{m}}$, который принимает участие в качестве образующего элемента в другом несократимом представлении главного левого идеала Aa имеет вид $q_{\tilde{m}} = \overline{(q_{im_i})_{i \in \Omega}}$, где $1 \leq m_i \leq n_i$. Но тогда q_{im_i} подобен некоторому атому p_{ij} , где $1 \leq j \leq n_i$. Обозначим $j = \sigma_i(m_i)$. Тогда элемент $q_{\tilde{m}}$ подобен атому $p_{\tilde{\sigma}(\tilde{m})} = \overline{(p_{i\sigma_i(m_i)})_{i \in \Omega}}$. Мы получили такую нестандартную подстановку $\tilde{\sigma} \in (\prod_{i \in \Omega} S_{n_i})/\mathfrak{D}$, что для каждого атомного делителя $q_{\tilde{m}}$ элемента a , атомы $q_{\tilde{m}}$ и $q_{\tilde{\sigma}(\tilde{m})}$ являются подобными. Тем самым предложение доказано.

Нам понадобится следующая характеристика левых V -областей главных идеалов.

Предложение 8. Область главных идеалов A является левой V -областью тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого необратимого элемента $a \in A$ и каждого его необратимого правого делителя b существует такой элемент $c \in A$, что $Ab + Ac = A$ и $Ab \cap Ac = Aa$.

Доказательство. Пусть A – левая V -область главных идеалов, $a \in A$, $a \notin U(A)$, $a \neq 0$. Если $Aa \subsetneq Ab$, то рассмотрим несократимое изображение левого идеала Aa в виде пересечения $Aa = Ap_1 \cap Ap_2 \cap \dots \cap Ap_n$, причем такого, что $Ap_{k+1} \cap \dots \cap Ap_n = Ab$. Тогда $Ap_1 \cap Ap_2 \cap \dots \cap Ap_k = Ac$ и, следовательно, $Aa = Ab \cap Ac$. Если $Ab + Ac = Ad$, то $l(a) = l(b) + l(c) - l(d)$, а по построению $l(a) = l(b) + l(c)$. Поэтому $l(d) = 0$ и $d \in U(A)$. Таким образом, $Ab + Ac = A$.

Доказательство необходимости проведем методом математической индукции по длине образующего элемента произвольного левого идеала кольца A . Если $l(a) = 1$, то это атом и Aa является пересечением одного максимального левого идеала. Предположим, что каждый левый идеал Aa , с условием $l(a) < n$ является пересечением максимальных левых идеалов. Возьмем теперь произвольный элемент c длины $l(c) = n$. Покажем, что Ac также представляется в виде пересечения максимальных левых идеалов. Поскольку $c \notin U(A)$, то существует атом p_1 , для которого $c \in Ap_1$. По условию теоремы существует элемент b , такой, что $Ap_1 \cap Ab = Ac$ и $Ap_1 + Ab = A$. Тогда $l(b) < n$ и поэтому $Ab = Ap_2 \cap Ap_3 \cap \dots \cap Ap_n$ (в силу предположения индукции). Следовательно, $Ac = Ap_1 \cap Ap_2 \cap \dots \cap Ap_n$. Предложение доказано.

Заметим, что условие предложения 8 можно записать в виде предложения языка теории колец первого порядка.

Введем обозначения (см. [12]):

$\text{Dom}(A)$: $(\forall x)(\forall y) (x = 0 \vee y = 0 \vee \neg(x \cdot y = 0) \wedge 1 \neq 0)$.

$\text{Un}(A)$: $\exists z (xz = zx = 1)$.

$\text{Bez}(A)$: $\text{Dom}(A) \wedge (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists u)(\exists v)(\exists w)(\exists t) (z = xu + yv \wedge x = zw \wedge y = zt)$.

$\text{At}(z)$: $(\forall x)(\forall y) (\neg \text{Un}(z) \wedge (z = x \cdot y \Rightarrow \text{Un}(x) \vee \text{Un}(y)))$.

$\text{At}(A)$: $(\forall z)(\exists x)(\exists y) (\text{At}(x) \wedge (\text{Un}(z) \vee z = xy))$.

$\text{Rv}(A)$: $(\forall x)(\forall y) (y|_l x \Rightarrow (\exists z)(yA \cap zA = xA \wedge yA + zA = A))$.

Последняя формула требует объяснений. Запись $y|_l x$ означает, что элемент y является левым делителем элемента x , запись $yA \cap zA = xA$ означает, что x является наименьшим общим правым кратным для элементов y и z , а запись $yA + zA = A$ равносильна взаимной простоте слева элементов y и z . Эти сокращения можно записать в виде формул языка теории колец первого порядка.

Теперь мы видим, что свойство, фигурирующее в утверждении 8 записывается предложением $\text{Rv}(A)$ (левосторонняя версия) и поэтому выполняется в любом ультрапроизведении левых V -областей главных идеалов. Кроме этого, каждое такое ультрапроизведение удовлетворяет аксиоме $\text{At}(A)$ и мы называем такие кольца квазиатомными. Сказанное можно выразить в виде следствия.

Следствие 9. Пусть $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых V -областей главных идеалов и $\mathfrak{D}$ – неглавный ультрафильтр над Ω . Тогда кольцо $(\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ является квазиатомной областью, в которой выполняется аксиома $\text{Rv}(A)$.

Ясно, что аналогичное следствие верно для ультрапроизведений правых V -областей главных идеалов с соответствующей правосторонней версией аксиомы $\text{Rv}(A)$.

§3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАЗУЮЩИХ ЛЕВЫХ ИДЕАЛОВ ОБЛАСТЕЙ БЕЗУ И ОПИСАНИЕ РЕШЕТКИ ЛЕВЫХ ИДЕАЛОВ УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ Δ -ФИЛЬТРОВ

В этом параграфе A может быть произвольной ассоциативной областью.

Напомним, что A называется левой (правой) областью Безу, если сумма любых двух главных левых (правых) идеалов области A является главным левым (правым) идеалом. Область Безу – это левая и правая область Безу. Известно, что в области Безу пересечение любых двух главных левых (правых) идеалов является главным левым (правым) идеалом ([12]). Заметим, что если говорят о кольце Безу, то условие, касающееся пересечения главных идеалов, постулируется ([6]). Поскольку ультрапроизведение любого семейства левых (правых) колец (областей) Безу является снова левым (правым) кольцом (областью) Безу, то, желая описать решетку левых (правых) идеалов таких колец, мы должны четче выяснить возможность выбора “хороших” систем образующих этих идеалов. Один тип таких систем образующих описывает следующее предложение.

Предложение 10. *Для каждого неглавного левого (правого) идеала I левой (правой) области Безу A существует такая система образующих $\{a_i\}_{i \in [0; \alpha_0)}$, где α_0 – предельное трансфинитное число, что выполняются следующие условия:*

П.С.Т.1. Для каждого непердельного $\beta \in [0, \alpha_0)$ элемент a_β является собственным правым (левым) делителем элемента $a_{\beta-1}$.

П.С.Т.2. Для каждого предельного $\beta \in [0; \alpha_0)$ элемент a_β является собственным правым (левым) делителем элемента a_0 .

П.С.Т.3. α_0 является наименьшим предельным трансфинитным числом, для которого существует система образующих идеала I , занумерованная трансфинитными числами, принадлежащими интервалу $[0; \alpha_0)$ и обладающая свойствами П.С.Т.1 и П.С.Т.2.

Определение. Система образующих левого (правого) идеала I области Безу A называется естественной, если она обладает свойствами П.С.Т.1, П.С.Т.2, П.С.Т.3 из предложения 10.

Доказательство предложения 10. Пусть β_0 – трансфинитное число, определенное некоторым полным порядком на множестве элементов кольца A . Рассмотрим произвольный неглавный левый идеал I в A . Выберем произвольный ненулевой элемент $a_0 \in I$. Тогда $I \neq Aa_0$. Элемент a_0 будем считать первым в системе образующих, которую мы строим. Предположим, что для некоторого трансфинитного числа $\alpha \in [0; \beta_0)$ для каждого $\beta \in [0; \alpha)$ элемент $a_\beta \in I$ семейства образующих уже выбран, причем для семейства $\{a_i\}_{i \in [0, \alpha)}$ выполняются условия П.С.Т.1 и П.С.Т.2. Если левый идеал I_α , порожденный всеми элементами a_β , $\beta < \alpha$ совпадает с I , то мы уже имеем нужную естественную систему образующих. Предположим, что $I \neq I_\alpha$ и что α является предельным трансфинитным числом. Понятно, что $I_\alpha \subset I$ и существует ненулевой элемент $b \in I \setminus I_\alpha$. Рассмотрим левый идеал $Aa_0 + Ab$, являющийся главным (ибо кольцо A является кольцом Безу), и возьмем в качестве элемента a_α один из образующих этого главного левого идеала. Если α не является предельным трансфинитным числом, то в качестве a_α возьмем элемент d , определяющийся равенством $Ad = Aa_{\alpha-1} + Ab$. Поскольку естественная система образующих не может иметь мощность большую мощности кольца, то существует такое трансфинитное число $\alpha_0 \leq \beta_0$, для которого $\sum_{\alpha < \alpha_0} Aa_\alpha = I$, причем α_0 можно

считать предельным. В действительности, если α_0 не является предельным, то повторим наши соображения, используя только элементы семейства $\{a_i\}_{i < \alpha_0}$,

но построение начнем с наибольшего правого общего делителя элементов a_0 и a_α . Осталось проверить выполнение условия П.С.Т.3.

Будем говорить, что трансфинитное число α имеет свойство φ , если существует система образующих $\{a_i\}_{i \in [0, \alpha)}$, обладающая свойствами П.С.Т.1. и П.С.Т.2. По доказанному, множество всех трансфинитных чисел, обладающих свойством φ не пусто, и поэтому содержит минимальный элемент α_0 . Не трудно видеть, что тем самым найдено нужное α_0 . Предложение доказано.

Замечание. Понятно, что естественная система образующих левого идеала выбирается далеко не однозначно. Но она является “хорошей”, поскольку все образующие являются правыми делителями одного элемента a_0 . Отметим также, что в качестве элемента a_0 можно взять произвольный ненулевой элемент идеала I .

Верно более сильное утверждение: для произвольного левого идеала I кольца Безу существует такая естественная система образующих $\{a_\alpha\}_{\alpha \in [0, \alpha_0)}$, что для каждого предельного $\beta \in [0, \alpha_0)$ и каждого $\gamma > \beta$, $\gamma \in [0, \alpha_0)$ элемент a_γ является левым делителем элемента a_β . В самом деле, элемент a_0 обладает свойством делимости справа на все элементы a_γ , $\gamma \in [0, \alpha_0)$. Предположим, что для каждого предельного $\beta < \beta_0$, где β_0 – также предельное трансфинитное число из $[0, \alpha_0)$ семейство таких образующих $\{a_\alpha\}_{\alpha \in [0, \beta)}$ уже построено. Тогда на шаге β_0 заменим все элементы a_γ с номерами γ большими чем β_0 на их наибольшие общие правые делители с элементом a_{β_0} . Прорабатывая такую процедуру на всех предельных местах β_0 , получим нужную естественную систему образующих. В дальнейшем, не подчеркивая этого каждый раз, будем считать, что все рассматриваемые естественные системы образующих обладают отмеченным свойством.

Предложение 11. Пусть I и J – два ненулевые левые идеала области Безу A ; $\{a_i\}_{i \in [0, \alpha_0)}$ и $\{b_j\}_{j \in [0, \beta_0)}$ – их естественные системы образующих. Если $[a, b]_l$ – наименьшее левое общее кратное элементов a и b , а $(a, b)_r$ – их наибольший общий левый делитель, то верны утверждения:

1. Семейство элементов $\{[a_i, b_j]_l\}_{i \in [0, \alpha_0), j \in [0, \beta_0)}, i \leq j$, является системой образующих левого идеала $I \cap J$.
2. Семейство элементов $\{(a_i, b_j)_l\}_{i \in [0, \alpha_0), j \in [0, \beta_0)}, i \leq j$, является системой образующих левого идеала $I + J$.
3. Пусть $\lambda \in A$, $\lambda \neq 0$. Тогда естественная система образующих для левого идеала $(I : \lambda)$ строится следующим образом. Предположим, что $[a_i, \lambda]_l = c_i$ для каждого $i \in [0, \alpha_0)$ и $u_i a_i = v_i \lambda$, где $u_i A + v_i A = A$, $i \in [0, \alpha_0)$. Тогда семейство элементов $\{v_i\}_{i \in [0, \alpha_0)}$ является системой образующих для $(I : \lambda)$.

Доказательство этого предложения состоит в прямой проверке пунктов 1)–3), что не составляет большого труда.

Заметим, что пользуясь системами образующих для левых идеалов $I \cap J$, $I + J$ и $(I : \lambda)$ можно построить их естественные системы образующих. В качестве следствия к предложению 10 можем сформулировать такое утверждение.

Предложение 12. Левый идеал в области Безу является счетно-порождаемым тогда и только тогда, когда он является объединением счетной возрастающей последовательности главных левых идеалов.

Следующее предложение показывает когда пересечение счетного семейства главных левых идеалов само является главным левым идеалом.

Предложение 13. Пусть $A = (\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i) / \mathfrak{D}$ – ультрапроизведение левых V -областей главных идеалов относительно счетно-неполного ультрафильтра $\mathfrak{D}$ над множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$. Пусть, кроме этого, $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность атомов кольца A . Тогда левый идеал $\cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$ является главным левым идеалом тогда и только тогда, когда все атомы p_j являются правыми делителями одного и того же факториального элемента a кольца A .

Доказательство. Введем такие технические обозначения: $p_j = \overline{(p_{ji})_{i \in \mathbb{N}}}$, где p_{ij} – атом кольца A_i для каждого $i \in U_j$, $U_j \in \mathfrak{D}$, и каждого $j \in \mathbb{N}$. Будем также считать, что $p_{ij} = 1$ для каждого $j \in \mathbb{N}$ и каждого $i \in \mathbb{N} \setminus U_j$. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность множеств ультрафильтра $\mathfrak{D}$, пересечение которой пусто, и которая является строго убывающей (существование такой последовательности обеспечивается условием счетной неполноты ультрафильтра $\mathfrak{D}$). Предположим, что $\cap_{j=0}^{\infty} Ap_j = Aa$, где a – нефакториальный элемент кольца A . Тогда для каждого ненулевого элемента $b \in \cap_{j=0}^{\infty} Ap_j = Aa$ выполняется неравенство $\tilde{l}(b) \geq \tilde{l}(a)$. Пусть $a = \overline{(a_i)_{i \in \mathbb{N}}}$. Поскольку $a \in \cap_{j \in \mathbb{N}} Ap_j$, то можно найти такую убывающую последовательность $\{U_j\}_{j=0}^{\infty}$ множеств U_j из ультрафильтра $\mathfrak{D}$, что $p_{ij}|a_i$ для каждого $i \in U_j$ и для каждого $j \in \mathbb{N}$. Поскольку a не является факториальным, то $\cap_{j=0}^{\infty} U_j \cap V_j = \cap_{j=0}^{\infty} W_j = \emptyset$, где $W_j = U_j \cap V_j$. Кроме этого, множества $W'_i = W_i \setminus W_{i+1}$ не пусты и $\cup_{i=0}^{\infty} W'_i = \mathbb{N}$. Благодаря теореме 5 существуют такие элементы $c_{ij} \in A_i$, $i \in \mathbb{N}$, что $A_i a_i = A_i c_{ji} \cap A_i p_{1i} \cap \dots \cap A_i p_{ji}$ для каждого $i \in W'_j$ и каждого $j \in \mathbb{N}$.

Пусть $A_i d_i = A_i c_{ji} \cap A_i p_{1i} \cap \dots \cap A_i p_{j-1i}$, для каждого $j \in \mathbb{N}$.

Тогда элемент $d = \overline{(d_i)_{i \in \mathbb{N}}} \in A$ ненулевой и принадлежит левому идеалу $\cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$; кроме этого, $\tilde{l}(d) < \tilde{l}(a)$. Полученное противоречие показывает, что элемент a должен быть факториальным.

Докажем достаточность условия делимости факториального элемента $a \in A$ на все атомы p_j , $j \in \mathbb{N}$, для того, чтобы левый идеал $\cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$ был главным. Обозначим через b правый делитель элемента a наименьшей длины среди всех правых делителей элемента, которые сами делятся справа на все p_j , $j \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\cap_{j=0}^{\infty} Ap_j = Ab$. Поскольку каждый атом p_j делит элемент b справа, то $Ab \subseteq \cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$. Пусть, теперь, $c \neq 0$, $c \in \cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$ и $Ad = Ab + Ac$. Тогда $d \in \cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$ и $b = rd$, для некоторого $r \in A$. Если $r \notin U(A)$, то $\tilde{l}(d) < \tilde{l}(b)$, а это противоречит тому, что b имеет наименьшую длину среди правых делителей элемента b , которые принадлежат $\cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$. Следовательно, элемент b ассоциирован с d , а это означает, что b является правым делителем элемента c . Поэтому $c \in Ab$ и $Ab = \cap_{j=0}^{\infty} Ap_j$. Предложение доказано.

Замечание. Комбинируя предложения 12 и 13 видим, что доказан такой факт: ненулевые главные идеалы с нефакториальными образующими в ультрапроизведении счетного семейства левых V -областей главных идеалов относительно счетно-неполного ультрафильтра изображаются в виде несократимого пересечения максимальных левых идеалов только через континуальные семейства таких идеалов. Отметим еще, что в таких кольцах факториальными являются те и только те элементы, которые имеют стандартную длину.

Перейдем к описанию решетки левых идеалов ультрапроизведения левых V -колец Безу. Пусть $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых V -областей Безу и $\mathfrak{D}$ – неглавный ультрафильтр над множеством Ω . Множество всех основных максимальных левых идеалов кольца $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ обозначим через $\text{Lmspec}^{(oc)}(A)$. Каждый элемент $r \in A$ определяет главное замкнутое подмножество

$$\mathbb{V}(r) = \{\mathfrak{M} \in \text{Lmspec}^{(oc)}(A) | r \in \mathfrak{M}\}$$

множества $\text{Lmspec}^{(oc)}(A)$. Совокупность всех главных замкнутых подмножеств множества $\text{Lmspec}^{(oc)}(A)$ обозначим через $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$. Теперь можно ввести понятие Δ -фильтра над множеством $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$ по аналогии с тем, как это делается в случае колец функций [7], [10], [16], [25].

Совокупность элементов множества $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$ называется Δ -фильтром над $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$, если выполняются такие условия:

$\Delta\Phi.1$. Для любых $U, V \in \mathfrak{F}$ множество $U \cap V$ также принадлежит $\mathfrak{F}$.

$\Delta\Phi.2$. Для каждого множества $U \in \mathfrak{F}$ и каждого множества $V \in \mathfrak{C}^{(oc)}(A)$ из условия $U \subseteq V$ следует, что $V \in \mathfrak{F}$.

Если, кроме этого, выполняется условие

$\Delta\Phi.3$. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

то Δ -фильтр $\mathfrak{F}$ называется собственным Δ -фильтром.

Максимальные Δ -фильтры над множеством $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$ называются Δ -ультрафильтрами.

Множество $L\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$ всех Δ -фильтров над $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$ является частично-упорядоченным относительно отношения включения.

В действительности, это множество является решеткой относительно операции пересечения Δ -фильтров и операции взятия наименьшего Δ -фильтра, содержащего оба заданных Δ -фильтра.

Оказывается, что решетку левых идеалов кольца $(\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ можно построить с помощью решетки $L\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$.

Это устанавливает следующая теорема.

Теорема 14. Пусть $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ – семейство левых V -областей Безу, $\mathfrak{D}$ – неглавный ультрафильтр над Ω и $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$. Тогда отображение $\theta : L(A) \rightarrow L\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$, сопоставляющее каждому левому идеалу I кольца A Δ -фильтр $\mathfrak{F}_I$, определенный равенством $\mathfrak{F}_I = \{V(r) | r \in I\}$, является изоморфизмом решеток и, кроме этого, $\theta(I)$ является Δ -ультрафильтром тогда и только тогда, когда I является максимальным левым идеалом кольца A .

Доказательство. Убедимся, что $\mathfrak{F}_I$ действительно является Δ -фильтром над множеством $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$. Пусть $U = \mathbb{V}(r) \in \mathfrak{F}_I$ и $V = \mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}_I$, где $r, s \in I$. Тогда

$$\begin{aligned} U \cap V &= \mathbb{V}(r) \cap \mathbb{V}(s) = \{\mathfrak{M} \in \text{Lmspec}^{(oc)}(A) | r \in \mathfrak{M}, s \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \{\mathfrak{M} \in \text{Lmspec}^{(oc)}(A) | (r, s)_r \in \mathfrak{M}\} = \mathbb{V}((r, s)_r). \end{aligned}$$

Поскольку $r \in I$ и $s \in I$, то $(r, s)_r \in I$, а это означает, что $\mathbb{V}((r, s)_r) \in \mathfrak{F}_I$, т.е. $U \cap V \in \mathfrak{F}_I$.

Следовательно аксиома $\Delta\Phi.1$ для $\mathfrak{F}_I$ выполняется. Пусть, далее, $U \in \mathfrak{F}_I$ и $V \in \mathfrak{C}^{(oc)}(A)$ такие, что $U \subseteq V$. Тогда $U = \mathbb{V}(r)$ для некоторого $r \in I$ и $V = \mathbb{V}(s)$ для некоторого $s \in A$. Так как каждый главный левый идеал является

пересечением максимальных левых идеалов (теорема 5), то $As = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathbb{V}(s)} \mathfrak{M}$ и аналогично $Ar = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathbb{V}(r)} \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathbb{V}(r) \subset \mathbb{V}(s)$, то отсюда следует, что

$$\bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathbb{V}(s)} \mathfrak{M} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathbb{V}(r)} \mathfrak{M},$$

или $As \subseteq Ar$. Поэтому $s = tr$ для некоторого $t \in A$ и, поскольку $r \in I$, то $s \in I$. Тем самым установлено, что $V = \mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}_I$. Следовательно, условие $\Delta\Phi.2$ также выполняется. Если $I \neq A$, то $\emptyset \notin \mathfrak{F}_I$ и тогда Δ -фильтр $\mathfrak{F}_I$ является собственным.

Предположим теперь, что I является максимальным левым идеалом кольца A . Покажем, что $\mathfrak{F}_I$ является Δ -ультрафильтром. Если это не так, то существует главное замкнутое множество $\mathbb{V}(r)$, где $r \in A \setminus I$, имеющее непустое пересечение со всеми элементами из $\mathfrak{F}_I$. Тогда, поскольку $r \notin I$ и I является максимальным левым идеалом, имеем, что $Ar + I = A$. Пусть $tr + m = 1$, где t некоторый элемент из A , а $m \in I$. Поскольку $\mathbb{V}(m) \in \mathfrak{F}_I$, то с одной стороны, $\mathbb{V}(m) \cap \mathbb{V}(r)$ не пусто (в силу нашего предположения). С другой стороны, $\mathbb{V}(m) \cap \mathbb{V}(r) = \mathbb{V}((m, r)_r) = \mathbb{V}(1) = \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}_I$ является Δ -ультрафильтром над множеством $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$.

Для установления биективности отображения θ построим обратное отображение $\nu : L\mathfrak{C}(A) \rightarrow L(A)$. Для каждого Δ -фильтра $\mathfrak{F} \in L\mathfrak{C}(A)$ положим:

$$\nu(\mathfrak{F}) = I_{\mathfrak{F}} = \{r \in A \mid \mathbb{V}(r) \in \mathfrak{F}\}.$$

Убедимся, что $I_{\mathfrak{F}}$ является левым идеалом кольца A . Пусть $r, s \in I_{\mathfrak{F}}$. Тогда $\mathbb{V}(r) \in \mathfrak{F}$ и $\mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}$, а поэтому $\mathbb{V}(r) \cap \mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}$. Но $\mathbb{V}(r) \cap \mathbb{V}(s) = \mathbb{V}((r, s)_r)$, следовательно, мы получаем $(r, s)_r = d \in I_{\mathfrak{F}}$. Так как $r = td$ и $s = pd$ для некоторых $t, p \in A$, то $r + s = td + pd = (t + p)d \in I_{\mathfrak{F}}$. Пусть, далее, $s \in I_{\mathfrak{F}}$, а r — произвольный элемент из A . Тогда $\mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}$, а $\mathbb{V}(rs) \supseteq \mathbb{V}(s)$ и, по аксиоме $\Delta\Phi.2$ имеем, что $\mathbb{V}(rs) \in \mathfrak{F}$. Поэтому $rs \in I_{\mathfrak{F}}$. Если $\mathfrak{F}$ — некоторый Δ -ультрафильтр над множеством $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$, то $\mathfrak{F}$ является максимальным левым идеалом кольца A . В самом деле, пусть $r \notin I_{\mathfrak{F}}$. Тогда $\mathbb{V}(r) \notin \mathfrak{F}$, а поэтому существует главное замкнутое множество $\mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}$, такое, что $\mathbb{V}(r) \cap \mathbb{V}(s) = \emptyset$. Следовательно, $Ar + As = A$, а поскольку $s \in I_{\mathfrak{F}}$, то $Ar + I_{\mathfrak{F}} = A$. Таким образом $I_{\mathfrak{F}}$ является максимальным левым идеалом.

Докажем взаимную обратимость отображений θ и ν . Для произвольного левого идеала I кольца A имеем:

$$\begin{aligned} (\nu \circ \theta)(I) &= \nu(\theta(I)) = \nu(\{\mathbb{V}(r) \mid r \in I\}) = \\ &= \{s \mid s \in A, \mathbb{V}(s) \in \{\mathbb{V}(r) \mid r \in I\}\} = \{s \in A \mid \mathbb{V}(s) = \mathbb{V}(r), r \in I\}. \end{aligned}$$

Поэтому, если будет установлено, что каждый элемент $s \in A$, для которого $\mathbb{V}(s) = \mathbb{V}(r)$, где $r \in I$, сам принадлежит I , то будет также доказано, что $\nu\theta(I) = I$. Для проверки отмеченного свойства элемента s изобразим левые главные идеалы Ar и As в виде пересечения основных максимальных левых идеалов:

$$As = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathbb{V}(s)} \mathfrak{M} = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathbb{V}(r)} \mathfrak{M} = Ar.$$

Поскольку $Ar \subseteq I$, то $As \subseteq I$, а поэтому $s \in I$. Следовательно, $\nu \circ \theta = 1_{L(A)}$.

Убедимся, что $\theta \circ \nu = 1_{L\mathfrak{C}(A)}$. Для этого нужно доказать равенство $\theta(\nu(\mathfrak{F})) = \mathfrak{F}$ для каждого Δ -фильтра $\mathfrak{F}$ над $\mathfrak{C}^{(oc)}(A)$. Очевидно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (\theta \circ \nu)(\mathfrak{F}) &= \theta(\nu(\mathfrak{F})) = \theta(\{s \in A \mid \mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}\}) = \{\mathbb{V}(r) \mid r \in \{s \in A \mid \mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}\}\} = \\ &= \{\mathbb{V}(r) \mid \mathbb{V}(r) = \mathbb{V}(s), \mathbb{V}(s) \in \mathfrak{F}\} = \{\mathbb{V}(r) \mid \mathbb{V}(r) \in \mathfrak{F}\} = \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно получаем, что $\theta = \nu^{-1}$. Таким образом, θ является биекцией и остается проверить, что θ сохраняет операции решетки. Пусть I, J – произвольные левые идеалы кольца A . Тогда имеет место следующая цепочка равенств

$$\theta(I \cap J) = \{\mathbb{V}(r) \mid r \in I \cap J\} = \{\mathbb{V}(r) \mid \mathbb{V}(r) \in \theta(I) \text{ и } \mathbb{V}(r) \in \theta(J)\} = \theta(I) \cap \theta(J).$$

Поэтому θ сохраняет операцию пересечения. Точной верхней гранью для левых идеалов I и J является левый идеал $I + J$. По определению отображения θ имеем

$$\theta(I + J) = \{\mathbb{V}(r + s) \mid r \in I, s \in J\}.$$

Очевидно также, что $\theta(I) \subseteq \theta(I + J)$ и $\theta(J) \subseteq \theta(I + J)$. Поэтому Δ -фильтр $\theta(I + J)$ является верхней гранью для Δ -фильтров $\theta(I)$ и $\theta(J)$. Пусть, теперь $\mathfrak{F}$ – произвольная верхняя грань для $\theta(I)$ и $\theta(J)$, то есть, пусть $\mathfrak{F} \supseteq \theta(I)$ и $\mathfrak{F} \supseteq \theta(J)$. Покажем, что $\theta(I + J) \subseteq \mathfrak{F}$. Если это не так, то существуют такие элементы $r_0 \in I$ и $s_0 \in J$, что $\mathbb{V}(r_0 + s_0) \notin \mathfrak{F}$. Но

$$\mathbb{V}(s_0) \cap \mathbb{V}(r_0) \in \mathfrak{F},$$

поскольку

$$\mathbb{V}(s_0) \in \theta(J) \subseteq \mathfrak{F} \text{ и } \mathbb{V}(r_0) \in \theta(I) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Учитывая, что

$$\mathbb{V}(r_0) \cap \mathbb{V}(s_0) = \mathbb{V}((r_0, s_0)_r) \subseteq \mathbb{V}(r_0 + s_0),$$

получаем противоречие. Таким образом, $\theta(I + J) = \theta(I) \vee \theta(J)$, где знак $\vee$ означает операцию объединения в решетке $L\mathfrak{C}(A)$. Теорема доказана.

Предложение 15. Пусть I – левый идеал в кольце $A = (\prod_{i \in \Omega} A_i)/\mathfrak{D}$ и $\{a_\alpha\}_{\alpha \in [0; \alpha_0)}$ – некоторая естественная система образующих этого левого идеала. Тогда семейство множеств $\{\mathbb{V}(a_\alpha)\}_{\alpha \in [0; \alpha_0)}$ является базисом Δ -фильтра $\theta(I)$.

Доказательство. Нам нужно убедиться, что каждое множество $\mathbb{V}(r)$, $r \in I$, содержит некоторое из множеств $\mathbb{V}(a_\alpha)$. Но это очевидно, поскольку существует наименьшее трансфинитное число $\beta \in [0; \alpha)$, такое, что $r = ta_\beta$. Тогда понятно, что $\mathbb{V}(a_\beta) \subseteq \mathbb{V}(r)$. Доказательство закончено.

Следствие 16. Каждый Δ -фильтр решетки $L\mathfrak{C}(A)$ обладает базисом, все элементы которого являются подмножествами одного и того же главного замкнутого множества.

1. Джекобсон Н. Теория колец, – М.: ГИИЗ, 1947. 287с.
2. Койфман Л.А. *Кольца, над которыми каждый модуль имеет максимальный подмодуль* // Мат. заметки, 1970. 7. №3, С.359–367.
3. Комарницкий Н.Я. *О решетке правых идеалов ультрапроизведения правых V -областей Безу* // Международная алгебраическая конференция памяти А.И. Ширшова, Барнаул, 1991, Тезисы докладов, С.54.
4. Комарницкий Н.Я. *Описание максимальных левых идеалов в ультрапроизведениях счетных семейств V -областей главных идеалов и проблема Коззенса-Фейса* // препринт, 1996, 81с.
5. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Мир, 1970. 392с.
6. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т.1. – М.: Мир, 1978. 688с.
7. Alling N.L. *Global ideal theory of meromorphic function fields* // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. 256. №2. P.241–266.
8. Bell J.L., Slomson A.B. Models and ultraproducts, an introduction, – Amsterdam: North-Holland, 1969. 319p.
9. Cherlin G. Model theoretic algebra. (Lecture Notes Math. 1976. №521) 234p.
10. Cherlin G.L. *Ideals of integers in nonstandard number fields* // Model Theory and Algebra, eds D. Saracino and Weisspfenning V. (Springer Lecture Notes, 1975. 498. Berlin) P.60–90.
11. Cohn P.M. *Bezout rings and their subrings* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1968. 64. №2. P.251–264.
12. Cohn P.M. *Right principal Bezout domains* // J. London Math. Soc. 1987. 35. №2. P.251–262.
13. Cozzens J. *Homological properties of the ring of differential polynomials* // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. 76. №1. P.75–79.
14. Cozzens J., Faith C. Simple Noetherian rings, – Cambridge, 1975. 135p.
15. Fuchs P., Pilz G. *Ultraproducts and ultra-limits of near-rings* // Mh. Math. 1985. 100. №1. P.105–112.
16. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions, – 1960.
17. Jensen Ch.U., Lenzing H. Model theoretic algebra: with particular emphasis on fields, rings, modules, – Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1989. 443p.
18. Kochen S. *Ultraproducts in the theory of models* // Ann. Math., ser. 2, 1961. 74. P.221–261.
19. Los J. *Quelques remarques, théorems and problemes sur les classes definissables d'algebres* // Mathematical interpretation of formal systems, Amsterdam, North-Holland, 1955. P.98–113.
20. Michler G.O., Villamayor O.E. *On rings whose simple modules are injective* // J. Algebra, 1973. 25. №1. P.185–201.
21. Ming R.Y.C. *On V -rings and prime rings* // J. Algebra, 1980. 62. №1. P.13–20.
22. Prest M. *Model theory and modules* // London Math. Soc. Lec. Notes, ser. №130, London, – 1988. 380. P.81.
23. Robinson A. *A note on embedding problems* // Fundam. math. 1962. 50. P.455–461.
24. Robinson A. *Elementary Embedding of Fields of Power Series* // J. Number Theory, 1970. 2. №2. P.237–247.
25. Rush D.E. *Rings which resemble rings of entire functions* // Glasgow Math. J. 1983. 24. №1. P.7–16.
26. Taha F. *Algebres simples centrales sur les corps ultraproduit de corps p -adiques* // Lect. Notes Math. 1982. №924. P.89–128.
27. Zayed M. *Ultraproduits et modules sans facteurs directs de type fini* // Lect. Notes Math. 1986. №1296. P.312–324.