Математичні студії
випуск 5

УДК 519.21

ПЕРЕХІДНІ ЯВИЩА В МАТРИЧНОЗНАЧНИХ ЕВОЛЮЦІЯХ

Я.І. Єлейко

Abstract. Yeleiko Ya.I. *Transition events for matrixvalued random evolution* // Matematychni Studii, **5** (1995) P.117–122.

The transition events for one class of families of matrixvalued random evolution are investigated.

Нехай $x(t)$ – регенеруючий процес [1] з моментами регенераціїї $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \tau$, $\tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ – заданий на ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Розглянемо сімейство невід'ємних матричнозначних процесів $\xi_\varepsilon(t)$; $0 \le t \le \tau$ розмірності $m \times m$, які функціонально залежать від малого параметра ε, але статистично не залежать від регенеруючого процесу $\xi_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$.

Побудуємо матричнозначну еволюцію вигляду

$$N_\varepsilon(t) = \begin{cases} \xi_\varepsilon^{(1)}(t); & 0 \le t \le \tau_1 \\ \xi_\varepsilon^{(1)}(\tau_1) \cdot \xi_\varepsilon^{(2)}(t - \tau_1); & \tau_1 < t \le \tau_2 \\ \dots \\ \xi_\varepsilon^{(\tau_1)}(\tau_1) \cdot \xi_\varepsilon^{(2)}(\tau_2 - \tau_1) \dots \xi_\varepsilon^{(k)}(t - \tau_{k-1}); & \tau_{k-1} < t \le \tau_k \\ \dots, \end{cases}$$

де $\xi_\varepsilon^{(n)}(t)$ – послідовність незалежних копій процесу $\xi_\varepsilon(t)$, $0 \le t \le \tau$; $n = 1, 2, \dots$. Будемо вважати, що $M\tau < \infty$. Знайдемо асимптотику $MN_\varepsilon(t)$ при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Позначимо

$$G_\varepsilon(t) = M(\xi_\varepsilon(t), \tau > t),$$
$$\overline{K}_\varepsilon(du) = M(\xi_\varepsilon(\tau), \tau \in du).$$

$\overline{K}_\varepsilon(du)$ є матричнозначною мірою, елементами якоїї є міри на $\mathbb{R}^1$.

Вважатимемо надалі завжди, що матриця $G_\varepsilon(t)$ є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом [2] поелементно. Крім цього припустимо, що сімейство матричнозначних мір $\overline{K}_\varepsilon(du)$ слабо збігається до матричнозначної міри $k(du)$, тобто

$$\int_0^\infty g(u)\overline{K}_\varepsilon(dy) \longrightarrow \int_0^\infty g(y)K(dy), \quad \varepsilon \to 0,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60F99.

для будь-якоїї неперервноїї обмеженоїї функціїї $g(y)$, причому матриця

$$K = K[0, \infty)$$

нерозкладна і її перронів корінь рівний 1. Це дозволяє також, не зменшуючи загальності, вважати, що матриці $\overline{K}_\varepsilon = \overline{K}_\varepsilon[0, \infty)$ є також нерозкладними.

Нехай $\lambda_e ps$ – перронів корінь матриці $\overline{K}_\varepsilon$.

$$\overline{K}_\varepsilon \overline{u}_\varepsilon = \lambda_e ps \overline{u}_\varepsilon; \quad \overline{v}_\varepsilon K_\varepsilon = \lambda_e ps \overline{v}_\varepsilon;$$
$$\overline{u}_\varepsilon = (u_\varepsilon^{(1)}, \ldots, u_\varepsilon^{(m)});$$
$$\overline{v}_\varepsilon = (v_\varepsilon^{(1)}, \ldots, v_\varepsilon^{(m)}) \text{ –}$$

правий і лівий власні вектори матриці $\overline{K}_\varepsilon$. Згідно припущень $\lambda_e ps \to 1$, $\overline{u}_\varepsilon \to \overline{u}$, $\overline{v}_\varepsilon \to \overline{b}$, при $\varepsilon \to 0$, де $K\overline{u} = \overline{u}$; $\overline{v}K = \overline{v}$; $(\overline{u}, \overline{v}) = 1$; $(\overline{v}_\varepsilon, \overline{u}) = 1$. Покладемо

$$a = (\overline{v}, \int\limits_0^\infty y K(dy) \overline{u}),$$

$\overline{x} \otimes \overline{y}$ є матриця $||x_i y_i||_{i,j=1}^m$; (0) – нульова матриця; I – одинична матриця; $\overline{0}$ – нульовий вектор $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$.

Має місце теорема

Теорема 1. *Нехай послідовність матриць $G_\varepsilon(t)$ є рівномірно безпосередньо інтегрованою за Ріманом на $[0, \infty)$. Тоді якщо*

$$\lim_{t \to \infty} \sup_\varepsilon \int\limits_t^\infty y \overline{K}_\varepsilon(dy) = (0) \tag{1}$$

і матриця $K(dy)$ нерешітчата, то

$$\lim_{t \to \infty} (MN_\varepsilon(\frac{t}{\lambda_e ps - 1}) - \frac{1}{a} e^{\frac{t}{a}} \overline{u} \otimes \overline{v} \int\limits_0^\infty G_\varepsilon(y) dy) = (0).$$

Доведення. За формулою повноїї ймовірності за моментом τ

$$MN_\varepsilon(t) = M(\xi_\varepsilon(t), \tau > t) + \int\limits_0^t \overline{K}_\varepsilon(du) MN_\varepsilon(t - u). \tag{2}$$

Розв'язок рівняння відновлення (2) представимо у вигляді

$$MN_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t d(H_\varepsilon(u)) G_\varepsilon(t - u), \tag{3}$$

де

$$H_\varepsilon(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \overline{K}_\varepsilon^{\star r}[0,x); \quad x \geq 0,$$
$$\overline{K}_\varepsilon^{\star 0}[0,x) = I;$$
$$\overline{K}_\varepsilon^{\star(r+1)}[0,x) = \int_0^x \overline{K}_\varepsilon(dy)\overline{K}_\varepsilon^{\star r}[0,x-y).$$

Знаходження асимптотики (3) за схемою є аналогічним в ідейному плані до доведення теореми 2 із [2]. Таким чином проробивши всі викладки, в кінцевому отримаємо, що

$$\int_0^t dH_\varepsilon(u)G_\varepsilon(t-u) - \frac{1}{a}e^{\frac{c}{a}}\overline{u}\otimes\overline{v}\int_0^\infty G_\varepsilon(u)du \to (0); \tag{4}$$

$$t\to\infty;\ \varepsilon\to 0;\ t(\lambda_e ps - 1)\to c.$$

З останньої рівності вже просто випливає доведення теореми.

Важливою проблемою є асимптотичне представлення $\lambda_e ps - 1$.

Нехай задана шкала функцій $\delta_1(\varepsilon),\ldots,\delta_n(\varepsilon)$, де $\delta_i(\varepsilon) = o(\delta_{i-1}(\varepsilon))$; $i = 2,\ldots,n$, $\delta_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ і

$$\overline{K}_\varepsilon = K + \sum_{i=1}^n \delta_i(\varepsilon)B_i, \tag{5}$$

де B_i – обмежені матриці.

Через V позначимо узагальнену обернену матрицю до матриці $K - I$ [3], тобто $(K-I)V = V(K-I) = \Pi - I$, де $\Pi = \overline{u}\otimes\overline{v}$, при цьому $\overline{v}V = \overline{o}$, $V\overline{u} = \overline{0}$.

$$b_i = (\overline{v}, B_i\overline{u}); \quad i = 1,\ldots,n,$$
$$b_i^\varepsilon = (\overline{v}_\varepsilon, B_i\overline{u}); \quad i = 1,\ldots,n,$$
$$c_1 = (\overline{v}, B_1VB_1\overline{u}).$$

Теорема 2. *Нехай* $b_j = 0,\ j = 1,\ldots,l-1;\ b_l \neq 0;\ l\leq n;\ c_1\neq 0$ *тоді*
1) $\lambda_e ps - 1 \sim b_l\delta_l(\varepsilon)$, *якщо* $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_l(\varepsilon))$;
2) $\lambda_e ps - 1 \sim (\alpha c_1 + b_l)\delta_l(\varepsilon)$, *якщо* $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_l(\varepsilon)$;
3) $\lambda_e ps - 1 \sim c_1\delta_1^2(\varepsilon)$, *якщо* $\delta_l(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$.

Доведення. Маємо $\lambda_e ps(\overline{v}_\varepsilon,\overline{u}) = (\overline{v}_\varepsilon\overline{K}_\varepsilon,\overline{u}) = (\overline{v}_\varepsilon\overline{K}_\varepsilon - K),\overline{u}) + (\overline{v}_\varepsilon, K\overline{u}) = (\overline{v}_\varepsilon,(\overline{K}_\varepsilon - K)\overline{u}) + (\overline{v}_\varepsilon,\overline{u})$. Звідси

$$\lambda_e ps - 1 = \sum_{i=1}^n \delta_i(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon, B_i\overline{u}). \tag{6}$$

Якщо $b_1\neq 0$, тоді

$$\lambda_e ps - 1 \sim \delta_1(\varepsilon)b_1^\varepsilon + o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{7}$$

Справді, в такому разі

$$\frac{\lambda_e ps-1}{\delta_1(\varepsilon)}=b_1^\varepsilon+o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{8}$$

Спрямувавши в (8) $\varepsilon\to 0$, отримаємо відразу (7). Нехай $b_1=0$, тоді ясно, що $\lambda_e ps-1=o(\delta_1(\varepsilon))$. Перший доданок в (6) замінимо на $\delta_1(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon-\overline{v},B_1\overline{u})$. В результаті отримаємо

$$\lambda_e ps-1=\delta_1(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon-\overline{v},B_1\overline{u})+\delta_2(\varepsilon)b_2^\varepsilon+\cdots+\delta_n(\varepsilon)b_n^\varepsilon. \tag{9}$$

Розглянемо співвідношення

$$\lambda_e ps\overline{v}_\varepsilon=\overline{v}_\varepsilon K+\sum_{i=1}^n\delta_i(\varepsilon)\overline{v}_\varepsilon B_i.$$

Звідси

$$(\lambda_e ps-1)\overline{v}_\varepsilon=\overline{v}_\varepsilon(K-I)+\sum_{i=1}^n\delta_i(\varepsilon)\overline{v}_\varepsilon B_i.$$

Оскільки $\overline{v}(K-I)=\overline{0}$, останню рівність можемо записати, як

$$(\lambda_e ps-1)\overline{v}_\varepsilon V=(\overline{v}_\varepsilon-\overline{v})(\Pi-I)+\sum_{i=1}^n\delta_i(\varepsilon)\overline{v}_\varepsilon B_i V. \tag{10}$$

Звідси

$$\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}=-(\lambda_e ps-1)\overline{v}_\varepsilon V+\sum_{i=1}^n\delta_i(\varepsilon)\overline{v}_\varepsilon B_i V, \tag{11}$$

або що також справедливо

$$\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}=-(\lambda_e ps-1)\overline{v}_\varepsilon V+\delta_1(\varepsilon)\overline{v}_\varepsilon B_1 V+o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{12}$$

Звідси при $\varepsilon\to 0$ отримаємо $\dfrac{\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}}{\delta_1(\varepsilon)}\longrightarrow\overline{v}B_1V$. Таким чином

$$\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}=\delta_1(\varepsilon)\overline{v}B_1V+o(\delta_1(\varepsilon)). \tag{13}$$

Підставивши (13) в (9), отримаємо

$$\lambda_e ps-1=\delta_1^2(\varepsilon)(\overline{v},B_1VB_1\overline{u})+o(\delta_1^2(\varepsilon))+\sum_{i=2}^n\delta_i(\varepsilon)b_i(\varepsilon). \tag{14}$$

Нехай l – перший такий номер i, для якого $b_i\neq 0$. Рівність (14) прийме вигляд

$$\lambda_e ps-1=\delta_1^2(\varepsilon)(\overline{v},B_1VB_1\overline{u})+o(\delta_1^2(\varepsilon))+\sum_{i=2}^{l-1}\delta_i(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon-\overline{v},B_i\overline{u})+\delta_l(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon,B_l\overline{u})+o(\delta_l(\varepsilon)).$$

Звідси, використовуючи (13), отримаємо

$$\lambda_e ps-1=\delta_1^2(\varepsilon)(\overline{v},B_1VB_1\overline{u})+o(\delta_1^2(\varepsilon))+\sum_{i=2}^{l-1}\delta_i(\varepsilon)\delta_1(\varepsilon)(\overline{v},B_1VB_i\overline{u})+$$
$$o(\delta_1^2(\varepsilon))+\delta_l(\varepsilon)(\overline{v},B_l\overline{u})+o(\delta_l(\varepsilon)).$$

Таким чином, якщо $c_1 = (\overline{v}, B_1 V B_1 \overline{u}) \neq 0$,

$$\lambda_e ps - 1 = c_1 \delta_1^2(\varepsilon) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + b_l \delta_l(\varepsilon) + o(\delta_l(\varepsilon)). \tag{15}$$

Нехай
1) $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_l(\varepsilon))$, тоді (14) набуде вигляду

$$\lambda_e ps - 1 = \delta_l(\varepsilon) b_l + o(\delta_l(\varepsilon)).$$

Звідси при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\lambda_e ps - 1}{\delta_l(\varepsilon)} \to b_l,$$

або ж $\lambda_e ps - 1 \sim \delta_l(\varepsilon) b_l$.
2) $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha \delta_l(\varepsilon)$. Тоді (14) набуде вигляду

$$\lambda_e ps - 1 = \alpha \delta_l(\varepsilon) c_1 + \delta_l(\varepsilon) b_l + o(\delta_l(\varepsilon)).$$

Звідси

$$\frac{\lambda_e ps - 1}{\delta_l(\varepsilon)} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \alpha c_1 + b_l.$$

Отже,

$$\lambda_e ps - 1 \sim (\alpha c_1 + b_l) \delta_l(\varepsilon).$$

3) $\delta_l(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$. В даному випадку із (14) випливає, що

$$\lambda_e ps - 1 \sim o(\delta_1^2(\varepsilon)) c_1.$$

Тепер нехай в умові теореми 2 $c_1 = 0$.

В даному випадку має місце

Теорема 3. *Нехай* $(\overline{v}, B_j \overline{u}) = 0$; $j = 1, \ldots, l-1$; $l \leq n$; $(\overline{v}, B_l \overline{u}) \neq 0$; $(\overline{v}, B_1 V B_1 \overline{u}) = 0$; $(\overline{v}, B_1 V (B_1)^2 \overline{u}) \neq 0$ *і* $(\overline{v}, B_1 V B_l \overline{u}) + (\overline{v}, B_2 V B_1 \overline{u}) \neq 0$. *Тоді*

$$\lambda_e ps - 1 \sim \delta_l(\varepsilon) [m_1 (\overline{v}, B_1 (V B_1)^2 \overline{u}) + m_2 (\overline{v}, B_1 V B_2 \overline{u}) + m_2 (\overline{v}, B_2 V B_1 \overline{u}) + (\overline{v}, B_l \overline{u})]$$

при $\delta_1^2(\varepsilon) \sim m_1 \delta_l(\varepsilon)$; $m_2 \delta_l(\varepsilon) \sim \delta_1(\varepsilon) \delta_2(\varepsilon)$.

Доведення. Із співвідношення (9) маємо

$$\lambda_e ps - 1 = \delta_1(\varepsilon) (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}, B_1 \overline{u}) + \sum_{i=2}^{l} \delta_i(\varepsilon) b_i^\varepsilon + o(\delta_l(\varepsilon)). \tag{16}$$

Слідуючи (11), для $\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}$ отримаємо

$$\overline{v}_\varepsilon - \overline{v} = -(\lambda_e ps - 1) \overline{v}_\varepsilon V + \delta_1(\varepsilon) B_1 V + \delta_2(\varepsilon) \overline{v}_\varepsilon B_2 V + o(\delta_2(\varepsilon)). \tag{17}$$

Розглянемо в (16) перший доданок. Оскільки $\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v}$ при $\varepsilon \to 0$, а $\overline{v} V = \overline{0}$, тоді

$$-(\lambda_e ps - 1) \overline{v}_\varepsilon V = o(\lambda_e ps - 1) \tag{18}$$

Послідовно перетворюючи співвідношення (16), з врахуванням (17), (18) отримаємо

$$\lambda_e ps-1+o(\lambda_e ps-1)=\delta_1^2(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon, B_1VB_1\overline{u})+o(\delta_1^2(\varepsilon))+\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\,[(\overline{v}_\varepsilon, B_1VB_2\overline{u})+ (\overline{v}_\varepsilon, B_2VB_1\overline{u})\ ]+o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon))+\delta_l(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon, B_l\overline{u})+o(\delta_l(\varepsilon)).$$

В першому доданку замінимо $\overline{v}_\varepsilon$ на $\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}$ і, проводячи підстановку (12) і враховуючи (13), отримаємо

$$\lambda_e ps-1+o(\lambda_e ps-1)=\delta_1^2(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon, B_1(VB_1)^2\overline{u})+0(\delta_1^2(\varepsilon))+\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\,[(\overline{v}_\varepsilon, B_1VB_2\overline{u})+ (\overline{v}_\varepsilon, B_2VB_1\overline{u})\ ]+o(\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon))+\delta_l(\varepsilon)(\overline{v}_\varepsilon, B_l\overline{u})+o(\delta_l(\varepsilon)).$$

Оскільки $(\overline{v}, B_1(VB_1)^2\overline{u})\neq 0$ і $(\overline{v}, B_1VB_2\overline{u})+(\overline{v}, B_2VB_1\overline{u})\neq 0$, тоді асиптотика перронового кореня $\lambda_e ps-1$ залежить від співвідношень між $\delta_1^2(\varepsilon)$; $\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)$; $\delta_l(\varepsilon)$.

Нехай $\delta_1^2(\varepsilon)\sim_1 \delta_l(\varepsilon)$ і $m_2\delta_l(\varepsilon)\sim\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)$, тоді

$$\lambda_e ps-1\sim\delta_l(\varepsilon)[m_1(\overline{v}, B_1(VB_2)^2\overline{u})+m_2(\overline{v}, B_1VB_2\overline{u})+m_2(\overline{v}, B_2VB_1\overline{u})+(\overline{v}, B_l\overline{u})].$$

Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шуренков В.М. Эргодические процесы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336с.
2. Шуренков В.М. *Переходные явления теории востановления* // Математический сборник. 1970. Т.112. No 1. С.115–132.
3. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – Киев:Наук. думка, 1976. – 184с.

Львівський університет, механіко-математичний факультет,

Університетська 1, Львів 290602

Надійшло 02.11.1993