Математичні студії
випуск 5

УДК 515.12

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, II: БАРИЦЕНТРЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАДОНОВСКИХ МЕР И МЕТРИЗАЦИЯ ФУНКТОРОВ $\mathcal{P}_\tau$ И $\hat{P}$.

Т.О. Банах

Abstract. T. Banakh, *Topology of probability measure spaces, II: barycenters of probability Radon measures and metrization of the functors P_τ and $\hat{P}$* // Matematychni Studii. **5** (1995) P.88–106.

This paper is a direct continuation of the author's work [1] devoted to investigation of the functors P_τ and $\hat{P}$ of spaces of probability τ-smooth and Radon measures. In this part, for spaces of probability Radon measures, the barycenter map is studied. This will imply that the functor $\hat{P}$ is a monad in the category of metrizable spaces. Also we show that the functors $\hat{P}$ and P_τ admit liftings onto the category $\mathcal{BM}etr$ of bounded metric spaces as well as onto the category $Unif$ of uniform spaces, and investigate properties of those liftings.

Данная работа является прямым продолжением статьи [1], в которой определены функторы P_τ и $\hat{P}$ пространств вероятностных τ-гладких и вероятностных радоновских мер. Нумерация параграфов и утверждений продолжает нумерацию с [1].

В данной части, для пространств вероятностных радоновских мер, изучается отображение барицентра, откуда выводится монадичность функтора $\hat{P}$ на категории метризуемых пространств.

Другой круг вопросов, затрагиваемых в данной статье, касается метризации функторов P_τ и $\hat{P}$. В этом направлении мы докажем, что функторы P_τ и $\hat{P}$ поднимаются на категорию $\mathcal{BM}etr$ ограниченных метрических пространств, а также на категорию $\mathcal{U}nif$ равномерных пространств, и изучим свойства этих продолжений. Отметим, что аналогичные вопросы, касающиеся метризации функтора P_β рассматривались в [2]–[6].

§3. Барицентры вероятностных радоновских мер и монадичность функтора $\hat{P}$.

Пусть E – локально выпуклое линейное пространство. Через E^{**} обозначим линейное пространство линейных непрерывных функционалов на E, снаб-

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18B30, 28A33, 28C15, 54B30, 54H05.

Дане дослідження підтримане Державним комітетом по науці і технологіях Украни

женное топологией равномерной сходимости на слабо ограниченных подмножествах пространства E. (Напомним, что подмножество $A \subset E$ называется слабо ограниченным, если на A ограничен любой функционал $f \in E^*$). Подмножество $\mathcal{K} \subset E^*$ будем называть равностепенно непрерывным, если существует такая окрестность нуля $U \subset E$, что для любых $x \in U$ и $f \in \mathcal{K}$ $|f(x)| < 1$. Через E^{**} обозначается пространство линейных непрерывных функционалов на E^*, снабженное естественной топологией, т.е. топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных подмножествах E^*. Известно [7, с.182], что каноническое отображение $E \to E^{**}$ является вложением по отношению к естественной топологии на E^{**}, поэтому далее мы рассматриваем пространство E как подмножество в E^{**}.

Теперь пусть X – слабо ограниченное подмножество локально-выпуклого пространства E. Тогда для любой меры $\mu \in \hat{P}(X)$ формула $b_X(\mu)(f) = \mu(f|X)$, $f \in E^*$, определяет линейный функционал $b_X(\mu)$ на E^*, называемый барицентром меры μ. Более того, функционал $b_X(\mu)$ непрерывен, поскольку множество X – слабо ограничено, а на E^* рассматривается топология равномерной сходимости на слабо ограниченных множествах. Таким образом, мы определили отображение барицентра $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$.

Отображение $f : C \to C'$ выпуклых множеств называется афинным, если $f(t\,x + (1-t)y) = t\,f(x) + (1-t)f(y)$ для любых $x, y \in C$ и $t \in [0, 1]$. Непосредственно доказывается

3.1. Лемма. *$b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – афинное отображение, причем $b_X(\delta_x) = x$ для любого $x \in X$ (здесь δ_x – мера Дирака, сосредоточенная в точке x).*

3.2. Теорема. *Отображение $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – непрерывно тогда и только тогда, когда множество X – ограничено.*

Доказательство. Предположим сначала, что отображение $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – непрерывно. Зафиксируем $x \in X$. Чтобы доказать, что множество X – ограничено, достаточно показать, что для любого открытого множества $U \ni 0$ в E^{**} существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $X \subset n \cdot U + x$. Итак, пусть $U \ni 0$ – открытая окрестность нуля в E^{**}. Поскольку отображение $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – непрерывно, то множество $b_X^{-1}(U + x)$ – открыто в $\hat{P}(X)$. Тогда существует такое $*$-слабо открытое множество W в пространстве $C_b^*(X) \supset \hat{P}(X)$, что $W \cap \hat{P}(X) = b_X^{-1}(U + x)$. Поскольку подмножество $\hat{P}(X) \subset C_b^*(X)$ – ограничено, то существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n}\hat{P}(X) + \frac{n-1}{n}\delta_x \in W$. Поскольку множество $\hat{P}(X)$ – выпукло, то $\frac{1}{n}\hat{P}(X) + \frac{n-1}{n}\delta_x \in W \cap \hat{P}(X) = b_X^{-1}(U + x)$. Тогда для любого $y \in X$, $\frac{1}{n}\delta_y + \frac{n-1}{n}\delta_x \in W \cap \hat{P}(X) = b_X^{-1}(U + x)$. По лемме 3.1, $b_X(\frac{1}{n}\delta_y + \frac{n-1}{n}\delta_x) = \frac{1}{n}y + \frac{n-1}{n}x \in U + x$. Отсюда получаем, что $\frac{1}{n}y \in U + \frac{1}{n}x$ и $y \in nU + x$. Следовательно, $X \subset n\,U + x$, то есть множество X – ограничено.

Теперь докажем, что если X – ограниченное подмножество E, то отображение $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – непрерывно.

Зафиксируем меру $\mu_0 \in \hat{P}(X)$ и окрестность её барицентра $U(b_X(\mu_0)) = \{F \in E^{**} : |(F - b_X(\mu_0))(f)| < 1$ для всех f из некоторого равностепенно непрерывного множества $\mathcal{K} \subset E^*\} \subset E^{**}$. Поскольку множество X – ограниченное и $\mathcal{K}$ – равностепенно непрерывное семейство в E^*, то существует такая константа $C \geq 1$, что $|f(x)| < C$ для любых $x \in X$ и $f \in \mathcal{K}$.

Теперь вспомним, что мера μ_0 на X – радоновская. Следовательно, существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu_0(K) > 1 - \dfrac{1}{12\,C}$. Поскольку семейство $\mathcal{K}$ – равностепенно непрерывно, то существует такая окрестность нуля $U \subset E$, что $|f(x)| < \frac{1}{24}$ для любых $f \in \mathcal{K}$ и $x \in U$. Положим $V = (U + K) \cap X$.

По теореме Асколи [8, 3.4.20], семейство отображений $\{f|K : K \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{K}\} \subset C(K)$ предкомпактно в топологии равномерной сходимости. Следовательно, существует такое конечное подмножество $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$, что для любого функционала $f \in \mathcal{K}$ существует такой функционал $g \in \mathcal{I}$, что $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{12}$ для любого $x \in K$. Более того, $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{6}$ для любого $x \in V$.

По лемме [1, 1.19], множество $\{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(V) > 1 - \dfrac{1}{12\,C}\}$ является открытой окрестностью меры μ_0. Тогда множество $W = \{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(V) > 1 - \dfrac{1}{12\,C},\ |\mu(g|X) - \mu_0(g|X)| < \dfrac{1}{12},\ g \in \mathcal{I}\}$ также является открытой окрестностью меры μ_0 в $\hat{P}(X)$. Мы утверждаем, что $b_X(W) \subset U(b_X(\mu_0)) = \{F \in E^{**} : |(F - b_X(\mu_0))(f)| < 1,\ f \in \mathcal{K}\}$. Действительно, пусть $\mu \in W$. Тогда для любого $f \in \mathcal{K}$ существует такой функционал $g \in \mathcal{I}$, что $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{12}$ для всех $x \in K$. Тогда $|(b_X(\mu) - b_X(\mu_0))(f)| = |\mu(f|X) - \mu_0(f|X)| \le |\mu(f|X) - \mu(g|X)| + |\mu(g|X) - \mu_0(g|X)| + |\mu_0(g|X) - \mu_0(f|X)| \le \int_V |f - g| d\mu + \int_{X\setminus V} |f - g| d\mu + \frac{1}{12} + \int_K |f - g| d\mu_0 + \int_{X\setminus K} |f - g| d\mu_0 \le \frac{1}{6} + \frac{2C}{12\,C} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2C}{12\,C} < 1$. Таким образом, $b_X(\mu) \in U(b_X(\mu_0))$. То есть, отображение $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – непрерывно. Теорема доказана.

3.3. Замечание. Если E – замкнутое подмножество в E^{**} (в частности, когда E – бэровское пространство), тогда для любого ограниченного множества $X \subset E$ $b_X(\hat{P}(X)) \subset E$. Это следует из леммы 3.1 и теоремы 3.2.

3.4. Теорема. *Для ограниченного выпуклого множества X локально-выпуклого пространства E $b_X(\hat{P}(X)) \subset X$ тогда и только тогда, когда множество X удовлетворяет следующим двум условиям:*

(П) *для любых последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ с $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ сходится к точке из X;*

(К) *для всякого компакта $K \subset X$ его замкнутая выпуклая оболочка $\mathrm{cl}_X(\mathrm{conv}(K)) \subset X$ компактна.*

Мы предварим доказательство теоремы 3.4 несколькими замечаниями.

3.5. Замечание. Если подмножество X локально выпуклого пространства удовлетворяет условию (П), то оно выпукло и ограниченно. Действительно, выпуклость очевидна. Предположим, что множество X не ограничено. Тогда существует такая окрестность нуля $U \subset E$, что $X \not\subset n \cdot U$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку пространство E – локально выпукло, без ограничения общности, U – открытая выпуклая симметрическая окрестность нуля. Пусть $\|\cdot\|_U : E \to \mathbb{R}$ ($\|x\|_U = \inf\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in U\},\ x \in E$) – функционал Минковского, порожденный множеством U. Поскольку выпуклое множество X неограничено по норме $\|\cdot\|_U$, существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, что $\|x_n\|_U = 4^n,\ n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$ – расходится. Из полученного противоречия следует, что множество X – ограничено.

3.6. Замечание. Условия (П) и (К) являются независимыми. В самом деле, согласно теореме Крейна [7, IV.11.5], любое банахово пространство E удовлетворяет условию (К). В то же время, пространство $X = E$, являясь неограниченным подмножеством в E, не может удовлетворять условию (П).

С другой стороны, рассмотрим выпуклое множество $X = \{\mu \in P([0,1]) \mid \mu(C) = 1$ для некоторого счетного множества $C \subset [0,1]\} \subset P([0,1])$. Очевидно, что множество X удовлетворяет условию (П). С другой стороны, замкнутая выпуклая оболочка $\mathrm{cl}_X(\mathrm{conv}(\delta([0,1])))$ компакта $\delta([0,1]) \subset X$ совпадает с X и, очевидно, не является компактом.

Доказательство теоремы 3.4. Предположим сперва, что $b_X(\hat{P}(X)) \subset X$. Если $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ и $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,1]$, $\sum_{n=1}^\infty t_n = 1$, то $\sum_{n=1}^\infty t_n \delta_{x_n} \in \hat{P}(X)$ – радоновская мера на X. Поскольку $b_X : \hat{P}(X) \to X$ – аффинное непрерывное отображение, то ряд $\sum_{n=1}^\infty t_n x_n$ сходится к точке $b_X(\sum_{n=1}^\infty t_n \delta_{x_n}) \in X$.

Если $K \subset X$ – компакт, то $P(K) \subset \hat{P}(X)$ – также компакт [9, VII.3.5]. Поскольку отображение $b_X : \hat{P}(X) \to X$ – непрерывно, то $b_X(P(K))$ – компакт в X. Теперь отметим, что $b_X(P(K)) = \mathrm{cl}_X(\mathrm{conv}(K))$. Таким образом, множество X удовлетворяет свойствам (П), (К). Необходимость доказана.

Теперь предположим, что выпуклое множество $X \subset E$ удовлетворяет свойствам (П) и (К). Пусть $\mu \in \hat{P}(X)$ – радоновская мера на X. Если носитель $\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in X \mid$ каждая окрестность $U \ni x$ имеет ненулевую μ-меру$\}$ меры μ компактен, то, согласно свойству (К), $\mathrm{cl}_X(\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(\mu)))$ – компакт в X. В этом случае, $b_X(\mu) \in \mathrm{cl}_X(\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(\mu))) \subset X$. Если носитель меры μ не компактен, тогда существует такая последовательность компактов $\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset X$, что $0 = \mu(K_0) < \mu(K_1) < \cdots < \mu(K_n) < \cdots < 1$ и $\mu(K_n) > 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_n = \mu(K_n \setminus K_{n-1})$ и $\mu_n \in P(K_n) \subset \hat{P}(X)$ – мера, определяемая формулой $\mu_n(A) = \mu((K_n \setminus K_{n-1}) \cap A)/\varepsilon_n$, где A – борелевское подмножество X. Легко видеть, что $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n = 1$ и $\mu = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n \mu_n$. Поскольку отображение $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – аффинно и непрерывно, то $b_X(\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n \mu_n) = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n b_X(\mu_n) \in E^{**}$. По условию (К), $b_X(\mu_n) \in X$, $n \in \mathbb{N}$, а по условию (П), $b_X(\mu) = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n b_X(\mu_n) \in X$. Теорема доказана.

Множества, обладающие одновременно свойствами (П) и (К) будут называться *барицентрическими.*

Напомним, что отображение $f : A \to B$ топологических пространств называется факторным, если множество $U \subset B$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $f^{-1}(U) \subset A$.

3.7. Предложение. *Для любого барицентрического множества X в локально выпуклом пространстве, отображение $b_X : \hat{P}(X) \to X$ сюръективно и факторно.*

Доказательство следует из теоремы 3.4 и того факта, что преобразование Дирака $\delta : X \to \hat{P}(X)$ является вложением, для которого $b_X \circ \delta = \mathrm{id}\,|X$.

Элементарно доказываются следующие

3.5. Предложение. *Пусть X – выпуклое подмножество локально выпуклого пространства и $Y \subset X$ – его замкнутое выпуклое подмножество. Если X обладает свойством (П) (свойством (К)), то и Y обладает этим свойством.*

3.6. Предложение. *Пусть X_i, $i \in \mathcal{I}$, – выпуклые подмножества в локально выпуклых пространствах E_i, $i \in \mathcal{I}$, соответственно. Если все X_i, $i \in \mathcal{I}$, обладают свойством (П) (свойством (К)), то и их произведение $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \subset \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i$ обладает этим свойством.*

3.7. Предложение. *Пусть X_i, $i \in \mathcal{I}$, – выпуклые подмножества в локально выпуклом прострастве E. Если все X_i, $i \in \mathcal{I}$, обладают свойством (П) (свойством (К)), то и их пересечение $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i$ обладает этим свойством.*

3.8. Предложение. *Предположим, что выпуклое ограниченное подмножество X локально-выпуклого пространства обладает свойством (П). Если X является счетным объединением своих выпуклых борелевских подмножеств, обладающих свойством (К), тогда множество X – барицентрично.*

Доказательство. Мы будем применять теорему 3.4. Итак, пусть $\mu \in \hat{P}(X)$ – радоновская мера на $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \subset X$ – выпуклые борелевские подмножества в X, обладающие свойством (К). Поскольку мера μ – радоновская, для каждых $n, m \in \mathbb{N}$ существует такой компакт $K_n^m \subset X_n \setminus (\bigcup_{i<n} X_i)$, что $\mu(K_n^m) \geq (1 - 2^{-m})\mu(X_n \setminus (\bigcup_{i<n} X_i))$. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_n^m = \mu(K_n^m \setminus K_n^{m-1})$ (мы полагаем $K_n^0 = \emptyset$) и, если $\varepsilon_n^m > 0$, то определим меру $\mu_n^m \in \hat{P}(X)$ следующей формулой: $\mu_n^m(A) = \mu((K_n^m \setminus K_n^{m-1}) \cap A)$, где A – борелевское подмножество X. Легко видеть, что $\sum_{n,m=1}^{\infty} \varepsilon_n^m = 1$ и $\sum_{n,m=1}^{\infty} \varepsilon_n^m \mu_n^m = \mu$. Поскольку носитель каждой меры μ_n^m содержится в компакте $K_n^m \subset X_n$, то $b_X(\mu_n^m) \in X_n$, $n, m \in \mathbb{N}$ (напомним, что множества X_n, $n \in \mathbb{N}$, обладают свойством (К)). Покажем, что $b_X(\mu) \in X$. Действительно, поскольку отображение $b_X : \hat{P}(X) \to E^{**}$ – аффинно и непрерывно, то $b_X(\mu) = b_X(\sum_{n,m=1}^{\infty} \varepsilon_n^m \mu_n^m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varepsilon_n^m b_x(\mu_n^m) \in X$. Здесь мы используем тот факт, что множество X обладает свойством (П). Таким образом, $b_X(\hat{P}(X)) \subset X$, откуда, по теореме 3.4, следует, что множество X обладает свойством (К). Предложение доказано.

3.9. Предложение. *Пусть X – выпуклое подмножество локально выпуклого пространства E, обладающее свойством (П). Тогда для любого аффинного непрерывного отображения $T : E \to E'$ в локально выпуклое пространство E', образ $T(X)$ обладает свойством (П).*

Доказательство элементарно.

3.10. Предложение. *Любое полное ограниченное выпуклое подмножество локально-выпуклого пространства барицентрично.*

Доказательство. Пусть X – полное ограниченное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства E. Без ограничения общности, $0 \in X$. Зафиксируем последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$ с $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$. Покажем, что последовательность $\{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – фундаментальна. Действительно, пусть $U \subset E$ – выпуклая симметрическая окрестность нуля в E. Поскольку множество X – ограничено, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon \cdot X \subset U$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ – такое число, что $\sum_{i=n}^{\infty} t_i < \varepsilon$. Тогда для любых $i, j > n$ $\sum_{m=1}^{i} t_m x_m - \sum_{m=1}^{j} t_m x_m \in U$, т.е. последовательность $\{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – фундаментальна. Поскольку множество X – полно, то она сходится к некоторому элементу из X. Таким образом, множество X обладает свойством (П). Свойство (К) следует из теоремы Крейна [7, IV.11.5]. Предложение доказано.

3.11. Следствие. *Любое выпуклое компактное подмножество локально выпуклого пространства барицентрично.*

3.12. Следствие. *Любое открытое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства барицентрично.*

Доказательство. Пусть U – открытое ограниченное выпуклое непустое подмножество банахова пространства E.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ и $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$, – фиксированные последовательности. Без ограничения общности, $t_1 > 0$. Обозначим через $\bar{U}$ замыкание множества U в E. Нетрудно заметить, что $t_1x_1 + (1-t_1)\bar{U} \subset U$. По предложению 3.9, полное выпуклое ограниченное множество $t_1x_1 + (1-t_1)\bar{U}$ обладает свойством (П). Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} t_nx_n$ сходится к точке из множества $t_1x_1 + (1-t_1)\bar{U} \subset U$. Таким образом, множество U обладает свойством (П). Выполнение свойства (К) вытекает из предложений 3.8 и 3.10.

Теперь мы рассмотрим некоторые конкретные примеры барицентрических множеств. Напомним, что $Q = [-1,1]^{\omega}$ – гильбертов куб, $s = (-1,1)^{\omega}$ – его псевдовнутренность, $\Sigma = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q : \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_n| < 1\}$ – его радиальная внутренность и $\sigma = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in s : x_i \neq 0$ для конечного числа индексов $i\}$. Все рассмотренные пространства предполагаются подмножествами локально выпуклого пространства $\mathbb{R}^{\omega}$. Согласно следствию 3.11, гильбертов кирпич Q – барицентричен; псевдовнутренность s барицентрична в силу предложения 3.6 и следствия 3.12. Далее, отметим, что радиальная внутренность Σ является образом открытого единичного шара $\{x \in l_\infty : \|x\| < 1\}$ банахова пространства l_∞ при действии линейного оператора $T : l_\infty \to \mathbb{R}^{\omega}$. Отсюда следует, что множество Σ обладает свойством (П) (мы применяем Следствие 3.12 и Предложение 3.9). Далее, поскольку Σ является объединением выпуклых компактов, то из предложений 3.8 и следствия 3.11 следует, что радиальная внутренность Σ является барицентрическим выпуклым множеством. Поскольку $\Sigma^{\omega} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\Sigma^n \times Q^{\omega-n})$, то из предложений 3.6 и 3.7 следует, что выпуклое множество Σ^{ω} также барицентрично. Ниже мы увидим, что существуют барицентрические выпуклые множества какой угодно борелевской сложности. В то же время, выпуклое множество σ не является барицентричным, поскольку не обладает свойством (П). По той же причине, множество $\sigma \times Q$ не барицентрично. Интересно отметить, что пространства $\sigma \times Q$ и Σ гомеоморфны.

В связи с барицентрическими выпуклыми множествами интересным представляется

3.13. Вопрос. *Для каждого ли тихоновского пространства X множество $\hat{P}(X)$ барицентрично?*

Ответа на этот вопрос мы не знаем. Мы покажем, однако, что множество $\hat{P}(X)$ барицентрично, если $\hat{P}(X) = P_\tau(X)$, либо, если X – метризуемое пространство. Но сперва уясним себе пару моментов, касающихся отображения барицентра $b_{\hat{P}(X)}$. Пусть X – тихоновское пространство. Тогда определено отображение барицентра $b_{P(\beta X)} : P^2(\beta X) \to P(\beta X)$, которое совпадает с компонентой $\psi_{\beta X}$ умножения монады $\mathbb{P} = (P, \delta, \psi)$ (см. [10]). Поскольку пространство $\hat{P}(X)$ естественно отождествляется с подпространством в $P(\beta X)$, а $\hat{P}^2(X)$

– с подпространством в $P^2(\beta X)$, то, исходя из определения, получаем, что отображение барицентра $b_{\hat P(X)} : \hat P(\hat P(X)) \to (C_b^*(X))^{**}$ является сужением отображения $b_{P(\beta X)}$. Согласно [1, 1.26], $b_{P(\beta X)}(P^2_\tau(X)) \subset P_\tau(X)$. Если $\hat P(X) = P_\tau(X)$, тогда $b_{\hat P(X)}(\hat P^2(X)) = b_{P(\beta X)}(\hat P^2(X)) \subset b_{P(\beta X)}(P^2_\tau(X)) \subset P_\tau(X) = \hat P(X)$, т.е. множество $\hat P(X)$ – барицентрично.

3.14. Предложение. *Для каждого тихоновского пространства X, множество $\hat P(X)$ обладает свойством (П).*

Доказательство. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset \hat P(X)$ и $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,1]$, $\sum_{n=1}^\infty t_n = 1$, – фиксированные последовательности. Покажем, что $\sum_{n=1}^\infty t_n\mu_n \in \hat P(X)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\sum_{n=1}^m t_n > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Для каждого $i \le m$ зафиксируем такой компакт $K_i \subset X$, что $\mu_i(K_i) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (напомним, что меры μ_i – радоновские) и положим $K = \bigcup_{n=1}^m K_n$ – компакт в X. Очевидно, что $(\sum_{n=1}^\infty t_n\mu_n)(K) = \sum_{n=1}^\infty t_n\mu_n(K) \ge \sum_{n=1}^m t_n\mu_n(K_n) > (1-\frac{\varepsilon}{2})\sum_{n=1}^m t_n > (1-\frac{\varepsilon}{2})^2 > 1-\varepsilon$. То есть, мера $\sum_{n=1}^\infty t_n\mu_n$ – радоновская. Предложение доказано.

3.15. Теорема. *Для каждого метризуемого пространства X множество $\hat P(X)$ барицентрично.*

Доказательство. Пусть X – метризуемое пространство и cX – любая его компактификация. Согласно предложения 3.14, множество $\hat P(X)$ обладает свойством (П). Покажем, что оно обладает также свойством (К). Для этого зафиксируем любой компакт $\mathcal{K} \subset \hat P(X) \subset P(cX)$. По теореме 2 [11, с.96], для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такой компакт $K_n \subset X$, что $\mu(K_n) > 1-2^{-n}$ для любой меры $\mu \in \mathcal{K}$. По лемме [1, 1.19], множество $\mathcal{K}_n = \{\mu \in P(cX) \mid \mu(K_n) \ge 1-2^{-n}\}$ – замкнуто в $P(cX)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\tilde{\mathcal{K}} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{K}_n$ – выпуклый компакт в $P(cX)$. Более того, $\tilde{\mathcal{K}} \subset \hat P(X)$. Очевидно, что $\mathrm{cl}_{\hat P(X)}(\mathrm{conv}(\mathcal{K})) = \mathrm{cl}_{\tilde{\mathcal{K}}}(\mathrm{conv}(\mathcal{K}))$ – компакт в $\hat P(X)$. Теорема доказана.

Вопрос о барицентричности множества $\hat P(X)$ тесно связан с вопросом монадичности функтора $\hat P$ (определение монады см. в [1, §1]).

3.16. Теорема. *Ограничение $\hat P : \mathcal{M}etr \to \mathcal{M}etr$ функтора $\hat P$ на категорию $\mathcal{M}etr$ метризуемых пространств и их непрерывных отображений, является монадой.*

Доказательство. Функтор $\hat P$ включается в тройку $\hat{\mathbb{P}} = (\hat P, \delta, \psi)$, где δ – преобразование Дирака, а компонента $\psi_X : \hat P^2(X) \to \hat P(X)$ умножения ψ совпадает с отображением барицентра $b_{\hat P(X)} : \hat P^2(X) \to \hat P(X)$. Здесь используются теоремы 3.15 и [1, 2.27], утверждающие, что для любого метризуемого пространства X множество $\hat P(X)$ барицентрично и метризуемо. Справедливость равенств $\psi \circ T\delta = \psi \circ \delta T = \mathrm{id}_T$ и $\psi \circ \psi T = \psi \circ T\psi$ следует из соответствующих равенств, выполняющихся для монады $\mathbb{P}$.

С понятием монады тесно связано понятие алгебры. Напомним определение. Для тройки $\mathbb{T} = (T, \delta, \psi)$ на категории $\mathcal{C}$ пара (X, ξ), где X – объект категории $\mathcal{C}$, а $\xi : T(X) \to X$ – морфизм, называется $\mathbb{T}$-алгеброй, если $\xi \circ \delta_X = \mathrm{id}_X$ и $\xi \circ \psi_X = \xi \circ T(\xi)$. Морфизмом $\mathbb{T}$-алгебр (X, ξ) и (X', ξ) называется такой морфизм $f : X \to X'$, что $\xi' \circ T(f) = f \circ \xi$.

3.17. Теорема. *Если X – выпуклое ограниченное барицентрическое метризуемое подмножество локально выпуклого пространства, то пара (X, b_X) является алгеброй монады $\hat{P} : \mathcal{M}etr \to \mathcal{M}etr$. При этом аффинные отображения между выпуклыми барицентрическими множествами являются морфизмами $\hat{P}$-алгебр.*

Доказательство. Равенство $b_X \circ \delta_X = \mathrm{id}_X$ следует из леммы 3.1. Покажем, что $b_X \circ b_{\hat{P}(X)} = b_X \circ \hat{P}(b_X)$. Отметим, что отображения $b_X \circ b_{\hat{P}(X)}$ и $b_X \circ \hat{P}(b_X)$ аффинны и непрерывны. Кроме того, если $\delta_\mu \in \hat{P}^2(X)$ – мера Дирака на $\hat{P}(X)$, то $b_X \circ b_{\hat{P}(X)}(\delta_\mu) = b_X(\mu)$ и $b_X \circ \hat{P}(b_X)(\delta(\mu)) = b_X(\delta(b_X(\mu)) = b_X(\mu)$. Поскольку выпуклая оболочка мер Дирака всюду плотна в $\hat{P}^2(X)$, то отображения $b_X \circ b_{\hat{P}(X)}$ и $b_X \circ \hat{P}(b_X)$ совпадают. Таким образом, (X, b_X) является $\hat{P}$-алгеброй.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы отметим, что для любого аффинного непрерывного отображения $f : X \to Y$ между барицентрическими подмножествами локально выпуклых пространств, отображения $b_Y \circ \hat{P}(f)$ и $f \circ b_X$ непрерывны и аффинны. Поскольку $b_Y \circ \hat{P}(f)(\delta_x) = b_Y(\delta_{f(x)}) = f(x) = f \circ \delta_X(\delta_x)$ для любого $x \in X$, и выпуклая оболочка мер Дирака всюду плотна в $\hat{P}(X)$, то $b_Y \circ \hat{P}(f) = f \circ b_X$, т.е. f – морфизм $\hat{P}$-алгебр (X, b_X) и (Y, b_Y). Теорема доказана.

Известно [10], [12], что категория $\mathbb{P}$-алгебр изоморфна категории $\mathcal{C}onv$ выпуклых компактов, лежащих в локально выпуклых пространствах, и их непрерывных аффинных отображений.

3.18. Вопрос. Изоморфна ли категория алгебр функтора $\hat{P}$ категории, оъектами которой являются выпуклые ограниченные барицентрические множества в локально-выпуклых пространствах, а морфизмами – аффинные непрерывные отображения.

В связи с монадичностью функтора $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ интересной представляется

3.19. Проблема. *Описать категорию алгебр монады $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$.*

3.20. Замечание. Отметим, что из теоремы 3.17 следует, что алегеброй монады P_τ является любая пара (X, b_X), где X – выпуклое ограниченное барицентрическое подмножество локально выпуклого пространства такое, что $\hat{P}(X) = P_\tau(X)$. При этом, аффинные непрерывные отображения таких барицентрических множеств являются морфизмами P_τ-алгебр.

§4. Поднятие функторов P_τ и $\hat{P}$ на категорию ограниченных метрических пространств и категорию равномерных пространств.

В этом параграфе, для каждой ограниченной (псевдо)метрики d на тихоновском пространстве X, мы построим (псевдо)метрику d_τ на $P_\tau(X)$, продолжающую (псевдо)метрику d. Это позволит построить поднятия функторов P_τ и $\hat{P}$ на категорию ограниченных метрических пространств, а также на категорию равномерных пространств. Все построения мы проведем сначала для функтора $\hat{P}$. Потом, используя тот факт, что функтор P_τ сохраняет вложения, и что $P_\tau(X) = \hat{P}(X)$ для любого полного метрического пространства, мы распостраним полученные результаты также и на функтор P_τ.

Пусть d – ограниченная псевдометрика на тихоновском пространстве X. Для радоновских мер $\mu, \eta \in \hat{P}(X)$ положим $\hat{d}(\mu,\eta) = \inf\{\lambda(d) \mid \lambda \in \hat{P}(X \times X),\ \hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu,\ \hat{P}(pr_2)(\lambda) = \eta\}$, здесь $pr_i : X \times X \to X$, $i = 1, 2,$ — проекция на i-ый сомножитель. Отметим, что для любых мер $\mu, \eta \in \hat{P}(X)$ мера $\lambda \in \hat{P}(X \times X)$ с $\hat{P}(\mathrm{pr}_1)(\lambda) = \mu$ и $\hat{P}(\mathrm{pr}_2)(\lambda) = \eta$ всегда существует. Действительно, в качестве λ возьмем тензорное произведение $\mu \otimes \eta$ мер μ и η (см. [1, 2.21 и 2.22]).

Формально, метрика $\hat{d}$ была введена Л.В.Канторовичем в [13] и для компактных пространств обстоятельно изучена В.В.Федорчуком [14]. Совсем недавно, Ю.В.Садовничий [3] доказал, что для метрического пространства (X, d), метрика $\hat{d}$ порождает топологию подмножества $P_\beta(X) \subset \hat{P}(X)$, состоящего из мер с компактными носителями.

Следующее утверждение является аналогом [14, §4, лемма 5].

4.1. Лемма. *Для любых радоновских мер $\mu, \eta \in \hat{P}(X)$ существует такая мера $\lambda \in \hat{P}(X \times X)$, что $\hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu$, $\hat{P}(pr_2)(\lambda) = \eta$ и $\hat{d}(\mu,\eta) = \lambda(d)$.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \hat{P}(X \times X)$ — такая последовательность радоновских мер, что $\hat{P}(pr_1)(\lambda_n) = \mu$, $\hat{P}(pr_2)(\lambda_n) = \eta$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(d) = \hat{d}(\mu,\eta)$. Пусть cX — компактификация пространства X. Поскольку функтор $\hat{P}$ сохраняет вложения, то, можно считать, что $\hat{P}(X) \subset P(cX)$ и $\hat{P}(X \times X) \subset P(cX \times cX)$. При этом $P(pr_1)(\lambda_n) = \mu$ и $P(pr_2)(\lambda_n) = \eta$, $n \in \mathbb{N}$ (здесь $pr_i : cX \times cX \to cX$, $i = 1, 2,$ — проекция на i-ый сомножитель). Поскольку $P(cX \times cX)$ — компакт, то существует $\lambda \in P(cX \times cX)$ предельная точка последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. Поскольку отображения $P(pr_i) : P(cX \times cX) \to P(cX)$, $i = 1, 2,$ — непрерывны, то $P(pr_1)(\lambda) = \mu$ и $P(pr_2)(\lambda) = \eta$. Покажем, что $\lambda \in \hat{P}(X \times X) \subset P(cX \times cX)$. Для этого зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем два компакта $K_1 \subset X$ и $K_2 \subset X$ с $\mu(K_1) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ и $\eta(K_2) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\lambda((cX \times cX) \setminus (K_1 \times K_2)) = \lambda((cX \setminus K_1) \times cX \cap cX \times (cX \setminus K_2)) \leq \lambda((cX \setminus K_1) \times cX) + \lambda(cX \times (cX \setminus K_2)) = \mu(cX \setminus K_1) + \eta(cX \setminus K_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $\lambda(K_1 \times K_2) > 1 - \varepsilon$, т.е. $\lambda \in \hat{P}(X \times X)$. По определению топологии на $\hat{P}(X \times X)$, формула $\nu \mapsto \nu(d)$ задает непрерывную функцию $D : \hat{P}(X \times X) \to \mathbb{R}$. Поскольку $\lambda \in \hat{P}(X \times X)$ предельная точка последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \hat{P}(X \times X)$ и $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(d) = \lim_{n\to\infty} D(\lambda_n) = \hat{d}(\mu,\eta)$, то $D(\lambda) = \lambda(d) = \hat{d}(\mu,\eta)$. Лемма доказана.

4.2. Лемма. *Для любой ограниченной непрерывной (псевдо)метрики d на тихоновском пространстве X, функция $\hat{d} : \hat{P}(X) \times \hat{P}(X) \to \mathbb{R}$ является непрерывной (псевдо)метрикой на $\hat{P}(X)$. Более того,* $\mathrm{diam}(X, d) = \mathrm{diam}(\hat{P}(X), \hat{d})$.

Доказательство. Аналогично лемме 6 из [14, §4] доказывается, что функция $\hat{d} : \hat{P}(X) \times \hat{P}(X) \to \mathbb{R}$ является ограниченной (псевдо)метрикой на $\hat{P}(X)$ для любой ограниченной непрерывной (псевдо)метрики d на X.

Покажем, что псевдометрика $\hat{d}$ на $\hat{P}(X)$ непрерывна. Для этого зафиксируем меру $\mu_0 \in \hat{P}(X)$ и $\varepsilon > 0$ и положим $D = \mathrm{diam}(X, d) + 1 = \sup\{d(x, x') \mid x, x' \in X\} + 1$. Зафиксируем такой компакт $K \subset X$, что $\mu_0(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{8D}$. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ — конечное покрытие компакта K открытыми $\frac{\varepsilon}{4}$-шарами (по отношению к псевдометрике d). Поскольку мера μ_0 счетно-аддитивна, то существует такое открытое множество $V_1 \subset \bar{V}_1 = \mathrm{cl}_X(V_1) \subset U_1$, что $\mu_0(V_1) > \mu_0(U_1) -$

$\frac{\varepsilon}{8Dn}$. По индукции строим такие открытые множества $V_k \subset X$, $1 < k \leq n$, что $V_k \subset \bar{V}_k \subset U_k \setminus (\cup_{i<k}\bar{V}_i)$ и $\mu(V_k) > \mu_0(U_k \setminus \cup_{i<k}U_i) - \frac{\varepsilon}{8Dn}$. Отметим, что множества $V_1, \ldots, V_n$ — дизъюнктны. Кроме того, $\mu_0(V_1) + \mu_0(V_2) + \cdots + \mu_0(V_n) > \mu_0(U_1) + \mu_0(U_2 \setminus U_1) + \cdots + \mu_0(U_n \setminus \cup_{i<n}U_i) - \frac{\varepsilon}{8D} = \mu_0(\cup_{i\leq n}U_i) - \frac{\varepsilon}{8D} > 1 - \frac{\varepsilon}{8D} - \frac{\varepsilon}{8D} = 1 - \frac{\varepsilon}{4D}$. По [1, 1.19], множество $U = \{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(V_i) > \mu_0(V_i) - \frac{\varepsilon}{4Dn},\ 1 \leq i \leq n\}$ является открытой окрестностью меры μ_0.

Мы покажем, что для любой меры $\mu \in U$ $\hat{d}(\mu, \mu_0) < \varepsilon$. Зафиксируем меру $\mu \in U$. Положим $V_0 = X \setminus (\cup_{i=1}^n V_i)$. Для борелевского подмножества $B \subset X$ $\mu|B$ — мера на X, определяемая формулой $\mu|B(A) = \mu(B \cap A)$ для любого борелевского множества $A \subset X$. Рассмотрим меру $\lambda = \sum_{i,j=0}^n \alpha_{ij}(\mu_0|V_i) \times (\mu|V_j)$ на $X \times X$, где коэффициенты $\alpha_{ij} \geq 0$ подобраны с учетом следующих условий: для любых $0 \leq i, j \leq n$ $\sum_{j=0}^n \alpha_{ij}\mu(V_j) = 1$, $\sum_{i=0}^n \alpha_{ij}\mu_0(V_i) = 1$ и $\alpha_{ii}\mu_0(V_i)\mu(V_i) = \min\{\mu_0(V_i), \mu(V_i)\}$. Легко убедиться, что λ — радоновская мера на $X \times X$, $\hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu_0$ и $\hat{P}(pr_2)(\lambda) = \mu$. Покажем, что $\lambda(d) = \int_{X \times X \setminus \cup_{i=1}^n V_i \times V_i} d\ d\lambda + \int_{\cup_{i=1}^n V_i \times V_i} d\ d\lambda < \varepsilon$. Отметим, что $\lambda(\cup_{i=1}^n V_i \times V_i) = \sum_{i=1}^n \min\{\mu_0(V_i), \mu(V_i)\} > \sum_{i=1}^n (\mu_0(V_i) - \frac{\varepsilon}{4Dn}) > 1 - \frac{\varepsilon}{4D} - \frac{\varepsilon}{4D} = 1 - \frac{\varepsilon}{2D}$. Поскольку каждое множество V_i содержится в некотором $\frac{\varepsilon}{4}$-шаре, то для любых $(x, y) \in \cup_{i=1}^n V_i \times V_i$ $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\lambda(d) < \frac{\varepsilon}{2D} D + (1 - \frac{\varepsilon}{2D})\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Отсюда следует,что $\hat{d}(\mu, \mu_0) < \varepsilon$. Таким образом, $\hat{d}$ – непрерывная псевдометрика на $\hat{P}(X)$.

Тот факт, что $\operatorname{diam}(X, d) = \operatorname{diam}(\hat{P}(X), \hat{d})$ легко следует из определения псевдометрики $\hat{d}$. Лемма доказана.

Напомним, что метрика на топологическом пространстве X называется совместимой, если она порождает на X исходную топологию.

4.3. Лемма. *Если d – совместимая ограниченная метрика на пространстве X, тогда $\hat{d}$ – совместимая метрика на $\hat{P}(X)$.*

Доказательство. Пусть (X, d) – ограниченное метрическое пространство. Из леммы 4.2 следует, что $\hat{d}$ – непрерывная метрика на $\hat{P}(X)$. Покажем, что метрика $\hat{d}$ порождает топологию $\hat{P}(X)$. Из теоремы 4 [11,II] следует,что множества вида $\{\mu \in \hat{P}(X) : |\mu(f) - \mu_0(f)| < 1\}$, где f — равномерно непрерывная ограниченная функция на (X, d), образуют предбазис открытых окрестностей меры μ_0. Пусть $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная ограниченная функция на X. Покажем, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой меры $\mu \in \hat{P}(X)$ если $\hat{d}(\mu, \mu_0) < \varepsilon$, то $|\mu(f) - \mu_0(f)| < 1$. Пусть $M = \sup\{f(x) \mid x \in X\} + 1$. Поскольку функция f — равномерно непрерывная, то существует такое $0 < \delta < \frac{1}{4M}$, что для любых $x, y \in X$ из $d(x, y) < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$. Положим $\varepsilon = \delta^2$. Мы утверждаем, что для любой меры $\mu \in \hat{P}(X)$, если $\hat{d}(\mu, \mu_0) < \varepsilon$, то $|\mu(f) - \mu_0(f)| < 1$. Действительно, пусть $\mu \in \hat{P}(X)$ — мера на X с $\hat{d}(\mu, \mu_0) < \varepsilon$. Из леммы 4.1 вытекает существование такой меры $\lambda \in \hat{P}(X \times X)$, что $\hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu$, $\hat{P}(pr_2)(\lambda) = \mu_0$ и $\lambda(d) < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lambda(A) \leq \delta$ для множества $A = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \geq \delta\}$. Тогда $|\mu(f) - \mu_0(f)| = |\int_{X \times X} f(x) d\lambda - \int_{X \times X} f(y) d\lambda| \leq \int_{X \times X} |f(x) - f(y)| d\lambda \leq \int_A |f(x) - f(y)| d\lambda + \int_{(X \times X) \setminus A} |f(x) - f(y)| d\lambda \leq \frac{1}{2} + 2M\,\delta < 1$. Таким образом топология на $\hat{P}(X)$, порожденная метрикой $\hat{d}$ совпадает с исходной топологией. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория и $U : \mathcal{C} \to \mathcal{T}ych$ – "забывающий" функтор. Мы говорим, что функтор $F : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ поднимается на категорию $\mathcal{C}$, если существует такой функтор $\tilde{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, что $U \circ \tilde{F} = F \circ U$. Из лемм 4.2, 4.3 следует

4.4. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ поднимается на категорию $\mathcal{BM}etr$ ограниченных метрических пространств и их непрерывных отображений.*

4.5. Лемма. *Пусть K — замкнутое подмножество ограниченного метрического пространства (X, d), $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Тогда для любых мер $\mu, \eta \in \hat{P}(X)$ из $\hat{d}(\mu, \eta) \le \frac{\varepsilon}{2}\delta$ и $\mu(K) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ следует $\eta(O_\delta(K)) \ge 1 - \varepsilon$, где $O_\delta(K) = \{x \in X \mid d(x, K) \le \delta\}$ — δ-окрестность множества K.*

Доказательство. Пусть $\mu, \eta \in \hat{P}(X)$ — такие меры, что $\hat{d}(\mu, \eta) \le \frac{\varepsilon}{2}\delta$ и $\mu(K) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. По лемме 4.1, существует такая мера $\lambda \in \hat{P}(X \times X)$, что $\hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu$, $\hat{P}(pr_2)(\lambda) = \eta$ и $\lambda(d) = \hat{d}(\mu, \eta)$. Положим $A = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \le \delta,\ x \in K\}$. Очевидно, что $\eta(O_\delta(K)) \ge \lambda(A)$. Отметим, что $(X \times X) \setminus A = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) > \delta\} \cup pr_1^{-1}(X \setminus K)$. Поскольку $\lambda(d) \le \frac{\varepsilon}{2}\delta$, то $\lambda(\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) > \delta\}) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Из $\mu(K) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ и $\hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu$ следует, что $\lambda(pr_1^{-1}(X \setminus K)) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\lambda((X \times X) \setminus A) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\eta(O_\delta(K)) \ge \lambda(A) \ge 1 - \varepsilon$. Лемма доказана.

4.6. Теорема. *Если d — полная ограниченная метрика на X, то $\hat{d}$ — полная ограниченная метрика на $\hat{P}(X)$.*

Доказательство. Пусть cX — любая компактификация X и $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset \hat{P}(X)$ — фундаментальная последовательность (по отношению к метрике $\hat{d}$). Тогда существует мера $\mu \in P(cX)$, являющаяся предельной точкой последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset \hat{P}(X) \subset P(cX)$. Покажем, что $\mu \in \hat{P}(X)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Индуктивно построим последовательность чисел $\{k(n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ и компактов $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset X$ такие,что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $k, m \ge k(n)$ $\hat{d}(\mu_k, \mu_m) \le \frac{\varepsilon}{2} 2^{-n}$ и $\mu_{k(n)}(K_n) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку пространство (X, d) — полно, пересечение $K = \bigcap_{n=1}^\infty O_{2^{-n}}(K_n) \subset X$ является компактом [8, 4.3.29]. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $C_n = \mathrm{cl}_{cX}(O_{2^{-n}}(K_n))$. Нетрудно убедиться, что $K = \cap_{n=1}^\infty C_n$. По [1, 1.19], множество $\mathcal{K}_n = \{\mu \in P(cX) \mid \mu(C_n) \ge 1 - \varepsilon\}$ — замкнуто в $P(cX)$. Из леммы 4.5 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и $k \ge k(n)$ $\mu_k \in \mathcal{K}_n$. Следовательно, $\mu \in \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{K}_n$. То есть $\mu(C_n) \ge 1 - \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $K = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$, то $\mu(K) \ge 1 - \varepsilon$. Следовательно, $\mu \in \hat{P}(X)$. Поскольку последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \hat{P}(X)$ — фундаментальная и мера $\mu \in \hat{P}(X)$ является ее предельной точкой, то последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к μ. Теорема доказана.

Далее мы исследуем действие функтора $\hat{P}$ на различные классы отображений, связанные с метрической структурой. Во-первых тривиальным является следующее

4.7. Предложение. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет класс изометрических вложений.*

4.8. Предложение. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет нерастягивающие отображения.*

Доказательство. Пусть $f : (X,d) \to (Y,\varrho)$ — нерастягивающее отображение и $\mu,\eta \in \hat{P}(X)$. Покажем,что $\hat{\varrho}(\hat{P}(f)(\mu),\hat{P}(f)(\eta)) \le \hat{d}(\mu,\eta)$. По лемме 4.1, существует такая мера $\lambda \in \hat{P}(X\times X)$, что $\hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu$, $\hat{P}(pr_2)(\lambda) = \eta$ и $\lambda(d) = \hat{d}(\mu,\eta)$. Тогда мера $\hat{P}(f\times f)(\lambda) \in \hat{P}(Y\times Y)$ удовлетворяет следующим условиям: $\hat{P}(pr_1)(\hat{P}(f\times f)(\lambda)) = \hat{P}(f)(\mu)$ и $\hat{P}(pr_2)(\hat{P}(f\times f)(\lambda)) = \hat{P}(f)(\eta)$. Следовательно, $\hat{\varrho}(\hat{P}(f)(\mu),\hat{P}(f)(\eta)) \le \hat{P}(f\times f)(\lambda)(\varrho) = \lambda(\varrho\circ(f\times f))$. Поскольку отображение f — нерастягивающее, то для любых $(x,y)\in X\times X$ $\varrho(f(x),f(y)) \le d(x,y)$. Следовательно, $\hat{\varrho}(\hat{P}(f)(\mu),\hat{P}(f)(\eta)) \le \lambda(\varrho\circ(f\times f)) \le \lambda(d) = \hat{d}(\mu,\eta)$. Предложение доказано.

Теперь мы займемся вопросом продолжения псевдометрик с тихоновского пространства X на пространство $P_\tau(X)$ вероятностных τ-гладких мер.

Пусть p – непрерывная псевдометрика на тихоновском пространстве X. Через (X_p,d_p) обозначаем метрическое пространство, порожденное псевдометрикой p и через $\pi : X \to X_p$ – соответствующую проекцию. Пусть (X'_p,d'_p) – пополнение пространства X_p по метрике d_p. Поскольку X'_p – полное метрическое пространство, то $P_\tau(X'_p) = \hat{P}(X'_p)$. Рассмотрим отображение $P_\tau(\pi) : P_\tau(X) \to P_\tau(X_p) \subset P_\tau(X'_p) = \hat{P}(X'_p)$ и определим псевдометрику p_τ на $P_\tau(X)$ посредством формулы: $p_\tau(\mu,\eta) = \hat{d}'_p(P_\tau(\pi)(\mu),P_\tau(\pi)(\eta))$, $\mu,\eta\in P_\tau(X)$, где $\hat{d}'_p$ – метрика на пространстве $\hat{P}(X'_p) = P_\tau(X'_p)$, порожденная метрикой d'_p на X'_p.

Поскольку функторы P_τ и $\hat{P}$ сохраняют класс вложений, из лемм 4.2, 4.3, а также из определения псевдометрики p_τ следуют

4.9. Предложение. *Если p – непрерывная ограниченная псевдометрика на тихоновском пространстве X, то p_τ – непрерывная псевдометрика на $P_\tau(X)$. Более того,* $\operatorname{diam}(X,p) = \operatorname{diam}(P_\tau(X),p_\tau)$.

4.10. Предложение. *Если d – совместимая ограниченная метрика на пространстве X, то d_τ – совместимая метрика на $P_\tau(X)$.*

4.11. Теорема. *Функтор P_τ поднимается на категорию $\mathcal{BM}etr$ ограниченных метрических пространств и их непрерывных отображений.*

4.12. Замечание. Для любой ограниченной псевдометрики d на X и любых радоновских мер $\mu,\eta \in \hat{P}(X) \subset P_\tau(X)$ расстояние $d_\tau(\mu,\eta)$ совпадает с расстоянием $\hat{d}(\mu,\eta)$, определенным в начале этого параграфа. Это следует из непрерывности псевдометрик d_τ и $\hat{d}$ на $\hat{P}(X)$ и легко проверяемого равенства $\hat{d}(\mu,\eta) = d_\tau(\mu,\eta)$, выполняющегося для мер $\mu,\eta\in\hat{P}(X)$ с конечными носителями.

Поскольку для полных метрических пространств пространства вероятностных радоновских и вероятностных τ-гладких мер совпадают, то из теоремы 4.6 следует

4.13. Теорема. *Если d — полная ограниченная метрика на X, то d_τ — полная ограниченная метрика на $P_\tau(X)$.*

Переходя к пополнениям, и используя предложения 4.7, 4.8, можно доказать

4.14. Предложение. *Функтор P_τ сохраняет класс изометрических вложений.*

4.15. Предложение. *Функтор P_τ сохраняет нерастягивающие отображения.*

Для отображений $f, g : Y \to X$ и ограниченной псевдометрики d на X положим $d(f,g) = \sup\{d(f(y), g(y)) \mid y \in Y\}$.

4.16. Предложение. *Для любой ограниченной псевдометрики d на тихоновском пространстве X и любых отображений $f, g : Y \to X$ имеем $d(f,g) = d_\tau(P_\tau(f), P_\tau(g))$.*

Доказательство. Без ограничения общности, d – совместимая метрика на X. Пусть (X', d') – пополнение пространства (X, d). Отметим, что $d_\tau(P_\tau(f), P_\tau(g))$ $= \sup\{d_\tau(P_\tau(f)(\mu), P_\tau(g)(\mu)) \mid \mu \in P_\tau(Y)\} \geq \sup\{d_\tau(P_\tau(f)(\delta_y), P_\tau(g)(\delta_y)) \mid y \in Y\} = \sup\{d(f(y), g(y)) \mid y \in Y\} = d(f,g)$. Покажем, что $d_\tau(P_\tau(f), P_\tau(g)) \leq d(f,g)$. Зафиксируем меру $\mu \in P_\tau(Y)$. Рассмотрим отображения $(f,g) : Y \to X \times X$ и $P_\tau(f,g) : P_\tau(Y) \to P_\tau(X \times X)$ и положим $\lambda = P_\tau(f,g)(\mu) \in P_\tau(X \times X) \subset \hat{P}(X' \times X')$. Легко видеть, что $P_\tau(pr_1)(\lambda) = P_\tau(f)(\mu)$ и $P_\tau(pr_2)(\lambda) = P_\tau(g)(\mu)$. Кроме того, $\mathrm{supp}(\lambda) \subset \{(x, x') \in X' \times X' \mid d'(x, x') \leq d(f,g)\}$. Тогда $d_\tau(P_\tau(f)(\mu), P_\tau(g)(\mu)) = \hat{d}'(P_\tau(f)(\mu), P_\tau(g)(\eta)) \leq \int d'\ d\lambda \leq d(f,g)$. Предложение доказано.

Теперь выясним связь между метрической и выпуклой структурами на $P_\tau(X)$.

Псевдометрику ϱ на выпуклом подмножестве Y линейного пространства будем называть выпуклой, если для любых $x, x', y, y' \in Y$ и $t \in [0,1]$

$$\varrho(tx + (1-t)y, tx' + (1-t)y') \leq t\varrho(x, x') + (1-t)\varrho(y, y').$$

Легко видеть, что шары, по отношению к выпуклой псевдометрике, – выпуклы. Кроме того, если d — выпуклая псевдометрика на Y, то для любых $x, y \in Y$ и $t \in [0,1]$ $d(tx + (1-t)y, y) \leq td(x,y)$.

Доказательство следующего утверждения не представляет трудностей.

4.17. Предложение. *Для любой ограниченной псевдометрики d на тихоновском пространстве X, псевдометрика d_τ на $P_\tau(X)$ выпукла.*

4.18. Предложение. *Пусть X — выпуклое барицентрическое подмножество локально выпуклого пространства, метризуемое выпуклой ограниченной метрикой d. Тогда отображение барицентра $b_X : (\hat{P}(X), \hat{d}) \to (X, d)$ — нерастягивающее.*

Доказательство. Для мер Дирака $\delta_x, \delta_y \in \hat{P}(X)$ имеем $d(b_X(\delta_y), b_X(\delta_x)) = d(x,y)$. Из выпуклости метрики d следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$, точек $x_i, y_i \in X$, $1 \leq i \leq n$, и чисел $t_i \in [0,1]$, $1 \leq i \leq n$, с $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ выполняется неравенство $d(\sum_{i=1}^n t_i x_i, \sum_{i=1}^n t_i y_i) \leq \sum_{i=1}^n t_i d(x_i, y_i)$.

Покажем, что для любых мер $\mu, \eta \in P_\omega(X) \subset \hat{P}(X)$ с конечными носителями имеем $d(b_X(\mu), b_X(\eta)) \leq \hat{d}(\mu, \eta)$. Действительно, пусть $\lambda \in \hat{P}(X \times X)$ — такая мера, что $\hat{P}(pr_1)(\lambda) = \mu$, $\hat{P}(pr_2)(\lambda) = \eta$ и $\lambda(d) = \hat{d}(\mu, \eta)$. Меры μ и η имеют вид: $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, $\eta = \sum_{j=1}^m \beta_j \delta_{y_j}$. Тогда мера λ имеет вид $\lambda = \sum_{i=1, j=1}^{n\ \ m} \gamma_{ij} \delta_{(x_i, y_j)}$, причем $\sum_{j=1}^m \gamma_{ij} = \alpha_i$ и $\sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = \beta_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq$

$j \le m$. Тогда

$$d(b_X(\sum_{i=1}^n \alpha_i\delta_{x_i}), b_X(\sum_{j=1}^m \beta_j\delta_{y_j})) = d(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^m \beta_j y_j) =$$
$$d(\sum_{i=1,j=1}^{n\ \ m} \gamma_{ij}x_i, \sum_{i=1,j=1}^{n\ \ m} \gamma_{ij}y_j) \le \sum_{i=1,j=1}^{n\ \ m} \gamma_{ij} d(x_i, y_j) = \lambda(d) = \hat{d}(\mu,\eta).$$

Таким образом, неравенство $d(b_X(\mu), b_X(\eta)) \le \hat{d}(\mu,\eta)$ выполняется для всех мер μ,η из всюду плотного множества $P_\omega(X) \subset \hat{P}(X)$. Поскольку отображение $b_X : \hat{P}(X) \to X$ — непрерывно, неравенство $d(b_X(\mu), b_X(\eta)) \le \hat{d}(\mu,\eta)$ выполняется для всех мер $\mu,\eta \in \hat{P}(X)$. Предложение доказано.

Касательно связи метрической структуры и структуры монады, то справедлива

4.19. Теорема. *Для любого ограниченного метрического пространства* (X, d) *единица* $\delta_X : X \to P_\tau(X)$ *монады* P_τ *является замкнутым изометрическим вложением, и умножение* $\psi_X = b_{P_\tau(X)} : P^2_\tau(X) \to P_\tau(X)$ *— нерастягивающим отображением. Более того, для любой точки* $x \in X$ *и меры* $\mu \in P^2_\tau(X)$ $d_{P^2_\tau(X)}(\delta_{\delta_x}, \mu) = d_{P_\tau(X)}(\delta_x, \psi_X(\mu))$.

Доказательство. Первое предложение теоремы следует из предложений 4.17, 4.18 и плотности множества $\hat{P}^2(X)$ в $P^2_\tau(X)$. Для доказательства второго утверждения теоремы отметим, что равенство $d_{P^2_\tau(X)}(\delta_{\delta_x}, \mu) = d_{P_\tau(X)}(\delta_x, \psi_X(\mu))$ достаточно доказать для всех мер из всюду плотного множества $P_\omega(P_\omega(X)) \subset P_\tau(P_\tau(X))$. Пусть $\mu \in P_\omega(P_\omega(X))$. Тогда носитель $\mathrm{supp}(\mu) \subset P_\omega(X)$ меры μ конечен. Более того, множество $K = \{x\} \cup \{\mathrm{supp}(\eta) \mid \eta \in \mathrm{supp}(\mu)\} \subset X$ — конечно. Но тогда $\mu \in P(P(K)) \subset P_\tau(P_\tau(X))$. Причем для компакта $(K, d|K)$ равенство $d_{P^2(K)}(\delta_{\delta_x}, \mu) = d_{P(K)}(\delta_x, \psi_K(\mu))$ доказано в [22, §4, лемма 11]. Поскольку функтор P_τ сохраняет изометрические вложения, из последнего равенства вытекает, что $d_{P^2_\tau(X)}(\delta_{\delta_x}, \mu) = d_{P_\tau(X)}(\delta_x, \psi_X(\mu))$. Теорема доказана.

Сейчас мы займемся вопросом поднятия функторов $\hat{P}, P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ на категорию $\mathcal{U}nif$ равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображений (с основами теории равномерных пространств можно познакомиться в [8, гл.8]).

Напомним, что отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ двух равномерных пространств является равномерным гомеоморфизмом, если f – биективно, и f и f^{-1} являются равномерно непрерывными отображениями. Отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ называется равномерным вложением, если f – равномерный гомеоморфизм пространства $(X,\mathcal{U})$ на образ $f(X) \subset (Y,\mathcal{V})$.

Мы будем говорить, что $\mathcal{U}$ – равномерность на топологическом пространстве X, если равномерность $\mathcal{U}$ индуцирует на множестве X исходную топологию. Псевдометрика $d : X \times X \to \mathbb{R}$ равномерна относительно равномерности $\mathcal{U}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое окружение диагонали $V \in \mathcal{U}$, что $d(V) \subset [0,\varepsilon)$.

Если $(X,\mathcal{U})$ – равномерное пространство, тогда семейство P всех псевдометрик на множестве X, равномерных относительно $\mathcal{U}$, обладает следующими свойствами:

(1) (UP1) если $\rho_1, \rho_2 \in P$, то $\max\{\rho_1, \rho_2\} \in P$;

(2) (UP2) для каждой пары x, y различных точек X существует такая псевдометрика $\rho \in P$, что $\rho(x,y) > 0$.

Обратно, для каждого семейства P псевдометрик на множестве X, обладающего свойствами (UP1)–(UP2), семейство $\mathcal{B}$ всех окружений диагонали вида $\{(x,y) \mid \rho(x,y) < 2^{-n}\}$, где $\rho \in P$ и $n \in \mathbb{N}$ образует базу некоторой равномерности на X.

Теперь мы покажем как для равномерности $\mathcal{U}$ на пространстве X построить равномерность на пространстве $P_\tau(X)$.

Для каждой псевдометрики p на X через (X_p, d_p) обозначим метрическое пространство, порожденное псевдометрикой p, и через $\pi_p : X \to X_p$ – соответствующее фактор-отображение. Каждая равномерность $\mathcal{U}$ на пространстве X порождает равномерное вложение $e_{\mathcal{U}} : (X, \mathcal{U}) \to \prod_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{U})}(X_p, d_p)$, определенное формулой $e_{\mathcal{U}}(x) = (\pi_p(x))_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{U})}$, где $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ – семейство всех ограниченных псевдометрик, равномерных относительно $\mathcal{U}$ (см. [6, 8.2.2]). На множестве $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ рассмотрим естественный частичный порядок $\leq$. Легко видеть, что для любых псевдометрик $\rho, \rho' \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, $\rho \leq \rho'$, определено нерастягивающее отображение $\pi_\rho^{\rho'} : (X_{\rho'}, d_{\rho'}) \to (X_\rho, d_\rho)$. Очевидно, что произведение $\prod_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{U})} X_p$ гомеоморфно (даже равномерно гомеоморфно) пределу $\varprojlim X_\rho$ обратного спектра $\{X_\rho, \pi_\rho^{\rho'}, \mathcal{P}(\mathcal{U})\}$. Поскольку множество направлено (т.е. для любых $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ существует такое $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, что $\rho \geq \rho_1$ и $\rho \geq \rho_2$) то, согласно предложению [1, 1.11], отображение $R : P_\tau(\prod_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{U})} X_p) = P_\tau(\varprojlim X_p) \to \varprojlim P_\tau(X_p)$ является топологическим вложением. Следовательно, отображение $R \circ P_\tau(e_{\mathcal{U}}) : P_\tau(X) \to \varprojlim P_\tau(X_p)$ также является топологическим вложением. На каждом пространстве $P_\tau(X_p)$ мы рассматриваем равномерность, порожденную метрикой $(d_p)_\tau$, которая, согласно предложению 4.10, совместима с топологией $P_\tau(X_p)$. Окончательно, снабдим пространство $P_\tau(X)$ равномерностью $\mathcal{U}_\tau$ подпространства обратного предела $\varprojlim P_\tau(X_p)$ равномерных пространств $P_\tau(X_p)$. Пространство $\hat{P}(X)$ мы снабдим равномерностью $\hat{\mathcal{U}}$ подпространства равномерного пространства $(P_\tau(X), \mathcal{U}_\tau)$.

Таким образом, для каждой равномерности $\mathcal{U}$ на пространстве X мы определили равномерность $\mathcal{U}_\tau$ на пространстве $P_\tau(X)$. Легко видеть, что равномерность $\mathcal{U}_\tau$ может быть определена прямым образом. Именно, базой этой равномерности служит семейство множеств вида $U = \{(\mu, \eta) \in P_\tau(X) \times P_\tau(X) \mid p_\tau(\mu, \eta) < 2^{-n}\}$, где $p \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ и $n \in \mathbb{N}$. Используя обходной путь (через обратные спектры), мы избавились от необходимости проверки того, что семейство $\mathcal{B}$ действительно удовлетворяет аксиомам базы равномерности (см. [8, с.624]). Кроме того, мы заодно доказали, что если равномерность $\mathcal{U}$ порождает топологию X, тогда равномерность $\mathcal{U}_\tau$ порождает топологию $P_\tau(X)$.

4.20. Предложение. *Пусть P – семейство ограниченных псевдометрик на равномерном пространстве $(X, \mathcal{U})$, обладающее свойствами (UP1)–(UP2). Если семейство $\mathcal{B}$ всех окружений диагонали Δ_X вида $\{(x,y) \mid \rho(x,y) < 2^{-n}\}$, где $\rho \in P$ и $n \in \mathbb{N}$, образует базу равномерности $\mathcal{U}$ на X, тогда семейство $\mathcal{B}_\tau$ всех окружений диагонали $\Delta_{P_\tau(X)}$ вида $\{(\mu, \eta) \mid \rho_\tau(\mu, \eta) < 2^{-n}\}$, где $\rho \in P$ и $n \in \mathbb{N}$ образует базу равномерности $\mathcal{U}_\tau$ на $P_\tau(X)$.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что поскольку каждая псевдометрика $\rho \in P$ равномерна относительно $\mathcal{U}$, то для любого окружения $V \in \mathcal{B}_\tau$, по определению равномерности $\mathcal{U}_\tau$, $V \in \mathcal{U}_\tau$.

Теперь зафиксируем окружение диагонали $V \in \mathcal{U}_\tau$. Из определения равномерности $\mathcal{U}_\tau$ следует, что существует ограниченная псевдометрика $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ такая, что $\{(\mu,\eta) \mid \rho_\tau(\mu,\eta) < 1\} \subset V$. Пусть $D = \sup\{\rho(x,y) \mid x,y \in X\} + 1$ и $U = \{(x,y) \mid \rho(x,y) < \frac{1}{3}\}$. Поскольку $\mathcal{B}$ – база равномерности $\mathcal{U}$, то существует $p \in P$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $W = \{(x,y) \mid p(x,y) < 2^{-n}\} \subset U$.

Мы покажем, что $\mathcal{W} = \{(\mu,\eta) \mid p_\tau(\mu,\eta) < 2^{-(n+1)}/D\} \subset \mathcal{A} = \{(\mu,\eta) \mid \rho_\tau(\mu,\eta) \le \frac{5}{6}\}$. Поскольку множество $\mathcal{A}$ замкнуто в $P_\tau(X) \times P_\tau(X)$, а множетсов $\mathcal{W}$ – открыто, то вложение $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}$ будет следовать из включения $(\mu,\eta) \in \mathcal{A}$ для любой пары мер $(\mu,\eta) \in \mathcal{W}$ с конечными носителями. Зафиксирует пару мер $(\mu,\eta) \in \mathcal{W}$ с конечными носителями. По лемме 4.1 и замечанию 4.12, существует такая мера $\lambda \in P_\omega(X \times X)$, что $P_\tau(\mathrm{pr}_1)(\lambda) = \mu$, $P_\tau(\mathrm{pr}_2)(\lambda) = \eta$ и $\lambda(p) = p_\tau(\mu,\eta) = \int_{X\times X} p d\lambda < 2^{-(n+1)}/D$. Поскольку значение функции p на множестве $(X \times X) \setminus W$ не меньше 2^{-n}, то $2^{-(n+1)}/D > \int_{X\times X} p\, d\lambda \ge \int_{(X\times X)\setminus W} p\, d\lambda \ge 2^{-n}\lambda((X \times X) \setminus W)$, откуда следует, что $\lambda((X \times X) \setminus U) \le \lambda((X \times X) \setminus W) < 2^n \cdot 2^{-(n+1)}/D = \frac{1}{2D}$. Тогда $\rho_\tau(\mu,\eta) \le \lambda(\rho) = \int_{X\times X} \rho\, d\lambda = \int_{(X\times X)\setminus U} \rho\, d\lambda + \int_U \rho\, d\lambda \le D \cdot \lambda((X \times X) \setminus U) + \frac{1}{3}\lambda(U) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Предложение доказано.

4.21. Следствие. *Пусть (X,d) – ограниченное метрическое пространство и $\mathcal{U}$ – равномерность на X, порожденная метрикой d. Тогда равномерность на $P_\tau(X)$, порожденная метрикой d_τ совпадает с равномерностью $\mathcal{U}_\tau$.*

Идея доказательства следующего предложения принадлежит Ю.Садовничему.

4.22. Предложение. *Если $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ – равномерно непрерывное отображение, тогда отображение $P_\tau(f) : (P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau) \to (P_\tau(Y),\mathcal{V}_\tau)$ также равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ – равномерно непрерывное отображение. Как мы уже упоминали, базой равномерности $(P_\tau(Y),\mathcal{V}_\tau)$ служит семейство множеств вида $U_p^\varepsilon = \{(\mu,\eta) \in P_\tau(Y) \times P_\tau(Y) \mid p_\tau(\mu,\eta) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Поскольку отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ равномерно непрерывно, псевдометрика $\rho = p \circ (f \times f)$ равномерна относительно $\mathcal{U}$. Отметим, что из определения псевдометрики p_τ следует, что для любых $\mu,\eta \in P_\tau(X)$ $\rho_\tau(\mu,\eta) = p_\tau(P_\tau(f)(\mu), P_\tau(f)(\eta))$. Отсюда следует, что $(P_\tau(f) \times P_\tau(f))^{-1}(U_p^\varepsilon) = U_\rho^\varepsilon = \{(\mu,\eta) \in P_\tau(X) \times P_\tau(X) \mid \rho_\tau(\mu,\eta) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}_\tau$, т.е. отображение $P_\tau(f) : (P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau) \to (P_\tau(Y),\mathcal{V}_\tau)$ равномерно непрерывно. Предложение доказано.

Из предложений 4.22, а также из рассуждений, приведенных выше, следует

4.23. Теорема. *Функторы $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ и $\hat{P} : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ поднимаются на категорию $\mathcal{U}nif$ равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображений.*

Непосредственно доказывается

4.24. Предложение. *Для каждого равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ отображение $\delta : (X,\mathcal{U}) \to (\hat{P}(X),\hat{\mathcal{U}}) \subset (P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau)$, $\delta : x \mapsto \delta_x$, $x \in X$, является равномерным вложением.*

Поскольку каждая ограниченная равномерно непрерывная псевдометрика на подпространстве Y равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ продолжается на все X до ограниченной псевдометрики, равномерной относительно $\mathcal{U}$ (см. [15], либо [8, 8.5.6]), то справедливо следующее

4.25. Предложение. *Для каждого равномерного вложения* $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ *отображение* $P_\tau(f):(P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau)\to(P_\tau(Y),\mathcal{V}_\tau)$ *является равномерным вложением.*

За определением вполне ограниченного равномерного пространства, а также конструкцией пополнения равномерного пространства см. [8, гл.8]. Известно, что полное равномерное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено. Несмотря на то, что для тихоновского пространства X пространство $P_\tau(X)$ определялось как подпространство компакта $P(\beta X)$, справедливо следующее

4.26. Предложение. *Равномерное пространство* $(X,\mathcal{U})$ *вполне ограничено тогда и только тогда, когда вполне ограничено равномерное пространство* $(P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau)$*.*

Доказательство. Поскольку пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно вкладывается в $(P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau)$, то из полной ограниченности $(P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau)$ следует полная ограниченность пространства $(X,\mathcal{U})$.

Теперь, если $(X,\mathcal{U})$ – вполне ограниченное равномерное пространство, тогда его пополнение $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{U}})$ компактно. По предложению 4.26, пространство $(P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau)$ равномерно вкладывается в компактное пространство $P_\tau(\tilde{X})=P(\tilde{X})$ и, следовательно, является вполне ограниченным равномерным пространством. Предложение доказано.

4.27. Замечание. Несмотря на то, что функтор $\hat{P}$ сохраняет полные метрические пространства, он, вообще говоря, не сохраняет полных равномерных пространств. Это следует из того, что для несчетного множества A равномерное пространство $(\hat{P}(\mathbb{R}^A),\hat{\mathcal{U}})$ не полно (здесь $\mathcal{U}$ – равномерность произведения на $\mathbb{R}^A$). Действительно, пусть $\mu\in\hat{P}(\mathbb{R})$ – любая мера на $\mathbb{R}$ с некомпактным носителем. Для каждого конечного $B\subset A$ положим $\mu_B=\otimes_{\alpha\in A}\mu_\alpha\in\hat{P}(\mathbb{R}^A)$, где

$$\mu_\alpha=\begin{cases}\mu, & \text{для } \alpha\in B;\\ \delta_0, & \text{для } \alpha\notin B.\end{cases}$$

Можно показать, что $\{\mu_\alpha\}_{B\subset A}$ – направленность Коши в $\hat{P}(\mathbb{R}^A)$, не имеющая предельной точки.

Автору не известно, сохраняет ли функтор P_τ полные равномерные пространства.

Напомним, что топологическое пространство X называется вещественно полным [8, 3.11], если оно гомеоморфно замкнутому подмножеству произведения $\mathbb{R}^A$ для некоторого A. Пространство X называется полным по Дьедонне [8, с.676], если X допускает полную равномерность, совместимую с топологией. Известно, что каждое линделёфово пространство вещественно полно, и каждое метризуемое пространство полно по Дьедонне. В связи с замечанием 4.27 интересным представляется

4.28. Вопрос. Сохраняют ли функторы P_τ и $\hat{P}$ вещественно полные пространства, либо пространства, полные по Дьедонне?

Мы закончим этот параграф следующим простым предложением, которое вытекает из предложения 4.17.

4.29. Предложение. *Для каждого равномерного пространства* $(X,\mathcal{U})$ *отображение* $\alpha : (P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau) \times (P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau) \times [0,1] \to (P_\tau(X),\mathcal{U}_\tau)$, *определенное формулой* $\alpha(\mu,\eta,t) = t\mu + (1-t)\eta$, *является равномерно непрерывным.*

1. Банах Т.О. *Топология пространств вероятностных мер, I: функторы P_τ и $\hat{P}$* // Матем. Студії. 1995, вип. 5.
2. Аль-Кассас Ю. *Метризуемость и паракомпактность пространств вероятностных мер* // Вестн. Московского ун-та. 1993, No 1. С.14–17.
3. Садовничий Ю.В. *О метрике на пространствах вероятностных мер* //Вестн. МГУ. Сер. Матем. Мех. 1994, No 4. С.31–35.
4. Садовничий Ю.В. *О пополнении метрических пространств вероятностных мер*//Вестн. МГУ. Сер. Матем. Мех. 1994, No 5. С.28–32.
5. Садовничий Ю.В. *Равномерные пространства вероятностных мер* //Вестн. МГУ. Сер. Матем. Мех. 1995, No 2. С.86–88.
6. Садовничий Ю.В. *О равномерности на пространствах вероятностных мер*//Сборник кафедры общей топологии и геометрии МГУ. – М.: Изд-во МГУ, 1995.
7. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
9. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
10. Федорчук В.В. *Вероятностные меры в топологии* // УМН. 1991. Т.46. Вып.1. С.41–80.
11. Варадарайн В.С. *Меры на топологических пространствах* // Мат. сб. 1961. Т.55. No 1. С.35–100.
12. Swirszcz T. *Monadic functors and convexity* // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Mat., Astronom. et Phys. 1974. V.22. No 1. P.39–42.
13. Канторович Л.В. *О перемещении масс* // ДАН СССР. 1942. Т.37, вып.7–8. С.227–229.
14. Федорчук В.В. *Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т.54. No 2. С.396–418.
15. Isbell J.R. *On finite-dimensional uniform spaces* // Pacific J. Math. 1959. V.9. P.107–121.

Механіко-математичний факультет, Львівський університет,

Університетська 1, Львів, 290602, Україна

Надійшло 1.10.1994;
Після переробки 24.01.95.