Математичні студії
випуск 5

УДК 515.12

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, I: ФУНКТОРЫ $\mathcal{P}_\tau$ И $\hat{P}$.

Т.О. Банах

Abstract. T. Banakh, *Topology of probability measure spaces, I: The functors P_τ and $\hat{P}$* // Matematychni Studii. **5** (1995) P.65–87.

For a Tychonoff space X, the constructions $\hat{P}(X)$ and $P_\tau(X)$ of the spaces of probability Radon measures and probability τ-smooth measures on X are considered. It is proved that the constructions $\hat{P}$ and P_τ determine functors in the category of Tychonoff spaces, which extend the functor P of probability measures in the category of compacta. In this part we investigate general topological properties of the spaces $\hat{P}(X)$ and $P_\tau(X)$, as well as categorial properties of the functors $\hat{P}$ and P_τ.

0. Введение

Пространства вероятностных мер – классический объект, изучаемый с различных точек зрения в теории меры, функциональном анализе, теории вероятностей, топологии, теории категорий. Данная статья является первой частью большой работы (результаты которой анонсированы в [1]), посвященной изучению пространств вероятностных мер на топологических пространствах, в частности, пространств вероятностных τ-гладких и вероятностных радоновских мер. Наши интересы затрагивают, в основном, топологические и категорные аспекты теории меры и наиболее созвучны обзору [2], где изучается функтор $P : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ пространства вероятностных мер в категории компактов (мы будем использовать современную терминологию, подразумевая под словом "компакт" компактное хаусдорфово пространство).

В связи с изучением пространств вероятностных мер, естественно возникает проблема продолжения функтора P с категории компактов на более широкие категории, в частности, на категорию $\mathcal{T}ych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Одно из таких продолжений P_β предложил А.Ч. Чигогидзе [3]: Для тихоновского пространства X рассмотрим пространство $P_\beta(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \operatorname{supp}(\mu) \subset X \subset \beta X\}$, где βX – стоунчеховская компактификация X, а $\operatorname{supp}(\mu)$ – носитель меры μ. Конструкция $P_\beta(X)$ порождает функтор $P_\beta : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$, продолжающий функтор

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18B30, 28A33, 28C15, 54B30, 54H05.

Дане дослідження підтримане Державним комітетом по науці і технологіях Украни

$P : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$. Другая конструкция рассмотрена в [2] В.В. Федорчуком, который отметил, что функтор $P \circ \beta : \mathcal{T}ych \to \mathcal{C}omp$, ставящий в соответствие тихоновскому пространству X пространство $P(\beta X)$ тоже продолжает функтор $P : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$.

Функторы P_β и $P \circ \beta$, однако, обладают рядом недостатков. В частности, пространство $P_\beta(X)$ слишком узко и не содержит многих естественных счетно-аддитивных мер на X (мер, носитель которых некомпактен), а пространство $P(\beta X)$, напротив, слишком широко, содержит все конечно-аддитивные меры на X, и в результате, функтор $P \circ \beta$ не сохраняет многих специфических свойств пространства X, в частности, сильно поднимает вес (хотя и не поднимает плотности).

Таким образом, естественно расматривать пространства мер, промежуточные между пространствами $P_\beta(X)$ и $P(\beta X)$.

С этой целью, для тихоновского пространства X рассмотрим следующие два пространства вероятностных мер:

$$\hat{P}(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu_*(X) = 1\} \quad \text{и} \quad P_\tau(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu^*(X) = 1\},$$

где $\mu_*(X) = \sup\{\mu(B) \mid X \supset B$ – борелевское подмножество $\beta X\}$ и $\mu^*(X) = \inf\{\mu(B) \mid X \subset B$ – борелевское подмножество $\beta X\}$ – соответственно нижняя и верхняя μ-меры множества X в βX. (В дань исторической традиции, мы используем обозначения $\hat{P}(X)$ и $P_\tau(X)$, а не $P_*(X)$ и $P^*(X)$, которые, казалось-бы, более естественны). Очевидно, что $P_\beta(X) \subset \hat{P}(X) \subset P_\tau(X) \subset P(\beta X)$ для каждого тихоновского пространства X, и $P_\beta(X) = \hat{P}(X) = P_\tau(X) = P(\beta X)$, если пространство X компактно.

Меры, принадлежащие пространствам $\hat{P}(X)$ и $P_\tau(X)$, допускают эквивалентные описания как в терминах счетно-аддитивных мер на пространстве X, так и в терминах линейных функционалов на банаховом пространстве $C_b(X)$ ограниченных непрерывных действительных функций на X. Прежде чем привести точные формулировки, напомним некоторые определения.

Счетно-аддитивная конечная мера μ, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ борелевских подмножеств топологического пространства X, называется

(i) *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$;
(ii) *регулярной*, если $\mu(A) = \sup\{\mu(Z) \mid A \supset Z$ – замкнутое подмножество $X\}$ для каждого борелевского подмножества $A \subset X$;
(iii) *радоновской*, если $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid A \supset K$ – компактное подмножество $X\}$ для каждого борелевского подмножества $A \subset X$ (в [4] радоновские мары называются плотными мерами);
(iv) *τ-гладкой*, если для любой монотонно убывающей напрвленности $\{Z_\alpha\}$ замкнутых подмножеств X с пустым пересечением $\bigcap_\alpha Z_\alpha$, числовая направленность $\{\mu(Z_a)\}$ стремится к нулю (см. [4]).

Далее под мерой на топологическом пространстве мы будем подразумевать счетно-аддитивную борелевскую меру. Легко видеть, что каждая радоновская мера на хаусдорфовом пространстве регулярная и τ-гладкая. Более того, регулярная мера μ на хаусдорфовом пространстве X является радоновской тогда и только тогда, когда $\mu(X) = \sup\{\mu(K) \mid K$ – компактное подмножество $X\}$.

Пусть X – тихоновское пространство. Для каждой меры $\mu \in P_\tau(X)$ определим меру $\tilde{\mu}$ на X формулой $\tilde{\mu}(A) = \mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid A \subset B$ – борелевское подмножество $\beta X\}$, где A – борелевское подмножество X. Известно [5], либо [2, 1.11] (см. также замечание 1.2), что, определенная таким образом мера $\tilde{\mu}$ на X является τ-гладкой. Обратно, каждая вероятностная τ-гладкая мера $\tilde{\mu}$ на X определяет меру $\mu \in P_\tau(X)$, посредством формулы $\mu(A) = \tilde{\mu}(A \cap X)$, где $A \in \mathcal{B}(\beta X)$. При этом соответствии, радоновские меры и только они переходят в меры на βX, принадлежащие множеству $\hat{P}(X)$. Поэтому меры из множества $\hat{P}(X)$ мы будем называть радоновскими, а из множества $P_\tau(X)$ – τ-гладкими.

Через $C_b(X)$ обозначим банахово пространство всех ограниченных непрерывных на X вещественных функций, наделенное нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, $f \in C_b(X)$. Не вдаваясь в определение интеграла, заметим, что всякая вероятностная регулярная мера μ на X однозначно задает интеграл $\int_\mu$ – неотрицательный линейный функционал на $C_b(X)$ с единичной нормой (значение интеграла $\int_\mu$ на функции f мы будем обозначать через $\int_\mu f$, либо просто через $\mu(f)$). При этом (см. [4])

(i) мера μ – τ-плотная тогда и только тогда, когда $\mu(f_\alpha) \to 0$ для всякой монотонно убывающей направленности $\{f_\alpha\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящейся к нулю;

(ii) мера μ – радоновская тогда и только тогда, когда $\mu(f_\alpha) \to 0$ для любой направленности $\{f_\alpha\} \subset C_b(X)$ равномерно на компактах стремящейся к нулю и состоящей из функций, ограниченных в совокупности.

Аналогично, мера $\mu \in P(\beta X)$ принадлежит множеству $P_\tau(X)$ тогда и только тогда, когда $\mu(f_\alpha) \to 0$ для всякой монотонно убывающей направленности $\{f_\alpha\} \subset C(\beta X)$, поточечно сходящейся к нулю на множестве $X \subset \beta X$.

Покажем, что конструкции пространств $P_\tau(X)$ и $\hat{P}(X)$ функториальны в категории $\mathcal{T}ych$. Поскольку $\hat{P}(X) \subset P_\tau(X) \subset P(\beta X)$ для каждого тихоновского пространства X и $P \circ \beta : \mathcal{T}ych \to \mathcal{C}omp$ – функтор на категории $\mathcal{T}ych$ тихоновских пространств [2], то для проверки функториальности конструкций $\hat{P}$ и P_τ, достаточно показать, что для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ тихоновских пространств $P(\beta f)(P_\tau(X)) \subset P_\tau(Y)$ и $P(\beta f)(\hat{P}(X)) \subset \hat{P}(Y)$, где $\beta f : \beta X \to \beta Y$ – стоун-чеховская компактификация отображения f (см. [6, 3.66]). Если $\mu \in P_\tau(X)$, то $\mu^*(X) = 1$, и, следовательно, $\mu(B) = 1$ для всякого борелевского множества B, $X \subset B \subset \beta X$. Тогда для любого борелевского множества B', $Y \subset B' \subset \beta Y$, $P(\beta f)(\mu)(B') = \mu((\beta f)^{-1}(B')) = 1$, ибо $(\beta f)^{-1}(B')$ – борелевское подмножество βX, содержащее X. Отсюда следует, что $P(\beta f)(\mu) \in P_\tau(Y)$, т.е. $P(\beta f)(P_\tau(X)) \subset P_\tau(Y)$.

Если $\mu \in \hat{P}(X)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(K) > 1-\varepsilon$. Тогда $f(K) \subset Y$ – компакт в Y такой, что $P(\beta f)(\mu)(f(K)) = \mu((\beta f)^{-1}(f(K))) \geq \mu(K) > 1-\varepsilon$. Следовательно, мера $P(\beta f)(\mu)$ принадлежит множеству $\hat{P}(Y)$, т.е. $P(\beta f)(\hat{P}(X)) \subset \hat{P}(Y)$. Положим $P_\tau(f) = P(\beta f)|P_\tau(X) : P_\tau(X) \to P_\tau(Y)$ и $\hat{P}(f) = P(\beta f)|\hat{P}(X) : \hat{P}(X) \to \hat{P}(Y)$. Таким образом, нами доказана

0.1. Теорема. *Конструкции P_τ и $\hat{P}$ являются ковариантными функторами в категории $\mathcal{T}ych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений, продолжающими функтор $P : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$.*

Отметим, что мы могли определить функторы $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ и $\hat{P} : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ внутренним образом, без привлечения стоун-чеховских компактификаций. Именно, для тихоновского пространства X пространство $P_\tau(X)$ состоит из вероятностных регулярных τ-гладких мер на X, а топология на $P_\tau(X)$ порождается предбазисом, состоящим из множеств вида $\{\mu \in P_\tau(X) : |\mu(\varphi) - \mu_0(\varphi)| < 1\}$, где $\mu_0 \in P_\tau(X)$ и $\varphi \in C_b(X)$. Если $f : X \to Y$ – непрерывное отображение тихоновских пространств, то отображение $P_\tau(f) : P_\tau(X) \to P_\tau(Y)$ определяется формулой $P_\tau(f)(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$, где $\mu \in P_\tau(X)$ и A – борелевское подмножество Y. Тогда $\hat{P}(X)$ – подпространство $P_\tau(X)$, состоящее из вероятностных радоновских мер, а $\hat{P}(f)$ – ограничение отображения $P_\tau(f)$ на множество $\hat{P}(X)$. Используя обходной путь (через стоун-чеховские компактификации) мы избавились от необходимости проверки того, что определенные таким образом конструкции P_τ и $\hat{P}$ действительно определяют функторы в категории $\mathcal{T}ych$.

Прежде чем перейти к изложению конкретных результатов, отметим, что для ряда пространств, например для пространств X, которые являются борелевскими множествами в своей стоун-чеховской компактификации, каждая τ-гладкая мера является радоновской. В этом случае, пространства $P_\tau(X)$ и $\hat{P}(X)$ совпадают. Более общо, это имеет место для так называемых универсально измеримых пространств, то есть пространств X, которые измеримы в некоторой компактификации γX относительно любой меры $\mu \in P(\gamma X)$. Кроме абсолютных борелевских пространств, абсолютно измеримыми являются, например, аналитические и коаналитические пространства [7, 2.2.12].

1. Категорные свойства функтора P_τ.

В этом параграфе мы исследуем категорные свойства функтора P_τ, а также некоторые общетопологические свойства пространств $P_\tau(X)$.

Начнем мы со следующего простого замечания.

1.1. Лемма. *Пусть X – тихоновское пространство. Если $\mu \in P_\tau(X)$, тогда $\mu(A) = \mu(B)$ для любых двух борелевских подмножеств $A, B \subset \beta X$ таких, что $A \cap X = B \cap X$.*

Доказательство. Пусть $A, B \subset \beta X$ – такие борелевские множества, что $A \cap X = B \cap X$. Тогда $|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) - \mu(A \cap B) - \mu(B \setminus A)| = |\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A)| \le \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$. Поскольку $A \cap X = B \cap X$, то $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset \beta X \setminus X$. Если $\mu \in P_\tau(X)$, тогда $\mu_*(\beta X \setminus X) = 0$, следовательно, $\mu(A \triangle B) = \mu_*(A \triangle B) \le \mu_*(\beta X \setminus X) = 0$, а значит, $|\mu(A) - \mu(B)| \le \mu(A \triangle B) = 0$, т.е. $\mu(A) = \mu(B)$. Лемма доказана.

1.2. Замечание. Из леммы 1.1 вытекает следующий факт, о котором уже упоминалось во введении: каждая мера $\mu \in P_\tau(X)$ порождает вероятностную меру $\tilde{\mu}$ на X, посредством формулы $\tilde{\mu}(A) = \mu(B)$, где B – любое борелевское подмножество βX такое, что $B \cap X = A$, а A – борелевское подмножество X. При этом, мера $\tilde{\mu}$ является τ-гладкой. Действительно, для каждой монотонно убывающей направленности $\{Z_\alpha\}$ непустых замкнутых множеств X, с пустым пересечением, направленность $\{\bar{Z}_\alpha\}$ их замыканий в βX также монотонно убывает. Далее, поскольку $\{\bar{Z}_\alpha\}$ – центрированное семейство замкнутых подмножеств компакта βX, то оно имеет непустое пересечение $Z = \bigcap_\alpha \bar{Z}_\alpha$ [6, 3.1.1]. Поскольку $Z \cap X = (\cap_\alpha \bar{Z}_\alpha) \cap X = \cap_\alpha(\bar{Z}_\alpha \cap X) = \cap_\alpha Z_\alpha = \emptyset$, то $Z \subset \beta X \setminus X$. Вспоминая, что $\mu \in P_\tau(X)$, получаем $\mu(Z) = 0$. Из регулярности меры μ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество U, $Z \subset U \subset \beta X$, что $\mu(U) < \varepsilon$. Из [6, 3.1.5] вытекает, что поскольку $\cap_\alpha \bar{Z}_\alpha = Z \subset U$, то $Z_{\alpha_0} \subset U$ для некоторого α_0. Следовательно, $\mu(\bar{Z}_{\alpha_0}) \leq \mu(U) < \varepsilon$, а значит, $\tilde{\mu}(Z_{\alpha_0}) = \mu(\bar{Z}_{\alpha_0}) < \varepsilon$. Поскольку направленность $\{Z_\alpha\}$ монотонно убывает, то $\tilde{\mu}(Z_\beta) \leq \tilde{\mu}(Z_{\alpha_0}) < \varepsilon$ для всех $\beta \geq \alpha_0$. Но это значит, что числовая направленность $\{\tilde{\mu}(Z_\alpha)\}$ стремится к нулю, т.е. мера $\tilde{\mu}$ на X – τ-гладкая.

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется совершенным, если оно замкнуто и прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ является компактом.

1.3. Теорема. *Функтор $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ сохраняет класс совершенных отображений.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ – совершенное отображение тихоновских пространств. Тогда продолжение $\beta f : \beta X \to \beta Y$ отображения f (которое мы далее будем называть стоун-чеховской компактификацией отображения f) обладает следующим свойством: $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$ [6, 3.7.15]. Рассмотрим отображение $P(\beta f) : P(\beta X) \to P(\beta Y)$. Мы докажем, что $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus P_\tau(X)) \subset P(\beta Y) \setminus P_\tau(Y)$. Действительно, пусть $\mu \in P(\beta X) \setminus P_\tau(X)$, т.е. $\mu^*(X) < 1$. Это значит, что существует такой компакт $K \subset \beta X \setminus X$, что $\mu(K) > 0$. Тогда $\beta f(K) \subset \beta Y \setminus Y$ – такой компакт, что $P(\beta f)(\mu)(\beta f(K)) = \mu((\beta f)^{-1}(\beta f(K))) \geq \mu(K) > 0$. Следовательно, $P(\beta f)(\mu)^*(Y) < 1$, т.е. $P(\beta f)(\mu) \notin P_\tau(Y)$. Таким образом, $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus P_\tau(X)) \subset P(\beta Y) \setminus P_\tau(Y)$. Поскольку $P(\beta f) : P(\beta X) \to P(\beta Y)$ – отображение компактов, то из последнего включения следует, что отображение $P_\tau(f) = P(\beta f)|P_\tau(X) : P_\tau(X) \to P_\tau(Y)$ – совершенно. Теорема доказана.

1.4. Теорема. *Функтор $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ сохраняет класс вложений.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ – топологическое вложение тихоновских пространств и $\beta f : \beta X \to \beta Y$ – стоун-чеховская компактификация отображения f. Легко видеть, что $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus f(X)$. Положим $A = \{\mu \in P(\beta Y) \mid \mu^*(f(X)) = 1\}$. Аналогично доказательству теоремы 1.3, можно показать, что $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus P_\tau(X)) \subset P(\beta Y) \setminus A$. Ясно, что $P(\beta f)(P_\tau(X)) \subset A$. Таким образом, отображение $P_\tau(f) = P(\beta f)|P_\tau(X) : P_\tau(X) \to A$ – собственно. Покажем, что оно также инъективно, откуда будет следовать, что $P_\tau(f) : P_\tau(X) \to P_\tau(Y)$ – вложение.

Пусть $\mu, \eta \in P_\tau(X)$ – две различные меры. Тогда существует такое замкнутое множество $Z \subset \beta X$, что $\mu(Z) \neq \eta(Z)$. Мы утверждаем, что $P_\tau(f)(\mu)(\beta f(Z)) \neq P_\tau(f)(\eta)(\beta f(Z))$, откуда будет следовать, что меры $P_\tau(f)(\mu), P_\tau(f)(\eta) \in P_\tau(Y)$ различны. Действительно, положив $Z' = (\beta f)^{-1}(\beta f(Z))$, отметим, что, по определению, $P_\tau(f)(\mu)(\beta f(Z)) = \mu(Z')$ и $P_\tau(f)(\eta)(\beta f(Z)) = \eta(Z')$. Поскольку f – вложение, то $Z' \cap X = Z \cap X$. Тогда, согласно лемме 1.1, $P_\tau(f)(\mu)(\beta f(Z)) = \mu(Z') = \mu(Z) \neq \eta(Z) = \eta(Z') = P_\tau(f)(\eta)(\beta f(Z))$, т.е. меры $P_\tau(f)(\mu), P_\tau(f)(\eta) \in P_\tau(Y)$ различны. Теорема доказана.

Из теорем 1.3, 1.4 немедленно вытекает

1.5. Следствие. *Функтор $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ сохраняет класс замкнутых вложений.*

Поскольку функтор P_τ сохраняет вложения, то для пары $X \subset Y$ тихоновских пространств мы будем отождествлять пространство $P_\tau(X)$ с подмножеством $\{\mu \in P_\tau(Y) \mid \mu^*(X) = 1\}$ в $P_\tau(Y)$. Отметим, что при этом отождествлении, множество $\hat{P}(X) \subset P_\tau(X)$, состоящее из вероятностных радоновских мер на X переходит в подмножество $\{\mu \in P_\tau(Y) \mid \mu_*(X) = 1\} \subset P_\tau(Y)$. Отметим также, что из теоремы 1.4 следует, что конструкция пространства $P_\tau(X)$ фактически не зависит от компактификации X, т.е. для любой компактификации γX пространства X пространство $\{\mu \in P(\gamma X) \mid \mu^*(X) = 1\}$ естественно гомеоморфно $P_\tau(X)$. Как мы увидим в §2, при этом гомеоморфизме, множество $\{\mu \in P(\gamma X) \mid \mu_*(X) = 1\}$ переводится в пространство $\hat{P}(X)$ вероятностных радоновских мер на X.

Напомним, что носителем меры $\mu \in P(X)$ на компактном пространстве X называется множество $\mathrm{supp}(\mu) = \cap\{F \mid F$ – замкнутое подмножество X такое, что $\mu(F) = 1\}$. При этом выполняется условие $\mu(\mathrm{supp}(\mu)) = 1$, т.е. носитель меры μ – это наименьшее замкнутое множество единичной μ-меры. Если X – тихоновское пространство, то под носителем вероятностной τ-гладкой меры $\mu \in P_\tau(X)$ на X мы иногда будем подразумевать также множество $\mathrm{supp}(\mu) \cap X$.

Автору не известно, сохраняет ли функтор P_τ инъективные отображения. Что касается отображений сюръективных, то функтор P_τ их, вообще говоря, не сохраняет. Это видно из следующего примера: пусть $f : D \to [0,1]$ – биективное отображение дискретного пространства D на отрезок $[0,1]$. Тогда стандартная мера Лебега на $[0,1]$ не имеет прообраза при отображении $P_\tau(f) : P_\tau(D) \to P[0,1]$. Это следует из того, что множество D, являясь открытым в своей стоун-чеховской компактификации, измеримо относительно любой меры $\mu \in P(\beta D)$. Следовательно, любая τ-гладкая мера на D является радоновской, и, поскольку пространство D дискретно, атомарной (об атомарных мерах см. [8, §2]). Но образ атомарной меры при отображении $P_\tau(f)$ – мера атомарная, и, следовательно, не равна мере Лебега на $[0,1]$.

Вместе с тем, функтор P_τ сохраняет одно свойство отображений, из которого, в компактном случае, вытекает сюръективность.

1.6. Предложение. *Пусть $f : X \to Y$ – отображение, для которого образ*

$f(X)$ всюду плотен в Y. Тогда образ $P_\tau(f)(P_\tau(X))$ всюду плотен в $P_\tau(Y)$.

Доказательство. Очевидно, что образ $P_\tau(f)(P_\tau(X))$ содержит множество $P_\omega(f(X)) = \{\mu \in Y : |\operatorname{supp}(\mu)| < \infty$ и $\operatorname{supp}(\mu) \subset f(X)\}$, которое всюду плотно в $P(\beta Y) \supset P_\tau(Y)$.

1.7. Теорема. *Функтор P_τ сохраняет прообразы, т.е. для любого отображения $f : X \to Y$ тихоновских пространств и любого подмножества $A \subset Y$ $P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(A)) = P_\tau(f^{-1}(A))$.*

Доказательство. Включение $P_\tau(f^{-1}(A)) \subset P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(A))$ тривиально. Покажем, что $P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(A)) \subset P_\tau(f^{-1}(A))$. Это будет следовать из вложения $P_\tau(f)(P_\tau(X) \setminus P_\tau(f^{-1}(A))) \subset P_\tau(Y) \setminus P_\tau(A)$. Пусть $\mu \in P_\tau(X) \setminus P_\tau(f^{-1}(A))$, т.е. $\mu^*(f^{-1}(A)) < 1$. Это значит, что существует такой компакт $K \subset X \setminus f^{-1}(A))$, что $\mu(K) > 0$. Тогда $f(K)$ – компакт в $Y \setminus A$ такой, что $P_\tau(f)(\mu)(f(K)) = \mu(f^{-1}(f(K))) \geq \mu(K) > 0$, т.е. $P_\tau(f)(\mu)(A) < 1$, и, как следствие, $P_\tau(f)(\mu) \notin P_\tau(A)$. Теорема доказана.

Говорят, что сохраняющий вложения функтор $F : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ сохраняет (замкнутые) пересечения, если для любого тихоновского пространства X и семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ его (замкнутых) подмножеств выполняется равенство $F(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} F X_\alpha$.

1.8. Замечание. В отличие от функтора $\hat{P}$, который сохраняет счетные пересечения (см. теорему 2.15), функтор P_τ не сохраняет даже конечных пересечений. Это видно из следующего примера: пусть $X \subset [0,1]$ – подмножество отрезка с $\lambda^*(X) = 1$ и $\lambda_*(X) = 0$, где λ – стандартная мера Лебега на $[0,1]$. Тогда $\lambda^*([0,1] \setminus X) = 1$. Следовательно, $\lambda \in P_\tau(X) \cap P_\tau([0,1] \setminus X)$. Однако, $P_\tau(X \cap ([0,1] \setminus X)) = P_\tau(\emptyset) = \emptyset$.

Вместе с тем, справедливо

1.9. Предложение. *Пусть X – тихоновское пространство и $A, B \subset X$ – два его подмножества, одно из которых борелевское. Тогда $P_\tau(A \cap B) = P_\tau(A) \cap P_\tau(B)$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что множество $B \subset X$ – борелевское. Пусть $\tilde{B} \subset \beta X$ – такое борелевское подмножество βX, что $\tilde{B} \cap X = B$. Очевидно, что $P_\tau(A \cap B) \subset P_\tau(A) \cap P_\tau(B) \subset P_\tau(A) \cap P_\tau(\tilde{B})$. Покажем, что выполняется также и обратное включение. Зафиксируем меру $\mu \in P_\tau(A) \cap P_\tau(\tilde{B})$ и отметим, что $A \cap B = A \cap \tilde{B}$. Чтобы доказать, что $\mu \in P_\tau(A \cap B)$ достаточно показать, что $\mu^*(A \cap \tilde{B}) = 1$. Пусть $K \subset \beta X$ – любой компакт такой, что $K \subset \beta X \setminus (A \cap \tilde{B}) = (\beta X \setminus A) \cup (\beta X \setminus \tilde{B})$. Наша цель – показать, что $\mu(K) = 0$. Представим компакт K в виде объединения $K = K_1 \cup K_2$ двух борелевских множеств $K_1 = K \setminus \tilde{B}$ и $K_2 = K \cap \tilde{B}$. Поскольку $\mu \in P_\tau(\tilde{B})$, то $\mu(K_1) = 0$. Далее, отметим, что $K_2 \subset \beta X \setminus A$. Поскольку $\mu \in P_\tau(A)$ и K_2 – борелевское подмножество такое, что $K_2 \cap A = \emptyset$, то $\mu(K_2) = 0$. Следовательно, $\mu(K) = \mu(K_1) + \mu(K_2) = 0$. Таким образом, $\mu \in P_\tau(A \cap B)$, и значит, $P_\tau(A \cap B) = P_\tau(A) \cap P_\tau(B)$. Предложение доказано.

1.10. Теорема. *Функтор $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ сохраняет пересечения замкнутых подмножеств, т.е. для любого тихоновского пространства X и его замкнутых подмножеств X_α, $\alpha \in A$, $P_\tau(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} P_\tau(X_\alpha)$.*

Доказательство. Включение $P_\tau(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in A} P_\tau(X_\alpha)$ очевидно. Пусть $\mu \in \bigcap_{\alpha\in A} P_\tau(X_\alpha)$. Чтобы доказать, что $\mu \in P_\tau(\cap_{\alpha\in A}X_\alpha)$, нужно показать, что $\mu^*(\cap_{\alpha\in A}X_\alpha) = 1$, или, что эквивалентно, что для любого борелевского множества $B \subset \beta X$, $\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \subset B$, выполняется $\mu(B) = 1$. Пусть $\bar{X}_\alpha$ – замыкание множества X_α в βX. Поскольку множество X_α замкнуто в X, то $\bar{X}_\alpha \cap X = X_\alpha$. Поскольку $\mu \in P_\tau(X_\alpha)$ для каждого α, то $\mu(\bar{X}_\alpha) = \mu^*(\bar{X}_\alpha) = 1$. Как следствие, $\mathrm{supp}(\mu) \subset \bigcap_{\alpha\in A} \bar{X}_\alpha$. Поскольку $\mu(\mathrm{supp}(\mu)) = 1$, то $\mu(\cap_{\alpha\in A}\bar{X}_\alpha) = 1$. Поскольку множество $\bigcap_{\alpha\in A} \bar{X}_\alpha \subset \beta X$ – замкнуто и $\big(\cap_{\alpha\in A}\bar{X}_\alpha\big)\cap X = \bigcap_{\alpha\in A}(\bar{X}_\alpha \cap X) = \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha$, то для каждого борелевского множества B, $\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \subset B \subset \beta X$, согласно лемме 1.1, $\mu(B) \geq \mu(\cap_{\alpha\in A}\bar{X}_\alpha) = 1$. Отсюда, $\mu^*(\cap_{\alpha\in A}X_\alpha) = 1$, т.е. $\mu \in P_\tau(\cap_{\alpha\in A}X_\alpha)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос непрерывности функтора P_τ. Пусть A – направленное частично упорядоченное множество (направленность означает, что для любых $\alpha, \beta \in A$ существует такое $\gamma \in A$, что $\gamma \geq \alpha$ и $\gamma \geq \beta$).

Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ – обратный спектр, индексированный множеством A и состоящий из тихоновских пространств. Через $\varprojlim X_\alpha$ мы обозначаем предел этого спектра, а через $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, – предельные проекции.

Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ порождает обратный спектр $\{P_\tau(X_\alpha), P_\tau(p_\alpha^\beta)\}$, предел которого мы обозначаем через $\varprojlim P_\tau(X_\alpha)$, а предельные проекции через $\mathrm{pr}_\alpha : \varprojlim P_\tau(X_\alpha) \to P_\tau(X_\alpha)$. Отображение $P_\tau(p_\alpha) : P_\tau(\varprojlim X_\alpha) \to P_\tau(X_\alpha)$ порождает отображение $R : P_\tau(\varprojlim X_a) \to \varprojlim P_\tau(X_\alpha)$.

Хорошо известно, что если все X_α компактны, тогда отображение R – гомеоморфизм. Это следует из непрерывности функтора P в категории компактов [9, VII.3.11].

1.11. Теорема. *Отображение $R : P_\tau(\varprojlim X_\alpha) \to \varprojlim P_\tau(X_\alpha)$ является вложением. Если предельные проекции $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ – плотны (т.е. $p_\alpha(\varprojlim X_\alpha)$ всюду плотно в X_α), тогда образ $R(P_\tau(\varprojlim X_\alpha))$ всюду плотен в $\varprojlim P_\tau(X_\alpha)$.*

Доказательство. Рассмотрим стоун-чеховскую компактификацию $\{\beta X_\alpha, \beta(p_\alpha^\beta)\}$ спектра $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ и отметим, что $\varprojlim X_\alpha$ вкладывается в $\varprojlim \beta X_\alpha$. Причем, если предельные проекции $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ плотны, то образ пространства $\varprojlim X_\alpha$ всюду плотен в $\varprojlim \beta X_\alpha$. По непрерывности функтора $P : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$, соответствующее отображение $\bar{R} : P(\varprojlim \beta X_\alpha) \to \varprojlim P(\beta X_\alpha)$ является гомеоморфизмом. Используя тот факт, что функтор P_τ сохраняет вложения, получаем, что отображение $R : P_\tau(\varprojlim X_\alpha) \to \varprojlim P_\tau(X_\alpha)$ вкладывается в гомеоморфизм $\bar{R}$ и, следовательно, является вложением. Более того, поскольку функтор P_τ сохраняет отображения с всюду плотным образом, то, если предельные проекции p_α плотны, то образ пространства $P_\tau(\varprojlim X_\alpha)$ при вложении R всюду плотен в $\varprojlim P_\tau(X_\alpha)$. Теорема доказана.

Далее мы рассматриваем свойство сохранения гомотопий, которое, в компактном случае, тесно связано с непрерывностью функторов [10].

Для тихоновских пространств X и Y положим $j_{XY} : P_\tau(X)\times Y \to P_\tau(X\times Y)$ – отображение, определяемое формулой $j_{XY}(\mu, y) = P_\tau(i_y)(\mu)$, $\mu \in P_\tau(X)$, $y \in Y$, где $i_y : X \to X \times Y$ – вложение X в произведение $X \times Y$ в качестве слоя: $i_y(x) = (x, y)$, $x \in X$.

1.12. Предложение. *Отображение $j_{XY} : P_\tau(X)\times Y \to P_\tau(X\times Y)$ является замкнутым вложением.*

Доказательство. Пусть X, Y – тихоновские пространства и βX и βY – их стоун-чеховские компактификации. Согласно [9, VII.5.11 и VII.5.18], отображение $j_{\beta X,\beta Y} : P(\beta X) \times \beta Y \to P(\beta \times \beta Y)$ является вложением компактов. Теперь предложение следует из очевидного равенства $j_{\beta X,\beta Y}(P_\tau(X) \times Y) = j_{\beta X,\beta Y}(P(\beta X) \times \beta Y) \cap P_\tau(X \times Y)$.

1.13. Следствие. *Функтор P_τ сохраняет гомотопии, т.е. для любой гомотопии $H_t : X \to Y$ гомотопия $P_\tau(H_t) : P_\tau(X) \to P_\tau(Y)$ непрерывна как отображение $P_\tau(H_{(\cdot)}) : P_\tau(X) \times [0, 1] \to P_\tau(Y)$.*

Доказательство. Пусть $H : X \times [0, 1] \to Y$ – гомотопия. Тогда отображение $P_\tau(H_{(\cdot)}) : P_\tau(X) \times [0, 1] \to P_\tau(Y)$ – непрерывно, как композиция $P_\tau(H_{(\cdot)}) = P_\tau(H)\circ j_{X,[0,1]}$ непрерывных отображений $j_{X,[0,1]} : P_\tau(X)\times[0, 1] \to P_\tau(X\times[0, 1])$ и $P_\tau(H) : P_\tau(X \times [0, 1]) \to P_\tau(Y)$.

Напомним определение естественного преобразования функторов. Пусть $F_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $i = 1, 2$ – два ковариантных функтора из категории $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ в категорию $\mathcal{C}' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}')$. Семейство морфизмов $\Phi = \{\varphi_X : F_1(X) \to F_2(X),\ X \in \mathcal{O}\} \subset \mathcal{M}'$ называется естественным преобразованием функтора F_1 в функтор F_2, если для всякого морфизма $f : X \to Y$ категории $\mathcal{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(X) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & F_2(Y). \end{tikzcd}$$

Для каждого тихоновского пространства X положим $\delta_X : X \to P_\tau(X)$ – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ меру Дирака $\delta(x)$, сосредоточенную в точке x.

1.14. Теорема. *Семейство $\delta = \{\delta_X\}$ определяет естественное преобразование тождественного функтора* $\mathrm{Id} : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ *в функтор $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$, причем каждая компонента $\delta_X : X \to P_\tau(X)$ является замкнутым вложением.*

Доказательство. Тривиально проверяется, что $\delta = \{\delta_X\}$ – естественное преобразование функтора Id в функтор P_τ. То, что каждое отображение $\delta_X : X \to P_\tau(X)$ является замкнутым вложением следует из [4, II, §3].

1.15. Теорема. *Функтор P_τ сохраняет плотность тихоновских пространств, т.е. $d(P_\tau(X)) = d(X)$ для любого бесконечного тихоновского пространства X.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$ всюду плотное подмножество мощности $d(X)$ в бесконечном тихоновском пространстве X. Тогда множество $B = \{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i\delta(x_i) \mid n \in \mathbb{N}$ и для каждого $1 \le i \le n$ r_i – рационально и $x_i \in A\}$ – всюду плотно в $P_\tau(X)$. Кроме того, ясно, что мощность множества B равна $d(X)$.

1.16. Теорема. *Функтор P_τ сохраняет вес тихоновских пространств, т.е. $w(P_\tau(X)) = w(X)$ для любого бесконечного тихоновского пространства X.*

Доказательство. Пусть X – бесконечное тихоновское пространство. Согласно [6, 3.5.2], существует такая компактификация cX пространства X, что $w(cX) = w(X)$. По теореме 1.4, пространство $P_\tau(X)$ вкладывается в компакт $P_\tau(cX) = P(cX)$. Поскольку функтор P сохраняет вес [9, VII.3.9], то $w(P(cX)) = w(cX) = w(X)$. Следовательно, $w(P_\tau(X)) \le w(X)$, и, поскольку X вкладывается в $P_\tau(X)$, то $w(X) \le w(P_\tau(X))$. То есть, $w(P_\tau(X)) = w(X)$. Теорема доказана.

Из [4, II, §4] следует

1.17. Теорема. *Функтор P_τ сохраняет класс метризуемых пространств.*

Напомним, что p-паракомпактами называются прообразы метризуемых пространств при совершенных отображениях [11]. Из теорем 1.3 и 1.7 следует

1.18. Теорема. *Функтор P_τ сохраняет класс p-паракомпактов.*

Пусть X – топологическое пространство. Для каждого счетного ординала α определим семейства $\mathcal{F}_\alpha(X)$ и $\mathcal{G}_\alpha(X)$ борелевских подмножеств следующим образом: семейство $\mathcal{F}_0(X)$ (семейство $\mathcal{G}_0(X)$) состоит из всех замкнутых (открытых) множеств пространства X, семейство $\mathcal{F}_\alpha(X)$ (семейство $\mathcal{G}_\alpha(X)$) состоит из всех счетных объединений (счетных пересечений) множеств из $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi(X)$ (из $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{G}_\xi(X)$) для нечетных ординалов α и из всех счетных пересечений (счетных объединений) множеств из $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi(X)$ (из $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{G}_\xi(X)$) для четных ординалов. Очевидно, что для любого $A \in \mathcal{F}_\xi(X)$ ($A \in \mathcal{G}_\xi(X)$) выполняется $X \setminus A \in \mathcal{G}_\xi(X)$ ($X \setminus A \in \mathcal{F}_\xi(X)$).

Для топологического пространства X через $\mathcal{B}_0(X)$ обозначается σ-алгебра всех бэровских подмножеств X, то есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все функционально замкнутые подмножества X. Бэровские подмножества классифицируются следующим образом: $\mathcal{M}_0(X)$ ($\mathcal{A}_0(X)$) – класс всех функционально замкнутых (функционально открытых) подмножеств пространства X. Для каждого счетного ординала α, $\mathcal{M}_\alpha(X)$ ($\mathcal{A}_\alpha(X)$) – семейство подмножеств X, представляемых в виде счетных пересечений (объединений) множеств из $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{A}_\xi(X)$ (из $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi(X)$).

Для борелевского подмножества A тихоновского пространства X определим функцию $\dot\chi_A : P_\tau(X) \to [0,1]$ формулой $\dot\chi_A(\mu) = \mu^*(A)$.

1.19. Лемма. *Пусть X – тихоновское пространство, A – подмножество X, α – четный ординал, ξ – ординал, и $a \in \mathbb{R}$. Тогда*

(1) *если $A \in \mathcal{M}_\xi(X)$, то $\dot\chi_A^{-1}([a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) \ge a\} \in \mathcal{M}_\xi(P_\tau(X))$;*

(2) *если* $A \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, *то* $\dot{\chi}_A^{-1}([a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) \geq a\} \in \mathcal{F}_\alpha(P_\tau(X))$;
(3) *если* $A \in \mathcal{A}_\xi(X)$, *то* $\dot{\chi}_A^{-1}((a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) > a\} \in \mathcal{A}_\xi(P_\tau(X))$;
(4) *если* $A \in \mathcal{G}_\alpha(X)$, *то* $\dot{\chi}_A^{-1}((a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) > a\} \in \mathcal{G}_\alpha(P_\tau(X))$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение (3) леммы. Пусть U – функционально открытое подмножество X и $\tilde{U}$ – такое функционально открытое подмножество βX, что $\tilde{U} \cap X = U$. Несложно построить такую поточечно сходящуюся к характеристической функции $\chi_{\tilde{U}} : \beta X \to [0,1]$ последовательность $\{f_n : \beta X \to [0,1]\}_{n=1}^\infty$ непрерывных функций, что $f_n|\beta X \setminus \tilde{U} \equiv 0$, $f_n^{-1}(\{1\}) \subset f_{n+1}^{-1}(\{1\})$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{n=1}^\infty f_n^{-1}(\{1\}) = \tilde{U}$. Согласно лемме 1.1, $\mu^*(U) = \mu(\tilde{U})$ для любой меры $\mu \in P_\tau(X)$. Следовательно, $\dot{\chi}_U^{-1}((a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(U) > a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) > a\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(f_n) > a\}$ – функционально открытое в $P_\tau(X)$ множество.

Если Z – функционально замкнутое подмножество X, тогда множество $X \setminus Z$ – функционально открыто. Положив $\tilde{U}$ - функционально открытое подмножество βX такое, что $\tilde{U} \cap X = X \setminus Z$, по только что доказанному получим, что множество $\{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) > 1-a\}$ – функционально открыто в $P_\tau(X)$. Тогда $\dot{\chi}_Z([a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(Z) \geq a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\beta X \setminus \tilde{U}) \geq a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) \leq 1-a\}$ – дополнение к функционально открытому множеству $\{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) > 1-a\}$, и, следовательно, является множеством функционально замкнутым в $P_\tau(X)$.

Покажем теперь, что для любого замкнутого множества $F \subset X$, множество $\dot{\chi}_F^{-1}([a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(F) \geq a\}$ – замкнуто в $P_\tau(X)$. Пусть $\bar{F}$ – замыкание множества F в X. Тогда (см. [4]) множество $\{\mu \in P_\tau(\beta X) \mid \mu(\bar{F}) \geq a\}$ – замкнуто в $P(\beta X)$. По лемме 1.1, для любой меры $\mu \in P_\tau(X)$ $\mu^*(F) = \mu(\bar{F})$. Следовательно, множество $P_\tau(X) \cap \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(\bar{F}) \geq a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(F) \geq a\} = \dot{\chi}_F^{-1}([a,\infty))$ замкнуто в $P_\tau(X)$. Переходя к дополнениям, доказываем, что для любого открытого множества G в X множество $\dot{\chi}_G^{-1}((a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(G) > a\}$ – открыто в $P_\tau(X)$.

Таким образом, для $\xi = \alpha = 0$, лемма доказана.

Теперь допустим, что ξ – ординал. Предположим, что для каждого $a \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathcal{M}_{\xi'}(X)$, где $\xi' < \xi$, доказано, что $\dot{\chi}_A^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{M}_{\xi'}(P_\tau(X))$. Пусть $A \in \mathcal{M}_\xi(X)$. Тогда $A = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=1}^\infty A_n^m$, где $A_n^m \in \bigcup_{\xi'<\xi} \mathcal{M}_{\xi'}(X)$. Без ограничения общности, для каждого $n \in \mathbb{N}$, $A_n^1 \subset A_n^2 \subset \ldots$ и $\bigcup_{m=1}^\infty A_1^m \supset \bigcup_{m=1}^\infty A_2^m \supset \ldots$. Легко видеть, что $\dot{\chi}_A^{-1}([a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=1}^\infty \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A_n^m) \geq a - \frac{1}{n}\}$. По предположению трансфинитной индукции, для каждых $n, m \in \mathbb{N}$ $\{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A_n^m) \geq a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}_{\xi'}(P_\tau(X))$, где $\xi' < \xi$. Следовательно, $\dot{\chi}_A^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{M}_\xi(P_\tau(X))$.

Аналогичными рассуждениями доказываем, что для любого четного ординала α, $\dot{\chi}_A^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{F}_\alpha(P_\tau(X))$, если только $A \in \mathcal{F}_\alpha(X)$.

Если $A \in \mathcal{A}_\xi(X)$, то $P_\tau(X) \setminus \dot{\chi}_A^{-1}((a,\infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) \notin (a,\infty)\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) \leq a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(X \setminus A) \geq 1-a\} = \dot{\chi}_{X\setminus A}^{-1}([1-a,\infty))$. Поскольку $A \in \mathcal{A}_\xi(X)$, то $X \setminus A \in \mathcal{M}_\xi(X)$, и, следовательно, $\dot{\chi}_{X\setminus A}^{-1}([1-a,\infty)) \in$

$\mathcal{M}_\xi(P_\tau(X))$ и $\dot\chi_A^{-1}((a,\infty)) = P_\tau(X) \setminus \dot\chi_{X\setminus A}^{-1}([1-a,\infty)) \in \mathcal{A}_\xi(X)$.

Аналогично показываем, что для любого четного ординала α, если $A \in \mathcal{G}_\alpha(X)$, то $\dot\chi_A^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{G}_\alpha(P_\tau(X))$. Лемма доказана.

1.20. Следствие. *Функтор P_τ сохраняет полные по Чеху пространства.*

Доказательство. Пусть тихоновское пространство X полно по Чеху. Тогда $X = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ – G_δ-множество в βX (здесь $U_n \subset \beta X$, $n \in \mathbb{N}$, – открытые в βX множества). Тогда $P_\tau(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(X) = 1\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(U_n) > 1 - \frac{1}{n}\}$. По лемме 1.18, множества $\{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(U_n) > 1 - \frac{1}{n}\}$ – открытые в $P(\beta X)$, то есть, $P_\tau(X)$ – G_δ-множество в $P(\beta X)$. По [6, 3.9.1], пространство $P_\tau(X)$ – полно по Чеху.

1.21. Следствие. *Если A – бэровское подмножество тихоновского пространства X, то функция $\dot\chi_A : P_\tau(X) \to [0,1]$ является измеримой относительно σ-алгебры бэровских подмножеств $P_\tau(X)$.*

1.22. Теорема. *Функтор P_τ сохраняет бэровские подмножества. Более того, для любого ординала ξ, если $A \in \mathcal{M}_\xi(X)$, то $P_\tau(A) \in \mathcal{M}_\xi(P_\tau(X))$; для любого четного ординала α, если $A \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, то $P_\tau(A) \in \mathcal{F}_\alpha(P_\tau(X))$.*

Пусть X – метрический компакт. Через $\mathcal{P}(X)$ мы обозначаем семейство проективных подмножеств X, т.е. наименьшее семейство, содержащее класс $\mathcal{B}(X)$ всех борелевских подмножеств X и удовлетворяющее следующим условиям:

(1) Для любого непрерывного отображения $f : A \to X$ множества $A \in \mathcal{P}(X)$ образ $f(A)$ принадлежит классу $\mathcal{P}(X)$;

(2) для любого множества $A \in \mathcal{P}(X)$ его дополнение $X \setminus A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(X)$.

Семейство $\mathcal{P}(X)$ допускает представление $\mathcal{P}(X) = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(X)$, где $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{B}(X)$ – семейство борелевских множеств X; проективные множества класса $\mathcal{P}_{2n+1}(X)$ суть непрерывные образы множеств класса $\mathcal{P}_{2n}(X)$; проективные множества класса $\mathcal{P}_{2n}(X)$ – это дополнения к проективным множествам класса $\mathcal{P}_{2n-1}(X)$. При этом, для любого $n \ge 0$ $\mathcal{P}_{2n+1}(X) \subset \mathcal{P}_{2n+3}(X) \cap \mathcal{P}_{2n+4}(X)$ [12, §38]. Проективные множества классов $\mathcal{P}_1(X)$ и $\mathcal{P}_2(X)$ имеют специальные названия: их называют соответственно аналитическими и коаналитическими множествами.

1.23. Теорема. *Функтор P_τ сохраняет проективные подмножества метрических компактов. Более того, для любого метрического компакта X и любого $n \ge 1$, если $A \in \mathcal{P}_{2n-1}(X)$, то $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_{2n+2}(P(X))$.*

Доказательство. Пусть X – метрический компакт. Через $\exp(X)$ обозначается гиперпространство непустых замкнутых подмножеств X, наделенное топологией Виеториса [9]. Отметим, что для любого $0 \le a \le 1$ множество $R(a) = \{(\mu, K) \in P(X) \times \exp(X) \mid \mu(K) \ge a\}$ замкнуто в $P(X) \times \exp(X)$. Действительно, пусть $(\mu, K) \in P(X) \times \exp(X)$ – предельная точка множества $R(a)$. По определению, $\mu(K) = \inf\{\mu(f) \mid f \in C(X),\ f \ge 0,\ f|K \equiv 1\}$. Пусть $f : X \to [0,1]$ – любая функция с $f|K \equiv 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

множество $\langle f^{-1}(1-\frac{\varepsilon}{2},1]\rangle = \{B \in \exp(X) \mid B \subset f^{-1}(1-\frac{\varepsilon}{2},1]\}$ открыто в $\exp(X)$. Поскольку (μ, K) – предельная точка множества $R(a)$, то существует такая пара $(\eta, C) \in R(a)$, что $|\eta(f)-\mu(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $C \subset f^{-1}(1-\frac{\varepsilon}{2},1]$. Тогда $\mu(f) > \eta(f)-\frac{\varepsilon}{2} = \int_X f\,d\eta-\frac{\varepsilon}{2} \geq \int_C f\,d\eta-\frac{\varepsilon}{2} > (1-\frac{\varepsilon}{2})\eta(C)-\frac{\varepsilon}{2} \geq (1-\frac{\varepsilon}{2})a-\frac{\varepsilon}{2} \geq a-\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\mu(f) \geq a$, откуда получаем, что $\mu(K) \geq a$ и $(\mu, K) \in R(a)$.

Теперь пусть $n \geq 1$ и $A \in \mathcal{P}_{2n-1}(X)$. Тогда $P(X) \setminus P_\tau(A) = \{\mu \in P(X) \mid \mu^*(A) < 1\} = \{\mu \in P(X) \mid \mu_*(X \setminus A) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\{\mu \in P(X) \mid$ существует компакт $K \subset X \setminus A$ с $\mu(K) \geq \frac{1}{m}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{pr}_1(G_m)$, где $G_m = \{(\mu, K) \in P(X) \times \exp(X) \mid K \subset X \setminus A,\ \mu(K) \geq \frac{1}{m}\} = R(\frac{1}{m}) \cap (P(X) \times \exp(X \setminus A))$, а $\mathrm{pr}_1 : P(X) \times \exp(X) \to P(X)$ – проекция на первый сомножитель. Поскольку $A \in \mathcal{P}_{2n-1}(X)$, то $X \setminus A \in \mathcal{P}_{2n}(X)$, и согласно [13], $\exp(X \setminus A) \in \mathcal{P}_{2n}(\exp(X))$. Следовательно, $P(X) \setminus P_\tau(A) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$ и $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_{2n+2}(P(X))$. Теорема доказана.

1.24. Замечание. Из теоремы 1.22 следует, что для любого $A \in \mathcal{P}_0(X)$ $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_0(P(X))$. Более того, из теоремы 2.32 вытекает, что для любого коаналитического множества $A \subset X$ $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_3(P(X))$. Это следует из того, что коаналитические подмнодjества метрических компактов измеримы относительно любой меры и поэтому, для коаналитического множества $A \subset X$ выполняется $P_\tau(A) = \hat{P}(A)$.

Напомним теперь введенное С. Эйленбергом и Дж. Муром [14]

1.25. Определение. Тройкой на категории $\mathcal{C}$ называется тройка $\mathbb{T} = (T, \delta, \psi)$, состоящая из ковариантного функтора $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ и естественных преобразований $\delta : Id \to T$ (единица) и $\psi : T^2 \to T$ (умножение), для которых выполняются условия:

$$\psi \circ T\delta = \psi \circ \delta T = \mathrm{id}_T \quad \text{и} \quad \psi \circ \psi T = \psi \circ T\psi.$$

Функтор T, который может быть включен в тройку $\mathbb{T}$, называется монадой на категории $\mathcal{C}$.

Хорошо известно [2], что функтор P является монадой на категории $\mathcal{C}omp$ компактов. В самом деле, он включается в тройку $\mathbb{P} = (P, \delta, \psi)$, где δ – преобразование Дирака, а компонента $\psi_X : P^2(X) \to P(X)$ умножения ψ определяется формулой $\psi_X(M)(f) = M(F_f)$ для $f \in C(X)$, $M \in P^2(X)$, где $F_f : P(X) \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, действующая посредством формулы $F_f(\mu) = \mu(f)$, $\mu \in P(X)$.

Наша цель – показать, что функтор $P_\tau : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ тоже включается в монаду. Для этого очевидно, достаточно доказать, что для любого тихоновского пространства X $\delta_{\beta X}(X) \subset P_\tau(X)$ и $\psi_{\beta X}(P_\tau^2(X)) \subset P_\tau(X)$, где $\delta_{\beta X}$ и $\psi_{\beta X}$ – компоненты естественных преобразований, входящих в тройку $\mathbb{P} = (P, \delta, \psi)$ (здесь и далее символ P_τ^2 обозначает композицию функторов $P_\tau \circ P_\tau$). Первое включение $\delta_{\beta X}(X) \subset P_\tau(X)$ следует из теоремы 1.14. Для доказательства второго включения предположим, что $M \in P_\tau^2(X) \subset P^2(\beta X)$, т.е. $M^*(P_\tau(X)) = 1$. Пусть $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$ – монотонно убывающая направленность непрерывных функций на βX, поточечно стремящаяся к нулю на множестве $X \subset \beta X$. Согласно [4], $\psi_{\beta X}(M) \in P_\tau(X)$, если мы покажем, что числовая направленность $\{\psi_{\beta X}(M)(\varphi_\alpha)\}$ стремиться к нулю. Отметим, что $\{F_{\varphi_\alpha} : P(\beta X) \to \mathbb{R}\}$ – монотонно убывающая направленность непрерывных функций на $P(\beta X)$, поточечно стремящаяся к нулю на множестве $P_\tau(X) \subset P(\beta X)$. Поскольку M – τ-гладкая мера на $P_\tau(X)$, то согласно [4], $\{M(F_{\varphi_\alpha})\} \to 0$. Но $\psi_{\beta X}(M)(\varphi_\alpha) = M(F_{\varphi_\alpha})$ для каждого α. Следовательно, направленность $\{\psi_{\beta X}(M)(\varphi_\alpha)\}$ стремится к нулю, т.е. $\psi_{\beta X}(P^2_\tau(X)) \subset P_\tau(X)$. Положим $\delta_X = \delta_{\beta X}|X : X \to P_\tau(X)$ и $\psi_X = \psi_{\beta X}|P^2_\tau(X) : P^2_\tau(X) \to P_\tau(X)$. Легко видеть, что $\mathbb{P}_\tau = (P_\tau, \delta, \psi)$ – тройка на категории $\mathcal{T}ych$. Таким образом доказана

1.26. Теорема. *Функтор $P_\tau : Tych \to \mathcal{T}ych$ является монадой на категории $\mathcal{T}ych$, продолжающей монаду $P : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$.*

1.27. Лемма. *Для любого тихоновского пространства X и его подмножества Y выполняется равенство $\psi_X^{-1}(P_\tau(Y)) = P^2_\tau(Y)$.*

Доказательство. Включение $\psi_X(P^2_\tau(Y)) \subset P_\tau(Y)$ следует из монадичности функтора P_τ. Докажем теперь обратное включение. Пусть $M \in P^2(\beta X)$ – такая мера, что $\psi_{\beta X}(M) \notin P_\tau(Y)$. Тогда существует такой компакт $K \subset \beta Y \setminus Y$, что $\psi_{\beta X}(M)(K) > 0$. Рассмотрим семейство функций $\Phi = \{f \in C(\beta X) \mid 0 \leq f \leq 1,\ f|K \equiv 1\}$, снабженное естественным частичным порядком $\leq$. Семейство Φ направлено вниз, т.е. для любых функций $f, g \in \Phi$ $\min(f, g) \in \Phi$, и, рассматриваемое как направленность, поточечно стремится к нулю на множестве Y. Тогда направленность $\{F_f : P(\beta X) \to \mathbb{R}\}_{f\in\Phi}$ монотонно убывает и стремится к нулю на множестве $P_\tau(Y)$. Если бы мера M принадлежала множеству $P^2_\tau(Y)$ тогда бы направленность $\{M(F_f)\}_{f\in\Phi}$ стремилась к нулю. Но $M(F_f) = \psi_{\beta X}(M)(f) \geq \psi_{\beta X}(M)(K) > 0$. Полученное противоречие показывает, что $M \notin P^2_\tau(Y)$. Таким образом, $\psi_X^{-1}(P_\tau(Y)) = P^2_\tau(Y)$.

1.28. Следствие. *Для каждого тихоновского пространства X компонента $\psi_X : P^2_\tau(X) \to P_\tau(X)$ умножения является открытым и совершенным отображением.*

Доказательство следует из леммы 1.27 и того факта, что $\psi_{\beta X} : P^2(\beta X) \to P(\beta X)$ является открытым отображением компактов [2, 7.8], либо [15].

Напомним, что отображение $p : X \to Y$ топологических пространств называется *мягким* для класса метрических пространств, если для любого метрического пространства A, его замкнутого множества $B \subset A$ и отображений $g : A \to Y$ и $f : B \to X$ с $p \circ g = g|B$ существует такое отображение $F : A \to X$, что $F|B = f$ и $p \circ F = g$.

1.29. Теорема. *Для каждого метрического пространства X отображение $\psi_X : P^2_\tau(X) \to P_\tau(X)$ является мягким для класса метрических пространств.*

Доказательство вытекает из следствия 1.27, метризуемости пространства $P^2_\tau(X)$ (см. теорему 1.17), теоремы Майкла о селекции [16, §1.4 и упр.1.4.2] и того факта, что прообраз $\psi_X^{-1}(\mu) \subset P^2_\tau(X)$ любой меры $\mu \in P_\tau(X)$ является выпуклым компактом в $P^2_\tau(X)$.

Мы будем говорить, что отображение $p : E \to B$ гомеоморфно тривиальному Q-расслоению, если существует такой гомеоморфизм $f : E \to B \times Q$, что $\mathrm{pr}_B \circ f = p$, где $\mathrm{pr}_B : B \times Q \to B$ – естественная проекция. Напомним, что $Q = [-1, 1]^\omega$ – гильбертов кирпич.

1.30. Теорема. *Для метрического сепарабельного пространства $X \neq \{*\}$ отображение $\psi_X | P^2_\tau(X) \setminus \delta^2(X) : P^2_\tau(X) \setminus \delta^2(X) \to P_\tau(X) \setminus \delta(X)$ гомеоморфно тривиальному Q-расслоению.*

Доказательство. Пусть cX – метрическая компактификация пространства $X \neq \{*\}$. В [15] доказано, что отображение $\psi_X | P^2(cX) \setminus \delta^2(cX) : P^2(cX) \setminus \delta^2(cX) \to P(cX) \setminus \delta(cX)$ является тривиальным Q-расслоением. Теперь теорема следует из леммы 1.27.

§2. Категорные свойства функтора $\hat{P}$.

В этом параграфе мы исследуем категорные свойства функтора $\hat{P} : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ вероятностных радоновских мер.

Как уже упоминалось во введении, существует два эквивалентных подхода к описанию пространства $\hat{P}(X)$, где X – тихоновское пространство. Первый – через вложения в компактные пространтва: $\hat{P}(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu_*(X) = 1\} \subset P(\beta X)$. При втором подходе $\hat{P}(X)$ определяется как пространство всех вероятностных радоновских мер на пространстве X. В дальнейшем, в зависимости от ситуации, без специальных оговорок, мы будем использовать тот, либо другой подход к описанию пространства $\hat{P}(X)$.

2.1. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет класс инъективных отображений.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ – инъективное отображение и $\mu_1, \mu_2 \in \hat{P}(X)$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$ для некоторого борелевского множества $A \subset X$. Поскольку меры μ_1, μ_2 – радоновские, то существует такой компакт $K \subset A$, что $\mu_1(K) \neq \mu_2(K)$. Тогда $f(K)$ – компакт в Y и $\hat{P}(f)(\mu_1)(f(K)) = \mu_1(f^{-1}(f(K))) = \mu_1(K) \neq \mu_2(K) = \hat{P}(f)(\mu_2)(f(K))$, т.е. $\hat{P}(f)(\mu_1) \neq \hat{P}(f)(\mu_2)$. Теорема доказана.

2.2. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет класс совершенных отображений.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ – совершенное отображение тихоновских пространств. Тогда продолжение $\beta f : \beta X \to \beta Y$ отображения f обладает следующим свойством: $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$ [6, 3.7.15]. Покажем, что $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus \hat{P}(X)) \subset P(\beta Y) \setminus \hat{P}(Y)$. Пусть $\mu \in P(\beta X)$ и $P(\beta f)(\mu) \in \hat{P}(Y)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset Y \subset \beta Y$, что $P(\beta f)(\mu)(K) > 1 - \varepsilon$. Поскольку f – собственное отображение, то $(\beta f)^{-1}(K) = f^{-1}(K)$ – компакт в X (см. [6, 3.7.2]). Тогда $P(\beta f)(\mu)(K) = \mu((\beta f)^{-1}(K)) = \mu(f^{-1}(K)) > 1 - \varepsilon$. Следовательно, $\mu \in \hat{P}(X)$ и $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus \hat{P}(X)) \subset P(\beta Y) \setminus \hat{P}(Y)$. Поскольку $P(\beta f) : P(\beta X) \to P(\beta Y)$ – отображение компактов, то из последнего включения следует, что отображение $\hat{P}(f) = P(\beta f) | \hat{P}_\beta(X) : \hat{P}(X) \to \hat{P}(Y)$ – совершенно. Теорема доказана.

2.3. Следствие. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет класс замкнутых вложений.*

Поскольку $\hat{P}$ – подфунктор функтора P_τ, то из теоремы 1.4 следует

2.4. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет класс вложений.*

Таким образом, функтор $\hat{P}$ сохраняет класс инъективных отображений и класс (замкнутых) вложений. С сюръективными отображениями дело обстоит не так гладко.

Мы говорим, что отображение $f : X \to Y$ *обладает борелевской селекцией*, если существует такое (не обязательно непрерывное) отображение $s : Y \to X$, что $f \circ s = \mathrm{id}_Y$, и для любого открытого множества $U \subset X$ $s^{-1}(U)$ – борелевское подмножество пространства Y.

Отображение $f : X \to Y$ *обладает локальными борелевскими селекциями*, если для любого открытого множества $U \subset X$ существует такая борелевская селекция $s : Y \to X$ отображения f, что $s(f(U)) \subset U$.

2.5. Пример. Пусть $p : \mathfrak{c} \to [0,1]$ – биективное отображение дискретного пространства $\mathfrak{c}$ на отрезок. Тогда отображение $\hat{P}(p) : \hat{P}(\mathfrak{c}) \to \hat{P}([0,1])$ не сюръективно (мера Лебера на [0,1] не имеет прообраза).

Вместе в тем справедливо

2.6. Предложение. *Пусть $f : X \to Y$ – отображение сепарабельных метрических пространств, обладающее борелевской селекцией. Тогда отображение $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \to \hat{P}(Y)$ – сюрвективно.*

Доказательство. Пусть $s : Y \to X$ – борелевская селекция отображения f. Для каждой меры $\mu \in \hat{P}(Y)$ положим η – вероятностная счетно-аддитивная мера на X, определенная условием $\eta(A) = \mu(f(A \cap s(Y)))$ для каждого борелевского множества $A \subset X$.

Покажем, что мера η – радоновская. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset X$ с $\eta(K) > 1 - \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку отображение $s : Y \to X$ – борелевски измеримо, по теореме Лузина [7, 2.3.5], существует замкнутое подмножество $C \subset Y$ такое, что $\mu(C) > 1 - \varepsilon/2$ и отображение $s|C : C \to X$ – непрерывно. Поскольку мера μ на Y – радоновская, то существует такой компакт $K \subset C$, что $\mu(C \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $s(K) \subset X$ – компакт. Более того, $\eta(s(K)) = \mu(f(s(K) \cap s(Y)) = \mu(f(s(K))) = \mu(K) > 1 - \varepsilon$. Таким образом, мера η на X – радоновская и $\hat{P}(f)(\eta) = \mu$. Теорема доказана.

2.7. Следствие. *Пусть $f : X \to Y$ – биективное непрерывное отображение сепарабельного борелевского пространства X на метрическое пространство Y. Тогда отображение $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \to \hat{P}(Y)$ – биективно.*

Доказательство. Инъективность отображения $\hat{P}(f)$ следует из теоремы 2.1. Сюрьективность $\hat{P}(f)$ следует из предложения 2.6, поскольку отображение $f^{-1} : Y \to X$ – борелевски измеримо [12, §39, IV].

Условие существования борелевской селекции в предложении 2.6 существенно. Действительно, рассмотрим

2.8. Пример. Пусть $Z \subset [0,1]$ – подмножество отрезка с внутренней мерой Лебега $\lambda_*(Z) = 0$ и внешней мерой $\lambda^*(Z) = 1$. Пусть $X = Z \times \{0\} \cup ([0,1] \setminus Z) \times \{1\}$ и $f : X \to [0,1]$ – проекция на первый сомножитель. Тогда мера Лебега λ на $[0,1]$ не имеет прообраза при отображении $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \to P([0,1])$.

Вместе с тем, функтор $\hat{P}$ сохраняет одно свойство отображений, из которого, в компактном случае, вытекает сюръективность.

2.9. Предложение. *Пусть $f : X \to Y$ – отображение, для которого образ $f(X)$ всюду плотен в Y. Тогда образ $\hat{P}(f)(\hat{P}(X))$ всюду плотен в $\hat{P}(Y)$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.6.

2.10. Предложение. *Пусть $f : X \to Y$ – открытое отображение сепарабельных метрических пространств, обладающее локальными борелевскими селекциями. Тогда отображение $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \to \hat{P}(Y)$ – сюръективно и открыто.*

Доказательство. По предложению 2.6, отображение $\hat{P}(f)$ – сюръективно. Покажем, что оно открыто. Согласно [4, II, §1] система множеств $\mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon) = \{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(U_i) - \mu_0(U_i) > -\varepsilon,\ 1 \le i \le n\}$, где $\varepsilon > 0$, $\mu_0 \in \hat{P}(X)$ и $U_1, \dots, U_n$ – открытые множества в X, образует базу топологии на $\hat{P}(X)$. Зафиксируем базисное множество $\mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$ и покажем, что его образ $\hat{P}(f)(\mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon))$ является окрестностью меры $\eta_0 = \hat{P}(f)(\mu_0) \in \hat{P}(Y)$. Для этого мы найдем сначала такую базисную окрестность $\mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon') \subset \mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$, что V_i, $1 \le i \le m$, – открытые попарно непересекающиеся подмножества X.

Обозначим через $\mathbf{n}$ n-элементное множество $\{1, \dots, n\}$. На множестве $\exp(\mathbf{n})$ всех непустых подмножеств $\mathbf{n}$ введём такое линейное упорядочение, что для любых $A, B \subset \mathbf{n}$, если $A \supset B$, то $A \le B$ (см. [17, §2.4, Теорема 4]). Отметим, что $|\exp(\mathbf{n})| < 2^n$. Положим $\varepsilon' = \varepsilon/2^{n+1}$. Для каждого $A \subset \mathbf{n}$ положим $U_A = \bigcap_{i \in A} U_i$. Индуктивно, для каждого $A \subset \mathbf{n}$ найдем такое открытое множество $V_A \subset X$, что $\bar{V}_A \subset U_A \setminus \bigcup_{B<A} \bar{V}_B$ и $\mu_0(V_A) > \mu_0(U_A \setminus \bigcup_{B<A} \bar{V}_B) - \varepsilon'$. Легко видеть, что для любого $A \subset \mathbf{n}$ $\mu_0(\bar{V}_A \setminus V_A) < \varepsilon'$ и, следовательно, $\mu_0(U_A) < \mu_0(V_A) + \sum_{B<A} \mu(\bar{V}_B) + \varepsilon' < \sum_{B<A} \mu_0(V_B) + 2^n\varepsilon'$. Кроме того, очевидно, что для $A \ne B$ $\bar{V}_A \cap \bar{V}_B = \emptyset$. Мы утверждаем, что $\mathcal{N}^*(\mu_0, \{V_A : A \subset \mathbf{n}\}, \varepsilon') \subset \mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$. Действительно, если $\mu \in \mathcal{N}^*(\mu_0, \{V_A : A \subset \mathbf{n}\}, \varepsilon')$, то $\mu(U_i) = \sum_{A \ni i} \mu(\bar{V}_A) + \mu(U_i \setminus \bigcup_{A \ni i} \bar{V}_A) \ge \sum_{A \ni i} \mu(\bar{V}_A) > \sum_{A \ni i} (\mu_0(V_A) - \varepsilon') > \sum_{A \ni i} \mu_0(V_A) - 2^n\varepsilon' > \mu_0(U_i) - 2^{n+1}\varepsilon' = \mu_0(U_i) - \varepsilon$, $1 \le i \le n$. То есть, $\mu \in \mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$.

Запишем множество $\mathcal{N}^*(\mu_0, \{V_A : A \subset \mathbf{n}\}, \varepsilon')$ в виде $\mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon')$, где $m = |\exp(\mathbf{n})|$. Через $\mathbf{m}$ обозначим m-элементное множество $\{1, \dots, m\}$. Введем на множестве $\exp(\mathbf{m})$ такое линейное упорядочение, что для любых $A, B \subset \mathbf{m}$, если $A \supset B$, то $A \le B$. Для каждого $A \subset \mathbf{m}$ положим $W'_A = \bigcap_{i \in A} f(V_i)$. Поскольку f – открытое отображение, то множества $W'_A \subset Y$ – открыты. Положим $\delta = \varepsilon'/2^{m+1}$. Индуктивно, для каждого $A \subset \mathbf{m}$ найдем такое открытое множество $W_A \subset Y$, что $\bar{W}_A \subset W'_A \setminus \bigcup_{B<A} \bar{W}_B$ и $\eta_0(W_A) > \eta_0(W'_A \setminus \bigcup_{B<A} \bar{W}_B) - \delta$. Легко видеть, что для любых различных $A, B \subset$

$\mathbf{m}$ множества $\bar{W}_A$ и $\bar{W}_B$ не пересекаются. Более того, для любого $A \subset \mathbf{m}$, $\eta_0((W'_A \setminus \bigcup_{B<A} W'_B) \setminus W_A) < \delta$. Мы утверждаем, что $\mathcal{N}^*(\eta_0, \{W_A : A \subset \mathbf{m}\}, \delta) \subset \hat{P}(f)\mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon'))$. Действительно, пусть $\eta \in \mathcal{N}^*(\eta_0, \{W_A : A \subset \mathbf{m}\}, \delta)$. Для каждого $A \subset \mathbf{m}$ и каждого $i \in A$ зафиксируем такую борелевскую селекцию $s_{A,i} : Y \to X$ отображения f, что $s_{A,i}(W_A) \subset V_i$. Пусть α_i^A, $i \in A$, – такие неотрицательные числа, что для любого $A \subset \mathbf{m}$ $\sum_{i \in A} \alpha_i^A = 1$ и $\alpha_i^A \eta_0(W_A) \geq \mu_0(f^{-1}(W_A) \cap V_i))$. Зафиксируем любую борелевскую селекцию $s_0 : Y \to X$ отображения f. Пусть μ – такая мера на X, что для каждого борелевского множества $C \subset X$

$$\mu(C) = \eta(f(s_0(Y \setminus \bigcup_{A \subset \mathbf{m}} W_A)) \cap C) + \sum_{A \subset \mathbf{m}} \sum_{i \in A} \alpha_i^A \eta(f(s_{A,i}(W_A) \cap C)).$$

Аналогично как в доказательстве предложения 2.6, можно показать, что μ – радоновская вероятностная мера на X, т.е. $\mu \in \hat{P}(X)$, и $\hat{P}(f)(\mu) = \eta$. Покажем, что $\mu \in \mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon')$. Действительно, $\mu(V_i) \geq \sum_{A \ni i} \alpha_i^A \eta(f(s_{A,i}(W_A) \cap V_i)) = \sum_{A \ni i} \alpha_i^A \eta(W_A) > \sum_{A \ni i} \alpha_i^A (\eta_0(W_A) - \delta) > \sum_{A \ni i} \alpha_i^A \eta_0(W_A) - 2^m \delta \geq \sum_{A \ni i} \mu_0(f^{-1}(W_A) \cap V_i) - 2^m \delta = \mu_0(f^{-1}(\bigcup_{A \ni i} W_A) \cap V_i) - 2^m \delta = \mu_0(f^{-1}(\bigcup_{A \ni i} W'_A) \cap V_i) - \mu_0(f^{-1}(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A)) - 2^m \delta = \mu_0(V_i) - 2^m \delta - \eta_0(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A)$. Осталось оценить значение $\eta_0(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A)$. По определению множеств W'_A, $\bigcup_{A \ni i} W'_A = W'_i$. Тогда $\eta_0(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A) = \eta_0(W'_i \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A) = \eta_0(\bigcup_{A \ni i} (W'_A \setminus \bigcup_{B<A} W'_B) \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A) \leq \sum_{A \ni i} \eta_0((W'_A \setminus \bigcup_{B<A} W'_B) \setminus W_A) < 2^m \delta$. Окончательно, получаем, что $\mu(V_i) > \mu_0(V_i) - 2^{m+1}\delta = \mu_0(V_i) - \varepsilon'$.

2.11. Предложение. *Пусть $f : X \to Y$ – отображение тихоновских пространств. Если $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \to \hat{P}(Y)$ – открытое отображение, то отображение f – также открыто.*

Доказательство буквально повторяет доказательство предложения 4.1 [18].

2.12. Замечание. В предположении континуум-гипотезы ($\aleph_1 = \mathfrak{c}$), условие сепарабельности в предложениях 2.6, 2.10 может быть опущено. Это следует из [12, §31, X,8] и того, что носитель любой радоновской меры на метрическом пространстве – сепарабелен.

2.13. Вопрос. Пусть $f : X \to Y$ – открытое сюръективное отображение сепарабельных борелевских пространств. Будет ли отображение $\hat{P}(f)$ открытым?

В [8, §3] будет дан положительный ответ на этот вопрос в случае, когда пространство X метризуемо полной метрикой.

Пусть A – подмножество тихоновского пространства X. Поскольку функтор $\hat{P}$ сохраняет вложения, мы будем отождествлять пространство $\hat{P}(A)$ с подмножеством пространства $\hat{P}(X)$.

2.14. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет прообразы, т.е. для любого отображения $f : X \to Y$ тихоновских пространств и любого подмножества $A \subset Y$ $\hat{P}(f)^{-1}(\hat{P}(A)) = \hat{P}(f^{-1}(A))$.*

Доказательство. Включение $\hat{P}(f^{-1}(A)) \subset \hat{P}(f)^{-1}(\hat{P}(A))$ тривиально. Покажем, что $\hat{P}(f)^{-1}(\hat{P}(A)) \subset \hat{P}(f^{-1}(A))$. Пусть $\mu \in \hat{P}(X)$ – мера, удовлетворяющая условию $\hat{P}(f)(\mu) \in \hat{P}(A)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\hat{P}(f)(\mu) \in \hat{P}(A)$, то существует компакт $K \subset A$ с $\hat{P}(f)(\mu)(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Множество $f^{-1}(K) \subset X$ – замкнуто, причем $\mu(f^{-1}(K)) = \hat{P}(f)(\mu)(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку мера μ – радоновская, то существует такой компакт $C \subset f^{-1}(K)$, что $\mu(f^{-1}(K) \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $C \subset f^{-1}(A)$ и $\mu(C) > 1 - \varepsilon$, т.е. $\mu \in \hat{P}(f^{-1}(A))$. Теорема доказана.

2.15. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет счетные пересечения, т.е. для любого тихоновского пространства X и его подмножеств $X_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, $\hat{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{P}(X_n)$.*

Доказательство. Включение $\hat{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{P}(X_n)$ очевидно. Теперь пусть $\mu \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{P}(X_n)$. Покажем, что $\mu \in \hat{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mu \in \hat{P}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такой компакт $K_n \subset X_n$, что $\mu(K_n) > 1 - \varepsilon/2^n$. Положим $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Нетрудно убедиться, что $K \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ и $\mu(K) > 1 - \varepsilon$, т.е. $\mu \in \hat{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n)$. Теорема доказана.

2.16. Замечание. Теорема 2.15 не верна для произвольного числа индексов. Действительно, пусть $X = [0,1]$ и $X_\alpha = [0,1] \setminus \{\alpha\}$, где $\alpha \in [0,1]$. Тогда для каждого $\alpha \in [0,1]$ мера Лебега λ принадлежит множеству $\hat{P}(X_\alpha)$. Но, $\bigcap_{\alpha\in[0,1]} X_\alpha = \emptyset$. То есть $\hat{P}(\bigcap_{\alpha\in[0,1]} X_\alpha) \neq \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \hat{P}(X_\alpha)$.

2.17. Лемма. *Пусть X – тихоновское пространство и $B \subset X$ – его борелевское подмножество. Тогда $\hat{P}(B) = P_\tau(B) \cap \hat{P}(X) \subset P(\beta X)$.*

Доказательство. Включение $\hat{P}(B) \subset P_\tau(B) \cap \hat{P}(X)$ очевидно. Пусть $\mu \in P_\tau(B) \cap \hat{P}(X)$. Тогда $\mu^*(B) = 1$ и $\mu_*(X) = 1$. Пусть $\tilde{B} \subset \beta X$ – любое борелевское множество такое, что $\tilde{B} \cap X = B$. Тогда $\mu(\tilde{B}) \geq \mu^*(B) = 1$. Поскольку мера μ – регулярна, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_1 \subset \tilde{B}$, что $\mu(\tilde{B} \setminus K_1) < \varepsilon/2$. По определению, из $\mu_*(X) = 1$ следует, что существует компакт $K_2 \subset X \subset \beta X$ такой, что $\mu(K_2) > 1 - \varepsilon/2$. Тогда $K = K_1 \cap K_2 \subset \tilde{B} \cap B = B$ – такой компакт в B, что $\mu(\beta X \setminus K) \leq \mu(\beta X \setminus K_1) + \mu(\beta X \setminus K_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, откуда, по произвольности $\varepsilon > 0$ следует $\mu_*(B) = 1$ и $\mu \in \hat{P}(B)$. Лемма доказана.

2.18. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет пересечения замкнутых подмножеств, т.е. для любого тихоновского пространства X и его замкнутых подмножеств X_α, $\alpha \in A$, $\hat{P}(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} \hat{P}(X_\alpha)$.*

Доказательство. Из теоремы 1.10 следует, что $P_\tau(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} P_\tau(X_\alpha)$. Тогда, по лемме 2.17, $\hat{P}(\cap_{\alpha\in A} X_\alpha) = P_\tau(\cap_{\alpha\in A} X_\alpha) \cap \hat{P}(X) = \bigcap_{\alpha\in A} P_\tau(X_\alpha) \cap \hat{P}(X) = \bigcap_{\alpha\in A} \hat{P}(X_\alpha)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос непрерывности функтора $\hat{P}$. Пусть A – направленное частично упорядоченное множество (направленность означает, что для любых $\alpha, \beta \in A$ существует такое $\gamma \in A$, что $\gamma \geq \alpha$ и $\gamma \geq \beta$).

Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ – обратный спектр, индексированный множеством A и состоящий из тихоновских пространств. Через $\varprojlim X_\alpha$ мы обозначаем предел этого спектра, а через $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, – предельные проекции.

Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ порождает обратный спектр $\{\hat{P}(X_\alpha), \hat{P}(p_\alpha^\beta)\}$, предел которого мы обозначаем через $\varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$, а предельные проекции через $\mathrm{pr}_\alpha : \varprojlim \hat{P}(X_\alpha) \to \hat{P}(X_\alpha)$. Отображения $\hat{P}(p_\alpha) : \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \to \hat{P}(X_\alpha)$ порождают отображение $R : \hat{P}(\varprojlim X_a) \to \varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$.

Хорошо известно, что если все X_α компактны, тогда отображение R – гомеоморфизм. Это следует из непрерывности функтора P в категории компактов [9, VII.3.11].

2.19. Теорема. *Отображение $R : \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \to \varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$ является вложением. Если предельные проекции $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ – плотны, тогда образ $R(\hat{P}(\varprojlim X_\alpha))$ всюду плотен в $\varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$. Если индексное множество A – счетно, тогда R – гомеоморфизм.*

Доказательство. Первые два утверждения доказываются аналогично соответствующим утверждениям теоремы 1.11.

Предположим, что множество A счетно и покажем, что отображение $R : \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \to \varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$ – гомеоморфизм. Для этого достаточно доказать сюръективность отображения R. Как и в доказательстве 1.11, вложим отображение R в гомеоморфизм $\bar{R} : P(\varprojlim \beta X_\alpha) \to \varprojlim P(\beta X_\alpha)$.

Зафиксируем нить $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A} \in \varprojlim \hat{P}(\beta X_\alpha)$ и покажем, что $\mu = \bar{R}^{-1}(\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}) \in \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \subset \hat{P}(\varprojlim \beta X_\alpha)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем биекцию $\xi : A \to \mathbb{N}$. Для каждого $\alpha \in A$ выберем такой компакт $K_\alpha \subset X_\alpha$, что $\mu_\alpha(K_\alpha) > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-\xi(\alpha)}$. Очевидно, что множество $K = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \varprojlim X_\alpha \mid p_\alpha(x_\alpha) \in K_\alpha,\ \alpha \in A\}$ – компактно. Более того, $\mu((\varprojlim X_\alpha) \setminus K) \le \bigcup_{\alpha\in A} \mu(p_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus K_\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in A} \mu_\alpha(X_\alpha \setminus K_\alpha) \le \sum_{\alpha\in A} \varepsilon \cdot 2^{-\xi(\alpha)} = \varepsilon$. Следовательно, отображение R сюрьективно и теорема доказана.

Из следствия 1.13 вытекает

2.20. Предложение. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет гомотопии, т.е. для любой гомотопии $H_t : X \to Y$ гомотопия $\hat{P}(H_t) : \hat{P}(X) \to \hat{P}(Y)$ непрерывна как отображение $\hat{P}(H_{(\cdot)}) : \hat{P}(X) \times [0,1] \to \hat{P}(Y)$.*

Сейчас мы рассмотрим операцию тензорного произведения вероятностных радоновских мер. Хорошо известно (см. [9, VIII,§1]), что если задано семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ компактов, тогда для любых вероятностных мер $\mu_\alpha \in P(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, существует единственная мера $\underset{\alpha\in A}{\otimes} \mu_\alpha \in P(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha)$ (называемая тензорным произведением мер μ_α) на произведении $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, удовлетворяющая условию: для любого конечного $B \subset A$ и любых борелевских множеств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$, где $Y_\alpha = X_\alpha$, если $\alpha \notin B$, выполняется $\underset{\alpha\in A}{\otimes} \mu_\alpha(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(Y_\alpha)$.

2.21. Предложение. *Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – семейство тихоновских пространств, $\{c\,X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – семейство их компактификаций и $\mu_\alpha \in \hat{P}(X_\alpha) \subset P(c\,X_\alpha)$, $\alpha \in A$, – семейство вероятностных радоновских мер. Если индексное множество A не более чем счетно, тогда $\underset{\alpha\in A}{\otimes} \mu_\alpha \in \hat{P}(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha) \subset P(\prod_{\alpha\in A} c\,X_\alpha)$.*

Доказательство. Покажем, что мера $\otimes_{\alpha\in A} \mu_\alpha$ принадлежит множеству $\hat{P}(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha) \subset P(\prod_{\alpha\in A} c\,X_\alpha)$. Для этого зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку множество A не более чем счетно, то существует инъекция $\xi : A \to \mathbb{N}$. Поскольку каждая мера $\mu_\alpha \in \hat{P}(X_\alpha)$ – радоновская, то для каждого $\alpha \in A$ существует такой компакт $K_\alpha \subset X_\alpha \subset cX_\alpha$, что $\mu_\alpha(cX_\alpha \setminus K_\alpha) < \varepsilon/2^{-\xi(\alpha)}$. Тогда для компакта $\prod_{\alpha\in A} K_\alpha \subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ выполняется неравенство $(\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha)(\prod_{\alpha\in A} cX_\alpha \setminus \prod_{\alpha\in A} K_\alpha) \le \sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha(cX_\alpha \setminus K_\alpha) < \sum_{\alpha\in A} \varepsilon/2^{-\xi(\alpha)} \le \varepsilon$. Следовательно, $\otimes_{\alpha\in A} \mu_\alpha \in \hat{P}(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha)$.

2.22. Замечание. Из предложения 2.21 и известных фактов о тензорном произведении вероятностных мер на компактах следует, что для любого не более чем счетного множества вероятностных радоновских мер $\mu_\alpha \in \hat{P}(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, на тихоновских пространствах X_α, существует единственная вероятностная радоновская мера $\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha \in \hat{P}(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha)$ (которую мы будем называть тензорным произведением мер μ_α) такая, что для любых борелевских множеств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$, выполняется равенство $(\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha)(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(Y_\alpha)$.

2.23. Замечание. Предложение 2.21 неверно, если индексное множество A несчетно. Действительно, если каждая мера $\mu_\alpha \in X_\alpha$, $\alpha \in A$, имеет некомпактный носитель $\operatorname{supp}_{cX_\alpha}(\mu_\alpha) \cap X_\alpha$, то, как можно показать, мера $(\bigotimes\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha)(K)$ любого компактного множества $K \subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \subset \prod_{\alpha\in A} cX_\alpha$ равна нулю.

Для каждого тихоновского пространства X положим $\delta_X : X \to \hat{P}(X)$ – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ меру Дирака $\delta(x)$, сосредоточенную в точке x.

Из теоремы 1.14 следует

2.24. Теорема. *Семейство $\delta = \{\delta_X\}$ определяет естественное преобразование тождественного функтора* $\mathrm{Id} : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$ *в функтор* $\hat{P} : \mathcal{T}ych \to \mathcal{T}ych$, *причем каждая компонента $\delta_X : X \to \hat{P}(X)$ является замкнутым вложением.*

Аналогично теореме 1.15 доказывается

2.25. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет плотность тихоновских пространств, т.е. $d(\hat{P}(X)) = d(X)$ для любого бесконечного тихоновского пространства X.*

Из утверждений 1.16—1.22, а также из леммы 2.17 следуют

2.26. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет вес тихоновских пространств, т.е. $w(\hat{P}(X)) = w(X)$ для любого бесконечного тихоновского пространства X.*

2.27. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет класс метризуемых пространств.*

2.28. Предложение. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет полные по Чеху пространства.*

2.29. Предложение. *Если A – бэровское подмножество тихоновского пространства X, то функция $\hat{\chi}_A : \hat{P}(X) \to [0,1]$, где $\hat{\chi}_A(\mu) = \mu(A)$, $\mu \in \hat{P}(X)$, является измеримой относительно σ-алгебры бэровских подмножеств $\hat{P}(X)$.*

2.30. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет бэровские подмножества. Более того, для любого ординала ξ, если $A \in \mathcal{M}_\xi(X)$, то $\hat{P}(A) \in \mathcal{M}_\xi(\hat{P}(X))$; для любого четного ординала α, если $A \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, то $\hat{P}(A) \in \mathcal{F}_\alpha(\hat{P}(X))$.*

Из теорем 2.2 и 2.27 следует

2.31. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет класс p-паракомпактов.*

2.32. Теорема. *Функтор $\hat{P}$ сохраняет проективные подмножества метрических компактов. Более того, для любого $n \geq 0$, если $A \in \mathcal{P}_{2n}(X)$, то $\hat{P}(A) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$.*

Доказательство. Пусть X – метрический компакт. Для $n = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 2.30. Через $\exp(X)$ обозначается гиперпространство непустых замкнутых подмножеств X, наделенное топологией Виеториса.

Теперь пусть $n \geq 1$ и $A \in \mathcal{P}_{2n}(X)$. Тогда $\hat{P}(A) = \{\mu \in P(X) \mid \mu_*(A) = 1\} = \{\mu \in P(X) \mid$ для любого $m \geq 1$ существует такой компакт $K \subset A$, что $\mu(K) \geq 1 - \frac{1}{m}\} = \bigcap_{m=1}^\infty \mathrm{pr}_1(E_m)$, где $E_m = \{(\mu, K) \in P(X) \times \exp(X) \mid K \subset A$ и $\mu(K) \geq 1 - \frac{1}{m}\}$ и $\mathrm{pr}_1 : P(X) \times \exp(X) \to P(X)$ – проекция на первый сомножитель. Положим $\exp(A) = \{C \in \exp(X) \mid C \subset A\}$. В [13] доказано, что $\exp(A) \in \mathcal{P}_{2n}(\exp(X))$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ $E_m = R(1 - \frac{1}{m}) \cap (P(X) \times \exp(A))$. Поскольку множество $R(1 - \frac{1}{m}) \subset P(X) \times \exp(X)$ – замкнуто (см. доказательство теоремы 1.22), то $E_m \in \mathcal{P}_{2n}(P(X) \times \exp(X))$. Следовательно, $\mathrm{pr}_1(E_m) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$ и $\hat{P}(A) = \bigcap_{m=1}^\infty \mathrm{pr}_1(E_m) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$ [12, §38, III, Теорема 3].

2.33. Замечание. Если A – аналитические подмножество компакта X, тогда $\hat{P}(A) \in \mathcal{P}_4(P(X))$. Это следует из теоремы 1.23 и равенства $\hat{P}(A) = P_\tau(A)$, которое является результатом того, что аналитические подмножества метрических компактов измеримы относительно любой меры.

1. Банах Т.О., Радул Т.М. *Про функтор ймовірносних мір* // Доп. АН України. 1994. No 8. C.16–20.
2. Федорчук В.В. *Вероятностные меры в топологии* // УМН. 1991. Т.46. Вып.1. С.41–80.
3. Чигогидзе А.Ч. *О продолжении нормальных функторов* // Вестник МГУ. Сер. мех-мат. 1984. No 6. С.23–26.
4. Варадарайн В.С. *Меры на топологических пространствах* // Мат. сб. 1961. Т.55. No 1. С.35–100.
5. Knowles J.G. *Measures on topological spaces* // Proc. London Math. Soc. 1967. V.17. No 1. P.139–156.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
7. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Мир, 1987.
8. Банах Т.О., Радул Т.Н. *Топология пространств вероятностных мер и геометрия их отображений*, препринт, 1994.
9. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
10. Банах Т.О., Телейко А.Б. *О независимости аксиом нормального функтора в категории компактов*, препринт, 1993.
11. Архангельский А.В. *Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства* // Мат. сб. 1965. Т.67, No 1. С.55–85.
12. Куратовский К. Топология, I. М.: Мир, 1966.
13. Banakh T. *Descriptive classes of sets and topological functors* // Укр. мат. журн. 1995.
14. Eilenberg S., Moore T. *Adjoint functors and triples* // Ill. J. Math. 1965. V.9. No 3. P.381–398.
15. Федорчук В.В. *Об отображении барицентра вероятностных мер* // Вестн. МГУ. Сер. матем.-мех. 1992. No 1. С.42–47.
16. Mill van J. Infinite-Dimensional Topology: prerequisites and introduction, North-Holland, Amsterdam, 1989.
17. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976.
18. Ditor S., Eifler L. *Some open mapping theorems for measures* // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V.164. P.287–293.

Механіко-математичний факультет, Львівський університет,

Університетська 1, Львів, 290602, Україна

Надійшло 1.10.1994;
Після переробки 24.01.95.