Математичні студії
випуск 5

УДК 513, 514.764

ПРО ГЕОДЕЗІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОЕКТИВНО 2-РЕКУРЕНТНИХ РІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

В.С. Собчук

Abstract. V. Sobchuk. *On geodesic mappings of projective 2-recurrence Riemannian spaces* // Matematychni Studii. **5** (1995) P.53–56.

Theorem. *Projective 2-recurrence Riemannian spaces non-constant curvature does not admit non-trivial geodesic mappings.*

Відображення ріманового простору V_n на ріманів простір $\overline{V}_n$ називається геодезійним, якщо при цьому відображенні кожна геодезійна лінія простору V_n переходить у геодезійну лінію простору $\overline{V}_n$. Основи теорії геодезійних відображень ріманових просторів заклав Т. Леві-Чівіта [1,2]. Синюков М.С. одержав нову форму рівнянь геодезійних відображень ріманових просторів [3]. Ці рівняння дозволили дослідити геодезійні відображення різноманітних класів ріманових просторів. Зокрема, Й. Мікешу належать рівняння геодезійних відображень напівсиметричних просторів, умови інтегровності цих рівнянь та диференціальні продовження умов інтегровності [3,4].

В теорії геодезійних відображень ріманових просторів важливу роль відіграє тензор Вейля проективної кривини

$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\left(R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j\right), \tag{1}$$

де R^h_{ijk} – тензор Рімана, R_{ij} – тензор Річчі, δ^h_k – символ Кронекера, n – розмірність ріманового простору. Тензор Вейля інваріантний відносно геодезійних відображень. Нульовий тензор Вейля характеризує простори сталої кривини.

Ріманів простір V_n називається проективно рекурентним, якщо для тензора Вейля виконується умова

$$W^h_{ijk,l} = \varphi_l W^h_{ijk}, \quad \varphi_l \neq 0, \tag{2}$$

де комою позначено коваріантну похідну в просторі V_n. Проективно рекурентний ріманів простір, відмінний від простору сталої кривини, є рекурентним простором, тобто для нього виконується умова [4]:

$$R^h_{ijk,l} = \varphi_l R^h_{ijk}, \quad \varphi_l \neq 0. \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 53C20, 53C35, 53C25.

Рекурентні ріманові простори, відмінні від просторів сталої кривини, не допускають нетривіальних геодезійних відображень [3].

Розглянемо проективно 2-рекурентні ріманові простори, тобто простори, для яких виконується умова

$$W^h_{ijk,lm} = \varphi_{lm} W^h_{ijk}, \quad \varphi_{lm} \neq 0. \tag{4}$$

Згортаючи (4) з оберненим метричним тензором g^{ij}, одержуємо

$$E_{hk,lm} = \varphi_{lm} E_{hk}, \tag{5}$$

де $E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}$. Виключаючи із (4) і (5) $R_{ij,lm}$, маємо

$$R_{hijk,lm} = \varphi_{lm} R_{hijk} + b_{lm}(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}), \tag{6}$$

де $b_{ij} = (R_{,ij} - R\varphi_{ij})/n(n-1)$, R – скалярна кривина, g_{ij} – метричний тензор простору. Альтернуючи (6) по індексах l, m, знаходимо

$$R_{hijk,[lm]} = \varphi_{[lm]} \Pi_{hijk}, \tag{7}$$

де позначено

$$\Pi_{hijk} = R_{hijk} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}).$$

Із тотожності Річчі

$$R_{hijk,[lm]} = R_{ijk\alpha[i} R^{\alpha}_{h]lm} + R_{hi\alpha[k} R^{\alpha}_{j]lm}$$

випливає тотожність

$$R_{hijk,[lm]} + R_{lmhi,[jk]} + R_{jklm,[hi]} = 0. \tag{8}$$

Із (7) і (8) одержуємо співвідношення

$$\varphi_{[lm]} \Pi_{hijk} + \varphi_{[jk]} \Pi_{lmhi} + \varphi_{[hi]} \Pi_{jklm} = 0. \tag{9}$$

Оскільки ми розглядаємо ріманові простори, відмінні від просторів сталої кривини, то $\Pi_{hijk} \neq 0$, а тому із (9) знаходимо, що $\varphi_{[lm]} = 0$. Внаслідок (7) це означає, що V_n – напівсиметричний простір:

$$R_{hijk,[lm]} = 0. \tag{10}$$

Припустімо, що V_n допускає нетривіальне геодезійне відображення. Тоді мають місце умови [3,4]:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}, \tag{11}$$

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij}, \quad \mu = const, \tag{12}$$

де a_{ij} – деякий симетричний тензор, λ_i – деякий ненульовий вектор, μ – інваріант.

Умови інтегровності рівнянь (12) мають вигляд:

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0. \tag{13.0}$$

Друге диференціальне продовження умов інтегровності буде таким

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk,lm} = \mu(R_{iljk,m} + R_{imjk,l}). \tag{13.2}$$

Умови (13.2) і (6) внаслідок (13.0) приводить до рівності

$$b_{lm}(\lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik}) = \mu(R_{iljk,m} + R_{imjk,l}). \tag{14}$$

Симетризуючи (14) по індексах j, k, l знаходимо

$$b_{lm}(\lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik}) + b_{jm}(\lambda_l g_{ik} - \lambda_k g_{il}) + b_{km}(\lambda_j g_{il} - \lambda_l g_{ij}) = 0. \tag{15}$$

Згортка (15) з g^{ij} набуває вигляду (при $n > 2$):

$$\lambda_k b_{lm} - \lambda_l b_{km} = 0. \tag{16}$$

Оскільки $\lambda_i \neq 0$, а тензор b_{ij} симетричний, то із (16) одержуємо

$$b_{ij} = \rho \lambda_i \lambda_j, \tag{17}$$

де ρ – деякий інваріант.

Якщо $\rho = 0$, то $b_{ij} = 0$ і з (6) знаходимо, що $R_{hijk,lm} = \varphi_{lm} R_{hijk}$, тобто V_n є 2-рекурентний простір. Але 2-рекурентні простори несталої кривини не допускають нетривіальних геодезійних відображень [3]. Нехай $\rho \neq 0$. Із (14) і (17) маємо

$$\mu(R_{iljk,m} + R_{imjk,l}) = \rho \lambda_l \lambda_m (\lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik}). \tag{18}$$

Згортаючи (18) з g^{im}, знаходимо

$$R_{lj,k} - R_{lk,j} = 0. \tag{19}$$

Отже, простір V_n є Річчі узагальнено симетричним, тобто Р-К-простором [7].

Згортка (18) з g^{lm} з урахуванням (19) дає

$$\rho g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta (\lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik}) = 0. \tag{20}$$

Оскільки $\rho \neq 0$ і $\lambda_k g_{ij} - \lambda_j g_{ik} \neq 0$ (інакше $\lambda_i = 0$), то з (20) одержуємо, що $g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 0$, тобто вектор λ_i геодезійного відображення ізотропний. Але Річчі узагальнено симетричний ріманів простір несталої кривини не допускає нетривіального геодезійного відображення з ізотропним вектором λ_i геодезійного відображення [7]. Отже, доведена така

Теорема. *Проективно 2-рекурентні ріманові простори несталої кривини не допускають нетривіальних геодезійних відображень.*

Питання про те, чи проективно 2-рекурентний ріманів простір несталої кривини є 2-рекурентним, залишаєьтся відкритим.

Разом з тим, неважко показати, що проективно m-симетричний ріманів простір: $W^h_{ijk,l_1 l_2 \dots l_m} = 0$ несталої кривини є m-симетричним: $R^h_{ijk,l_1 l_2 \dots l_m} = 0$. Дослідження геодезійних відображень m-симетричних ріманових просторів здійснено для $m = 1, 2$ в [3], для $m = 3$ в [6], а для $m \geq 4$ при умові напівсиметричності – в [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Levi-Civita T. *Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche.* Ann. di Mat. 1896. ser.2. 24. P.255-300.
2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия, – М:ИЛ, 1948.
3. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. – М:Наука, 1979.
4. Микеш И. О геодезических отображениях полусиметрических римановых пространств. – ВИНИТИ, No 3924-76, Деп., 1–19.
5. Собчук В.С. *О геодезических отображениях некоторых классов римановых пространств*, Математика. Известия вузов. 1990. No 4. С.48–50.
6. Микеш Й., Собчук В.С. *О геодезических отображениях 3-симметрических римановых пространств.* Украинский геометрический сборник. 1991. Вып.34. С.80–82.
7. Собчук В.С. *Риччи-обобщенно-симметрические римановы пространства допускают нетривиальные геодезические отображения.* ДАН СССР. 1982. Т.267. No 4. С.793–795.

Собчук В.С., канд., фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри та геометрії

Чернівецького державного університету ім. Ю. Федьковича.

274018, м.Чернівці, вул. Полетаєва, 4, кв.40.

тел. 984–70 (служб.) 4–16–51 (дом.)

Надійшло 21.12.93
Після переробки 25.10.94.