Математичні студії
випуск 5

УДК 517.983/.983.8

ПРО ПОДІБНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ

Я.В. Микитюк, Т. І. Олексів

Abstract. Ya. Mykytyuk, T. Oleksiv. *On similarity of operators*// Matematychni Studii. **5** (1994) P.43–52.

Certain modification of the wave operators method and its application for the proof of the similarity of operators S and $S+A$, where S is a unitary operator and A is a continuous one in Hilbert space, are considered. Obtained abstract theorems are illustrated by corresponding examples.

Нехай S – унітарний оператор у гільбертовому просторі H і $T = S + A$, де $A \in \mathcal{B}(H)$ ($\mathcal{B}(H)$ – алгебра всіх лінійних неперервних всюди заданих операторів $H \to H$). Ми будемо вважати, що

$$r(AS^{-1}) < 1, \tag{1}$$

де $r(AS^{-1})$ – спектральний радіус оператора AS^{-1}. Введемо позначення

$$A_n = S^n A S^{-n}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$T^n S^{-n} = \overset{\rightarrow}{\prod_{k=0}^{n-1}} (I + A_k S^{-1}) \overset{def}{=} (I + A_0 S^{-1}) \dots (I + A_{n-1} S^{-1}).$$

Внаслідок (1) оператори T і $(I + A_k S^{-1})$ є оборотними. Тому

$$S^n T^{-n} = \overset{\leftarrow}{\prod_{k=0}^{n-1}} (I + A_k S^{-1})^{-1} \overset{def}{=} (I + A_{n-1} S^{-1})^{-1} \dots (I + A_0 S^{-1})^{-1}.$$

Припустимо, що існують хвильові оператори

$$\Omega_1 \overset{def}{=} \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} T^n S^{-n}, \qquad \Omega_2 \overset{def}{=} \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} S^n T^{-n}.$$

Тоді справедливі рівності

$$T\Omega_1 = \Omega_1 S, \qquad \Omega_1\Omega_2 = \Omega_2\Omega_1 = I,$$

з яких випливає, що оператори T і S є подібними. Таким чином, справедливе наступне

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A40.

Твердження 1. *Якщо в сильній операторній топології збігаються добутки*

$$\overset{\infty}{\underset{k=0}{\overrightarrow{\Pi}}}(I+A_kS^{-1}),\qquad \overset{\infty}{\underset{k=0}{\overleftarrow{\Pi}}}(I+A_kS^{-1})^{-1}, \tag{2}$$

то оператори T і S є подібними.

Зрозуміло, що збіжність добутків (2) не є необхідною умовою подібності операторів T і S. Тому можна сподіватися, що існують інші достатні умови подібності, які пов'язані з формальними добутками (2).

Покладемо

$$U(r,A)\overset{def}{=}\overset{\infty}{\underset{k=0}{\overrightarrow{\Pi}}}(I+r^kA_kS^{-1}),\qquad V(r,A)\overset{def}{=}\overset{\infty}{\underset{k=0}{\overleftarrow{\Pi}}}(I+r^kA_kS^{-1})^{-1}, \tag{3}$$

де $r\in]0,1[$. Враховуючи (1), легко переконатися, що добутки (3) збігаються у рівномірній операторній топології. Тому при довільному $r\in]0,1[$ оператор-функції

$$z\to U(r,zA)\in\mathcal{B}(H),\qquad z\to V(r,zA)\in\mathcal{B}(H)$$

аналітичні в крузі $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. Позначимо через $U_n(r,A)$ і $V_n(r,A)$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ відповідно їх тейлорові коефіцієнти. Тоді

$$U(r,zA)=\sum_{n=0}^{\infty}z^nU_n(r,A),\qquad V(r,zA)=\sum_{n=0}^{\infty}z^nV_n(r,A),$$

причому ряди збігаються в крузі D в рівномірній операторній топології і $U_0(r,A)=V_0(r,A)=I$.

Означення 1. Ми будемо говорити, що існують оператори $U(A)$ і $V(A)$, якщо:
1) для довільного $n\in\mathbb{Z}_+$ існують границі

$$U_n(A)=\operatorname*{s-lim}_{r\to1-0}U_n(r,A),\qquad V_n(A)=\operatorname*{s-lim}_{r\to1-0}V_n(r,A); \tag{4}$$

2) існують границі

$$U(A)=\operatorname*{s-lim}_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}U_n(A),\qquad V(A)=\operatorname*{s-lim}_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}V_n(A). \tag{5}$$

Лема 1. *Для того, щоб існували границі* (4)*, необхідно і достатньо, щоб для довільного $n\in\mathbb{N}$ існували границі*

$$L_n(A)=\operatorname*{s-lim}_{r\to1-0}L_n(r,A),\qquad M_n(A)=\operatorname*{s-lim}_{r\to1-0}M_n(r,A), \tag{6}$$

де

$$L_n(r,A)=\sum_{0\le k_1\le k_2\dots\le k_n}(r^{k_1}A_{k_1})(r^{k_2}A_{k_2})\dots(r^{k_n}A_{k_n}), \tag{7}$$

$$M_n(r,A)=\sum_{0\le k_1<k_2\dots<k_n}(r^{k_n}A_{k_n})(r^{k_{n-1}}A_{k_{n-1}})\dots(r^{k_1}A_{k_1}). \tag{8}$$

Крім того,

$$U_n(A) = L_n(A)S^{-n}, \qquad V_n(A) = (-1)^n S^{-n+1} M_n(A) S^{-1}. \tag{9}$$

Доведення. З означень випливає, що

$$U(r, zA) = \overset{\infty}{\underset{k=0}{\overrightarrow{\Pi}}} (I + zr^k A_k S^{-1}),$$
$$V(r, zA) = \overset{\infty}{\underset{k=0}{\overleftarrow{\Pi}}} (I + zr^k A_k S^{-1})^{-1}.$$

Звідси, враховуючи рівності

$$(I + zr^k A_k S^{-1})^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-zr^k A_k S^{-1})^m, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad z \in D,$$

з допомогою нескладних обчислень отримуємо, що

$$\begin{aligned} U_n(r, A) &= r^{\frac{n(n-1)}{2}} L_n(r, A) S^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \\ V_n(r, A) &= (-1)^n r^{-\frac{n(n-1)}{2}} S^{-n+1} M_n(r, A) S^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

З рівностей (10), очевидним чином, випливає справедливість твердження леми. Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай існують оператори $U(A)$ і $V(A)$. Тоді:*
1) оператори $U(A)$, $V(A)$ є оборотними і $U(A)^{-1} = V(A)$;
2) оператори T і S подібні, причому

$$T = U(A) S U(A)^{-1}. \tag{11}$$

Доведення. З означень випливає, що для довільних $z \in \overline{D}$ і $r \in]0, 1[$

$$V(r, zA) U(r, zA) = U(r, zA) V(r, zA) = I.$$

Тому для довільних $N \in \mathbb{N}$ справедливі рівності

$$\sum_{n+m=N} U_n(r, A) V_m(r, A) = \sum_{n+m=N} V_m(r, A) U_n(r, A) = 0,$$

з яких слідує, що

$$\sum_{n+m=N} U_n(A) V_m(A) = \sum_{n+m=N} V_m(A) U_n(A) = 0.$$

Звідси, враховуючи (5), отримуємо, що

$$U(A) V(A) = V(A) U(A) = I.$$

Таким чином, твердження 1) доведено. Доведемо тепер рівність (11). Приймаючи до уваги (7), неважко переконатися, що

$$SL_n(r,A)S^{-1} = r^{-n}L_n(r,A) - AL_{n-1}(r,A), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Звідси, враховуючи (10), маємо, що

$$SU_n(r,A)S^{-1} = r^{-n}U_n(r,A) - AU_{n-1}(r,A)S^{-1}$$

і, значить,

$$SU_n(A)S^{-1} = U_n(A) - AU_{n-1}(A)S^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

З (12) випливає, що

$$SU(A)S^{-1} = U(A) - AU(A)S^{-1},$$

тобто

$$TU(A) = U(A)S.$$

Теорема доведена.

Розглянемо тепер два спеціальні випадки, в яких можна знайти досить прості умови подібності операторів T і S.

Теорема 2. *Нехай $A_1 = aA$, де $a \in \mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$, і*

$$r(AS^{-1}) < \varliminf_{n\to\infty} |1 - a^n|^{1/n}. \tag{13}$$

Тоді оператори T і S є подібними.

Теорема 3. *Нехай оператор A такий, що:*
1) для довільних $n, m \in \mathbb{Z}_+$ $A_nA_m = A_mA_n$;
2) для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують границі

$$Q_n(A) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{r\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} r^{kn}A_k^n; \tag{14}$$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}||Q_n(A)|| < \infty$.
Тоді оператори T і S є подібними.

Доведення теореми 2. З рівності $A_1 = aA$ випливає, що

$$A_k = a^kA, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси, враховуючи (3), отримуємо, що

$$U(r,zA) = \prod_{k=0}^{\infty}(I + z(ra)^kAS^{-1}).$$

Очевидно, що при довільному $r \in]0,1[$ функція

$$\lambda \to \varphi_r(\lambda) \stackrel{def}{=} \prod_{k=0}^{\infty}(1+\lambda(ra)^k)$$

аналітична в крузі $D_{1/r} = \{\lambda : |\lambda| < 1/r\}$ і

$$U(r, zA) = \varphi_r(zAS^{-1}). \tag{15}$$

Оскільки при $z \in \overline{D}$

$$1 + z(ra)^k = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(-z(ra)^k\right)^m}{m},$$

то

$$\varphi_r(z) = \exp\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(ra)^{km}(-z)^m\right] = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^m}{m(1-(ra)^m)}.$$

Зауважимо, що внаслідок (13) при довільних $n \in \mathbb{N}$ $1 - a^n \neq 0$. Нехай $d = \varliminf\limits_{n\to\infty} |1-a^n|^{1/n}$. Тоді функція

$$\psi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^m}{m(1-a^m)}$$

аналітична в D_d і при довільному $\rho \in]0, d[$

$$\sup_{z\in D_d} |\varphi_r(z) - \exp\psi(z)| = o(1), \qquad r \to 1-0.$$

Звідси, враховуючи (15), отримуємо, що оператори $U(A), V(A)$ існують і $U(A) = \exp\psi(AS^{-1})$, $V(A) = \exp(-\psi(AS^{-1}))$. Тим самим, теорема доведена.

Перед тим як приступити до доведення теореми 3, доведемо дві леми.

Лема 2. *Нехай $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність операторів в $\mathcal{B}(H)$, які попарно комутують і $\sum_{n=0}^{\infty} ||B_n|| < \infty$. Покладемо*

$$\mathcal{L}_n \stackrel{def}{=} \sum_{0\le k_1\le k_2\dots\le k_n} B_{k_1}\dots B_{k_n}, \qquad \mathcal{M}_n \stackrel{def}{=} \sum_{0\le k_1<k_2\dots<k_n} B_{k_1}\dots B_{k_n}.$$

Тоді справедливі наступні рекурентні співвідношення

$$(n+1)\mathcal{L}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{L}_{n+1-j}\mathcal{R}_j, \qquad (n+1)\mathcal{M}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j+1}\mathcal{M}_{n+1-j}\mathcal{R}_j, \tag{16}$$

де

$$\mathcal{R}_n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^n, \qquad \mathcal{L}_0 = \mathcal{M}_0 = I.$$

Перевірка рівностей (16) зводиться до нескладних обчислень.

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми 2. Тоді для довільного* $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} ||\mathcal{L}_n||, \qquad \sum_{n=0}^{N} ||\mathcal{M}_n|| \leq \exp \sum_{n=1}^{N} n^{-1} ||\mathcal{R}_n||.$$

Доведення. З леми 2 випливає, що

$$(n+1)||\mathcal{L}_{n+1}|| \leq \sum_{j=1}^{n+1} ||\mathcal{L}_{n+1-j}|| \, ||\mathcal{R}_j||. \tag{17}$$

Зафіксуємо $N \in \mathbb{N}$ і покладемо

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} ||\mathcal{L}_k|| x^k, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{N} n^{-1} ||\mathcal{R}_n|| x^n.$$

Тоді, враховуючи (17), маємо нерівність

$$\varphi'(x) \leq \varphi(x)\psi'(x), \qquad x \in [0, 1],$$

яку можна переписати у вигляді

$$(\ln \varphi)'(x) \leq \psi'(x), \qquad x \in [0, 1].$$

Звідси, приймаючи до уваги, що $\varphi(0) = 1$ і $\psi(0) = 0$ маємо

$$\ln \varphi(1) = \int_0^1 (\ln \varphi)' dx \leq \int_0^1 \psi'(x) dx = \psi(1)$$

тобто

$$\sum_{n=0}^{N} ||\mathcal{L}_n|| \leq \exp \sum_{n=1}^{N} n^{-1} ||\mathcal{R}_n||.$$

Аналогічно доводиться відповідна нерівність для операторів $\mathcal{M}_n$. Лема доведена.

Доведення теореми 3. Враховуючи лему 2 і формули (7), (8), отримуємо, що

$$(n+1)L_{n+1}(r, A) = \sum_{j=1}^{n+1} L_{n+1-j}(r, A) Q_j(r, A), \tag{18}$$

$$(n+1)M_{n+1}(r, A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} M_{n+1-j}(r, A) Q_j(r, A), \tag{19}$$

де

$$Q_n(r, A) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{kn} A_k^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad r \in]0, 1[.$$

З рекурентних співвідношень (18), (19) і умови 2) теореми 3 випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ існують границі

$$L_n(A) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{r\to 1-0} L_n(r,A), \qquad M_n(A) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{r\to 1-0} M_n(r,A),$$

причому

$$\begin{aligned}(n+1)L_{n+1}(A) &= \sum_{j=1}^{n+1} L_{n+1-j}(A)Q_j(A),\\ (n+1)M_{n+1}(A) &= \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j+1}M_{n+1-j}(A)Q_j(A).\end{aligned} \tag{20}$$

Звідси, приймаючи до уваги лему 3 і умову 3), отримуємо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty}||L_n(A)||, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}||M_n(A)|| \le \exp\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}||Q_n(A)||, \tag{21}$$

а, значить (див. лему 1 і означення 1), існують оператори $U(A)$ і $V(A)$. Таким чином, справедливість твердження теореми 3 випливає з теореми 1. Теорема 3 доведена.

Наведемо тепер конкретні приклади застосування теорем 2 і 3.

Приклад 1. Нехай $H = L_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$, S, A – оператори в H, які діють за формулами

$$Sf(z) \overset{def}{=} zf(z), \qquad Af(z) \overset{def}{=} q(z)f(a^{-1}z), \qquad f \in H, \tag{22}$$

де $a \in \mathbb{T}$, $q : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ – інтегрована за Ріманом (на $\mathbb{T}$) функція. Легко бачити, що в цьому випадку $A_1 = aA$.

Теорема 4. *Нехай $T = S + A$, де S і A задані формулами* (22). *Якщо $arg\, a/\pi$ – ірраціональне число і*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(|q(z)|+\varepsilon)|dz| < \varliminf_{n\to\infty}|1-a^n|^{1/n}, \tag{23}$$

то оператори T і S є подібними.

З результатів книги [1] випливає, що справедливе наступне

Твердження 2. *Нехай $\tau \in \mathbb{R}$ таке, що τ/π – ірраціональне число, а ψ – періодична з періодом 2π інтегровна за Ріманом на проміжку $[0, 2\pi]$ дійснозначна функція. Тоді*

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(x-k\tau) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t)dt\right| = 0(1), \quad n\to\infty.$$

Доведення теореми 4. Внаслідок теореми 2 достатньо показати, що

$$r(AS^{-1}) \le \lim_{\varepsilon\to+0}\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(|q(z)|+\varepsilon)|dz|. \tag{24}$$

Покладемо $\tau = arg\, a$, $\psi_\varepsilon(t) = ln(|q(e^{it})| + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Легко переконатися, що

$$||(AS^{-1})^n||^{1/n} = \sup_{z\in\mathbb{T}} \prod_{k=0}^{n-1} |q(a^{-k}z)|^{1/n} \le \exp \sup_{t\in[0,2\pi]} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_\varepsilon(t-k\tau) \right).$$

Тому

$$r(AS^{-1}) = \lim_{n\to\infty} ||(AS^{-1})^n||^{1/n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \exp \sup_{t\in[0,2\pi]} \big(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_\varepsilon(t-k\tau) \big).$$

Звідси, врахувавши твердження 2, отримуємо (24). Теорема доведена.

Зауваження 1. За допомогою теореми Ліувілля про алгебраїчні числа можна показати, що якщо число $arg\, a/\pi$ є алгебраїчним степеня $q \in \mathbb{N}$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} |1 - a^n|^{1/n} = 1.$$

Приклад 2. Нехай $H = l_2(\mathbb{Z})$ і S, A – оператори в H, які діють за формулами

$$(Sx)_n \stackrel{def}{=} x_{n+1}, \qquad (Ax)_n \stackrel{def}{=} a_n x_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in H, \tag{25}$$

де $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – послідовність комплексних чисел, для якої

$$\sup_n |a_n| < 1.$$

Легко переконатись, що в цьому випадку для довільних $n, m \in \mathbb{Z}_+$ оператори A_n і A_m комутують.

Теорема 5. *Нехай оператори S і A задані формулами* (25)*. Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} q_n$, де*

$$q_n \stackrel{def}{=} \sup_{-\infty<r<k<\infty} |\sum_{j=r}^{j=k} a_j^n|,$$

то оператори $S + A$ і S є подібними.

Доведення. З умов теореми випливає, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $m \in \mathbb{Z}$ послідовність

$$c(n,m) \stackrel{def}{=} \left\{ \sum_{j\in\Delta_m(k)} a_j^n \right\}_{k\in\mathbb{N}},$$

де $\Delta_m(k) \stackrel{def}{=} \{j \in \mathbb{Z}_+ : |j+m| \le k\}$, є обмеженою, причому

$$||c(n,m)||_{l_\infty} \le q_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

Оскільки множина $\{c(n,m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$ є зліченною, то використовуючи діагональний метод, можна вибрати таку строго зростаючу послідовність $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ натуральних чисел, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $m \in \mathbb{Z}$ існують границі

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j\in\Delta_m(p_k)} a_j^n. \tag{27}$$

Задамо оператори $A(k) : H \to H$ $(k \in \mathbb{N})$, покладаючи

$$\big(A(k)x\big)_j \overset{def}{=} \begin{cases} a_j x_j, & |j| \le p_k, \\ 0, & |j| > p_k, \end{cases} \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in H.$$

Легко переконатися, що для операторів $A(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ виконуються всі умови теореми 3 і, крім того,

$$\big(Q_n\big(A(k)x\big)\big)_m = \left(\sum_{j\in\Delta_m(p_k)} a_j^n\right) x_m, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Звідси, враховуючи оцінки (26) і існування границі (27), отримуємо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ $\sup\limits_k ||Q_n(A(k))|| \le q_n$ і існують границі $\operatorname*{s-lim}\limits_{k\to\infty} Q_n(A(k))$. Приймаючи тепер до уваги формули (20), (21) і (9), дістаємо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ існують границі

$$\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} U_n(A(k)), \qquad \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} V_n(A(k)) \tag{28}$$

і для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||U_n(A(k))||, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} ||V_n(A(k))|| \le \exp \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} q_n. \tag{29}$$

Оскільки для довільних $\rho \in]0, 1[$

$$U(\rho A(k)) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n U_n(A(k)), \qquad V(\rho A(k)) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n V_n(A(k)), \tag{30}$$

то, враховуючи оцінки (29) і існування границь (28), отримуємо, що існують границі

$$X = \operatorname*{s-lim}_{\rho\to 1-0} \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} U(\rho A(k)),$$
$$Y = \operatorname*{s-lim}_{\rho\to 1-0} \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} V(\rho A(k)).$$

Згідно з теоремою 1

$$\begin{gathered} (S + \rho A(k))U(\rho A(k)) = U(\rho A(k))S, \\ U(\rho A(k))V(\rho A(k)) = V(\rho A(k))U(\rho A(k)) = I. \end{gathered} \tag{31}$$

Переходячи в рівностях (31) до границі (в слабкій операторній топології) спочатку при $k \to \infty$, а потім при $\rho \to 1 - 0$, дістаємо, що

$$(S + A)X = XS, \qquad XY = YX = I,$$

тобто оператори S і $S + A$ є подібними. Теорема доведена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. – М.: Наука. 1985. 407с.

Львівський університет

Надійшло 1.12.94.