Математичні студії
випуск 5

УДК 517.53

ТЕОРЕМА ТИПУ ВАЛІРОНА-ТІТЧМАРША ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОРЯДКУ.

Р.І. Тарасюк

Abstract. R. Tarasyuk. *Valiron-Titchmarsh type theorem for entire functions of finite logarithm order* // Matematychni Studii. **5** (1995) P.31–38.

Specify the exceptional set outside of it is found assymptotic of the analitic branch of logarythm of the entire function with zeroes on the ray.

According to the known asymptotic of the logarithm of module of the entire function on this ray is establised the two-term's asymptotic of the counting function of those zeroes.

В [1] розглядалися теореми Валірона та Валірона-Тітчмарша в термінах двочленної асимптотики для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку. Зокрема, було доведено насупні теореми (не зменшуючи загальності будемо вважати, що $f(0) = 1$, через $\ln f$ позначимо вітку $\mathrm{Ln} f$, для якої $\ln f(0) = 0$).

Теорема A. *Нехай* $2 < q < p < q + 1 < \infty$, $\Delta \in (0, +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, *а* φ_1 – *інтегрована на кожному скінченному проміжку з* $\mathbb{R}_+$ *функція така, що при деякому* $m \geq 1$

$$\int_T^{2T} |\varphi_1(x)|^m dx = o\left(T(\ln T)^{m(q-2)}\right) , \quad T \to +\infty. \tag{1}$$

Тоді, якщо порядок функції f *дорівнює нулю, всі корені* f – *від'ємні і рахуюча їх функція* $n(t)$ *задовольняє умову*

$$n(t) = \Delta \ln^p t + \Delta_1 \ln^q t + \varphi_1(t) \quad (t \geq 1), \tag{2}$$

то ($z = re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta < \pi$)

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\Delta}{p+1} \ln^{p+1} r + \frac{\Delta_1}{q+1} \ln^{q+1} r + i\theta(\Delta \ln^p r + \Delta_1 \ln^q r) + \\ + \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2)(\Delta p \ln^{p-1} r + \Delta_1 q \ln^{q-1} r) + \psi_1(z) , \quad z = re^{i\theta}, \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D35, 30D15.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

де

$$\psi_1(z) = o(\ln^{q-1} r) \tag{4}$$

при $z \to \infty$ *зовні деякої виняткової множини* $E(f)$. *Ця виняткова множина* $E(f)$ *складається з не більш як зліченного об'єднання прямокутників* $\{z : x'_n < \mathrm{Re}z < x''_n\ ,\ |\mathrm{Im}z| < y_n\}$ *таких, що* $x''_n < 0\ ,\ \sum_{|x'_n|<R}(x''_n - x'_n) = o(R)$ *і* $\sup\{y_n : |x'_n| < R\} = o(R)$ *при* $R \to \infty$. *Якщо, крім того, умова (1) виконується для деякого* $m > 1$, *то рівномірно по* θ

$$\int_T^{2T} |\psi_1(re^{i\theta})|^m dx = o\left(T(\ln T)^{m(q-1)}\right)\ ,\quad T \to +\infty.$$

Теорема Б. *Нехай числа* $p,\ q,\ \Delta$ *і* Δ_1 *такі ж, як і в теоремі А, функція* f *має лише від'ємні нулі і*

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{\Delta}{p+1}\ln^{p+1} r + \frac{\Delta_1}{q+1}\ln^{q+1} r + \\ + \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2)(\Delta p \ln^{p-1} r + \Delta_1 q \ln^{q-1} r) + \psi_2(re^{i\theta}) \tag{5}$$

для значень $\theta = 0$ *і* $\theta = \pi$, *де* ψ_2 *для деякого* $m \geq 1$ *задовольняє умову*

$$\int_{T<|x|<2T} |\psi_2(x)|^m dx = o\left(T(\ln T)^{m(q-1)}\right)\ ,\quad T \to +\infty. \tag{6}$$

Тоді

$$n(t) = \Delta \ln^p t + \Delta_1 \ln^q t + \varphi_2(t) \quad (t \geq 1),$$

де

$$\varphi_2(t) = o(\ln^q t)$$

при $t \to \infty$ *зовні деякої множини нульової щільності, тобто множини* $E \subset [0, +\infty)$ *такої, що* $\mathrm{mes}\ (E \cap [0,t]) = o(t)\ ,\ t \to +\infty$.

В [1] показано, що коли в теоремі Б обмежитися асимптотикою $\ln|f|$ лише на додатному промені (або на довільному промені $arg z = \varphi, \varphi \neq -\pi$), то для рахуючої функції нулів виконується

$$n(t) = \Delta \ln^p t + O\left(\frac{\ln^p t}{\ln\ln t}\right)\ ,\quad t \to \infty\ ,$$

причому остання оцінка є точною.

Виникає природнє запитання, чи достатьо для виконання асимптотичної рівності (2) наявності асимптотики для $\ln|f|$ лише на промені з коренями, тобто на промені $arg z = -\pi$. Також в даній роботі розглядатиметься питання про "величину" виняткової множини в теоремі А. Будуть доведені наступні теореми:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови теореми A. Тоді мають місце співвідношеня (3) та (4) зовні деякої C_0^1-множини.*

Зауваження. *Нехай $C(a,r)=\{z:|z-a|<r\}, E=\cup_{y=1}^{\infty}C(a_j,r_j), 0<\alpha\le 2$. Множина E називаеться C_0^{α}-множиною, якщо $\sum_{|a_j|\le r}r_j^{\alpha}=o(r^{\alpha}), r\to\infty$. Якщо $0<\alpha_1<\alpha_2\le 2$, то $C_0^{\alpha_1}$-множина є $C_0^{\alpha_2}$-множиною. Легко бачити, що виняткова множина E з теореми A є C_0^2-множиною.*

Теорема 2. *Нехай p, q, Δ ,Δ_1 такі, як в теоремі A, функція f має від'ємні нулі і*

$$\ln|f(-r)|=\frac{\Delta}{p+1}\ln^{p+1}r+\frac{\Delta_1}{q+1}\ln^{q+1}r-$$
$$-\frac{\pi^2}{3}(\Delta p\ln^{p-1}r+\Delta_1 q\ln^{q-1}r)+\psi(-r)\ ,\quad r>0\ , \tag{7}$$

де

$$\int_{-2T}^{-T}|\psi(t)|^m dt=o\left(T(\ln T)^{m(q-1)}\right)\ ,\quad T\to+\infty. \tag{8}$$

Тоді

$$n(t)=\Delta\ln^p t+\Delta_1\ln^q t+\varphi(t)\ ,$$

де

$$\varphi(t)=o(\ln^q t)\ ,\quad t\to\infty\ ,$$

зовні множини нульової відносної міри.

Для доведення цих теорем будемо використовувати методику роботи [2]. Зокрема, для доведення теореми 1 використаємо наступну лему, що є безпосереднім наслідком однієї з теорем цієї роботи.

Лема 1. *Нехай $g(t)\in L^q(\mathbb{R}), q\in[1,\infty)$ і $h\in(0,+\infty)$. Тоді існує константа $C_q<\infty$, що для функції*

$$\tilde g(s)=\sup_{\{z:Im(z-s)\ge|Re(z-s)|\}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{t+z}dt\right|\quad(s\in\mathbb{R})$$

виконується оцінка

$$mes\{s:\tilde g(s)>h\}\le C_q\frac{\|g\|_q^q}{h^q}\ .$$

Доведення теореми 1. Як і при доведенні теореми A з [1] одержуємо (3) з залишковим членом ($a\ge e^{3\pi}$)

$$\psi_1(z)=z\int_a^{+\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t(t+z)}dt+O(\ln^{p-2}r)=$$
$$=z\left(\int_a^{r/4}+\int_{r/4}^{4r}+\int_{4r}^{+\infty}\right)\frac{\varphi_1(t)}{t(t+z)}dt+o(\ln^{q-1}r)=$$
$$=z(A_1(z)+A_2(z)+A_3(z))+o(\ln^{q-1}r)\ ,\quad z=re^{i\theta}\to\infty\ ,$$

де

$$|A_1(z)| = o\left(\frac{\ln^{q-1} r}{r}\right) \ , \quad r \to \infty,$$

$$|A_3(z)| = o\left(\frac{\ln^{q-2} r}{r}\right) \ , \quad r \to +\infty,$$

а

$$|A_2(z)| = o\left(\frac{\ln^{q-2} r}{r}\right)$$

при $\theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], re^{i\theta} \to \infty$.

Нехай $G = \{z : -2r \leq \mathrm{Re} z = x \leq -\frac{r}{2} \ , \ 0 < |\arg z - \pi| \leq \pi/4\}, g_r(t) = \chi_r(t)\varphi_1(t)/t$, де $\chi_r(t)$ – характеристична функція проміжку $[r/4, 4r], \varepsilon(r)$ – довільна на $[a, +\infty)$ функція така, що $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $(r \to +\infty)$,

$$E_r = \left\{ s \in [-2r, -r/2] : \sup\{|A_2(z)| : z \in G, Im(z-s) \geq |Re(z-s)|\} > \frac{\varepsilon(r)\ln^{q-2} r}{r} \right\}.$$

Тоді $g_r \in L^m(-\infty, +\infty)$, $m \geq 1$, $\|g_r\|_m = o(r^{1/m-1}\ln^{q-2} r)$ при $r \to \infty$ (див.(1)) та

$$A_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_r(t)}{t+z} dt.$$

За лемою 1 маємо

$$\mathrm{mes} E_r \leq C_m \frac{\|g_r\|_m^m}{(\varepsilon(r)\ln^{q-2} r/r)^m} = o\left(\frac{r}{(\varepsilon(r))^m}\right) \ , \quad r \to \infty,$$

тому функцію $\varepsilon(r)$ можна вибрати так, щоб $mesE_r = o(r), r \to \infty$. Покладемо $E_* = \cup_{k=1}^{\infty} E_{r_k}, r_k = 2^k$. Стандартним методом можна показати, що E_* має нульову щільність. Незначно збільшивши множину E_*, можна вважати їіі відкритою, тобто $E_* = \cup_{j=1}^{\infty} I_j$, де I_j – ітервали.

Оскільки, $A_2(\overline{z}) = \overline{A_2(z)}$, то виняткова множина E буде складатись з квадратів, для яких інтервали I_j є діагоналями. Описавши навколо кожного квадрата круг, одержуємо, що множина E є C_0^1-множиною.

Отже, якщо $z \notin E$, то

$$|A_2(z)| \leq \frac{\varepsilon(r)\ln^{q-2} r}{r} = o\left(\frac{\ln^{q-2} r}{r}\right) \ , \quad r \to \infty \ ,$$

і тому $\psi_1(z) = o(\ln^{q-1} r), z \to \infty, z \notin E$, що доводить теорему 1.

Для доведення теореми 2 будемо використовувати наступні леми.

Лема 2. *Нехай* $0 \leq p < +\infty, k \in \mathbb{Z}_+$ *і*

$$a_k(r) = \int_1^r t^k \ln^p t dt.$$

Тоді для всіх $x > 1$ має місце рівність

$$a_k(r) = \frac{r^{k+1}}{(k+1)^{p+1}} \left\{ (k+1)^p \ln^p r + \sum_{j=1}^{[p]} (-1)^j \frac{p(p-1)\dots(p-j+1)}{(k+1)^{j-p}} \ln^{p-j} r + \hat{a}_k(r) \right\} ,$$

де

$$|\hat{a}_k(r)| \le A(p) \ln^{p-[p]-1} r \ ,$$

причому стала $A(p)$ не залежить від k.

Лема 3. *Нехай $0 \le p < +\infty, k \in \mathbb{Z}_+$ і*

$$b_k(r) = \int_r^{+\infty} \frac{\ln^p t}{t^{k+2}} dt.$$

Тоді

$$b_k(r) = \frac{1}{(k+1)^{p+1} r^{k+1}} \left\{ (k+1)^p \ln^p r + \sum_{j=1}^{[p]} \frac{p(p-1)\dots(p-j+1)}{(k+1)^{j-p}} \ln^{p-j} r + \hat{b}_k(r) \right\} ,$$

де

$$|\hat{b}_k(r)| \le B(p) \ln^{p-[p]-1} r \ ,$$

причому стала $B(p)$ не залежить від k.

Доведення цих лем ми не наводимо, оскільки в їх справедливості легко переконатись, проінтегрувавши інтеграли $a_k(r)$ і $b_k(r)$ частинами.

Наслідок. *Нехай $0 \le p < +\infty$ і*

$$I_p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^p |t|}{t^2 + y^2} dt.$$

Тоді

$$I_p(y) = \frac{2}{y} \left(\frac{\pi}{2} \ln^p y + \frac{\pi^3 p(p-1)}{16} \ln^{p-2} y \right) + O\left(\frac{\ln^{p-3} y}{y} \right) \ , \quad y \to \infty. \tag{9}$$

Доведеня. Запишемо

$$I_p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^p |t|}{t^2 + y^2} dt = 2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln^p t}{t^2 + y^2} dt + O\left(\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$2 \left(\int_1^y + \int_y^{+\infty} \right) \frac{\ln^p t}{t^2 + y^2} dt + O\left(\frac{1}{y^2}\right) = 2(I_p^{(1)} + I_p^{(2)}) + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \ , \quad y \to \infty. \tag{10}$$

Далі,

$$I_p^{(1)} = \int_1^y \frac{\ln^p t}{t^2 + y^2} dt = \frac{1}{y^2} \int_1^y \frac{\ln^p t}{1 + (\frac{t}{y})^2} dt =$$

$$= \frac{1}{y^2} \int_1^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{y^{2n}} \ln^p t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{y^{2n+2}} \int_1^y t^{2n} \ln^p t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{y^{2n+2}} a_{2n}(y) \ ,$$

і, використовуючи лему 2, маємо

$$I_p^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{y} \left\{ \frac{\ln^p t}{(2n+1)} - \frac{p \ln^{p-1} t}{(2n+1)^2} + \frac{p(p-1) \ln^{p-2} t}{(2n+1)^3} \right\} + O\left(\frac{\ln^{p-3} y}{y}\right) =$$
$$= \frac{1}{y} \left(K_1 \ln^p y - K_2 p \ln^{p-1} y + K_3 p(p-1) \ln^{p-2} y \right) + O\left(\frac{\ln^{p-3} y}{y}\right) \ , \quad y \to \infty,$$

де

$$K_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^j} \ , \ j = \overline{1,3}.$$

Аналогічно, використовуючи лему 3, маємо

$$I_p^{(2)} = \int_y^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{t^{2n+2}} \ln^p t dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n} b_{2n}(y) =$$
$$= \frac{1}{y} \left(K_1 \ln^p y + K_2 p \ln^{p-1} y + K_3 p(p-1) \ln^{p-2} y \right) + O\left(\frac{\ln^{p-3} y}{y}\right) \ , \quad y \to \infty.$$

Враховуючи, що $K_1 = \pi/4, K_3 = \pi^3/32$ та рівність (10), одержуємо твердження наслідку.

Доведення теореми 2. Теорему 2 буде доведено, якщо ми покажемо, як за відомою асимптотикою $\ln|f|$ на $\mathbb{R}_-$, що задається співвідношенням (7), одержати асимптотику $\ln|f|$ на $\mathbb{R}_+$, тобто співвідношення (5) для $\theta = 0$.

Для цього покладемо $v(re^{i\theta}) = \ln|f(-z^2)|$. Функція $v(z)$ гармонійна в $\{z : Imz > 0\}$, причому при $t > 0$

$$v(-t) = v(t) = \ln|f(-t^2)| = \frac{\Delta}{p+1} \ln^{p+1} t^2 + \frac{\Delta_1}{q+1} \ln^{q+1} t^2 - \\ - \frac{\pi^2}{3} (\Delta p \ln^{p-1} t^2 + \Delta_1 q \ln^{q-1} t^2) + \psi(-t^2). \quad (11)$$

Враховуючи, що порядок $v(z)$ дорівнює нулю, можемо зобразити її в $\{z : Imz > 0\}$ інтегралом Пуассона через крайові значення $v(t)$, що задаються формулою (11). Зокрема, для $y > 0$ маємо

$$v(iy) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t)dt}{t^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} \left(\frac{\Delta}{p+1} 2^{p+1} I_{p+1}(y) + \frac{\Delta_1}{q+1} 2^{q+1} I_{q+1}(y) - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi^2 \Delta p}{3} 2^{p-1} I_{p-1}(y) - \frac{\pi^2 \Delta_1 q}{3} 2^{q-1} I_{q-1}(y) \right) + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(-t^2)}{t^2 + y^2} dt.$$

З іншого боку, $v(iy) = \ln|f(y^2)|$, і завдяки (9), з останньої рівності отримуємо

$$\ln|f(y^2)| = \frac{\Delta}{p+1} \ln^{p+1} y^2 + \frac{\Delta_1}{q+1} \ln^{q+1} y^2 +$$
$$+ \frac{\pi^2}{6} (\Delta p \ln^{p-1} y^2 + \Delta_1 q \ln^{q-1} y^2) + O(\ln^{p-2} y) + \frac{2y}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\psi(-t^2)}{t^2 + y^2} dt \ , \quad y \to \infty.$$

Останнє співвідношення співпадає з (5) для $\theta = 0$ та

$$\psi_2(r) = \frac{\sqrt{r}}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\psi(-t)dt}{\sqrt{t}(t+r)} + O(\ln^{p-2} r) \ , \quad r \to \infty.$$

Залишилось показати, що $\psi_2(r)$ задовольняє умову (6), тобто

$$\int_T^{2T} |\psi_2(r)|^m dr = o\left(T(\ln T)^{m(q-1)}\right) \ , \quad T \to +\infty.$$

Очевидно, що якщо $\alpha(r) = o(\ln^s r), s > -1, r \to \infty$, то

$$\int_T^{2T} |\alpha(r)|^m dr = o\left(T(\ln T)^{ms}\right) \ , \quad T \to \infty,$$

а, отже, для виконання умови (6) достатньо, щоб

$$\tilde{\psi}_2(r) = \sqrt{r} \int_1^{+\infty} \frac{\psi(-t)dt}{\sqrt{t}(t+r)} = o(\ln^{q-1} r) \ , \quad r \to \infty, \tag{12}$$

бо $\ln^{p-2} r = o(\ln^{q-1} r), r \to \infty \ (p < q+1)$.

Позначимо через $\|\cdot\|_{m,k}$ норму в $L^m(2^k r, 2^{k+1} r)$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$ і $m' = \infty$ при $m = 1$. Маємо, завдяки (8), $\|\psi(-t)\|_{m,k} = \varepsilon(2^k r)(2^k r)^{1/m} \ln^{q-2}(2^k r), r \to \infty$, $\|1\|_{m',k} = (2^k r)^{1/m'}$, де $\varepsilon(t) \to 0, t \to \infty$. Нехай $\tilde{\varepsilon}(r) = \sup\{|\varepsilon(t)| : t \geq r\}$, $k(r) = [\log_2 r] - 1$. Тоді

$$|\tilde{\psi}_2(r)| = \left|\sqrt{r} \int_1^{+\infty} \frac{\psi(-t)dt}{\sqrt{t}(t+r)}\right| \leq \sqrt{r} \left(\int_1^r \frac{|\psi(-t)|}{\sqrt{t}r} dt + \int_r^{+\infty} \frac{|\psi(-t)|}{\sqrt{t}t} dt\right) \leq$$
$$\leq O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) + \frac{1}{r} \left(\sum_{k=-k(r)}^{-1} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{|\psi(-t)|dt}{2^{k/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{|\psi(-t)|dt}{2^{k+k/2}}\right).$$

Враховуючи нерівність Гельдера, маємо

$$|\tilde{\psi}_2(r)| \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) + \frac{1}{r} \left(\sum_{k=-k(r)}^{-1} \frac{\|\psi\|_{m,k} \|1\|_{m',k}}{2^{k/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\psi\|_{m,k} \|1\|_{m',k}}{2^{3k/2}}\right) \leq$$
$$\leq O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) + \sum_{k=-k(r)}^{-1} \frac{\tilde{\varepsilon}(2^k r) \ln^{q-2}(2^k r)}{2^{-k/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\varepsilon}(2^k r) \ln^{q-2}(2^k r)}{2^{k/2}} \leq$$
$$\leq O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) + \ln^{q-2} r \left(\sum_{k=1}^{k(r)} \frac{\tilde{\varepsilon}(r/2^k)}{2^{k/2}} + \tilde{\varepsilon}(r) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k)^{q-2}}{2^{k/2}}\right) \ , \quad r \to \infty.$$

За теоремою Тепліца (див., наприклад, [3, п.391, 3^o]) перша сума останнього співвідношення є нескінченно малою функцією при $r \to \infty$. Таким чином, враховуючи, що $\tilde{\varepsilon}(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$, одержуємо $|\psi_2(r)| = o(\ln^{q-2} r), r \to \infty$, а поготів і (12), що завершує доведення теореми 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sheremeta M.M., Tarasyuk R.I., Zabolotskii M.V. *On asymptotic of entire functions of finite logarithm order.* // МАГ, 1995, T.2, Ґ2.
2. Агранович П.З., Логвиненко В.Н. *Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асмптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей.* // Сиб. мат. журн., 1985, T.XXVI, No 5, с.3–19.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. – М.: Наука, 1970. – 592с.

Львівський університет

Надійшло 1.06.95.