Математичні студії
випуск 5

УДК 517.53

ОЦІНКА МОДУЛЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

А.А. Гольдберг

Abstract. A.A. Gol'dberg. *An estimate of modulus of logarithmic derivative of Mittag-Leffler function with applications* // Matematychni Studii. **5** (1995) P.21–30.

We obtain an upper estimate of modulus of logarithmic derivative of Mittag-Leffler function. Using this result we prove the following conjecture of S.M. Shah: Mittag-Leffler function of order less than one is a function of bounded index.

1. Вступ. Нехай $0 < \varrho < \infty$. Функцією Міттаг-Леффлера називається ціла функція $E_\varrho(z)$ з таким розвиненням у ряд Тейлора

$$E_\varrho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + k/\varrho)}.$$

Про властивості функції Міттаг-Леффлера, яка використовується в багатьох задачах теорії цілих функцій, див.[1], п.18.1, [2], гл.I, §4, гл.III, §4, [3], гл.III, [4], гл.II, §5, п.3°, [5].

Нехай $l(x) = 1$ при $0 \le x \le 1$, $l(x) = x^{\varrho-1}$ при $1 \le x < \infty$, a_k – нулі $E_\varrho(z)$, $G(q) = \bigcup_k \{z : |z - a_k| \le q/l(|a_k|)\}$, $q > 0$. Тут буде доведена така

Теорема 1. *Для всякого достатньо малого $q > 0$ існує число $\mathcal{P} > 0$ таке, що*

$$|E'_\varrho(z)/E_\varrho(z)| \le \mathcal{P} l(|z|), \qquad z \notin G(q). \tag{1}$$

Очевидно, (1) досить довести при $|z| > 2$. Тому ми надалі будемо вважати, що $|z| > 2$ і $l(|z|) = |z|^{\varrho-1}$. Ця теорема у випадку, коли ϱ – раціональне число, одержується простою комбінацією результатів М.М. Шеремети [6] та М.М. Шеремети і А.Д. Кузика [7]. З відомих асимптотичних формул для нулів функції $E_\varrho(z)$ легко випливає, що для довільного $q > 0$ і довільного $z \in \mathbb{C}$ в крузі з центром в z і радіуса $q/l(|z|)$ міститься рівномірно (відносно z) обмежена кількість нулів $E_\varrho(z)$. Разом з (1) це згідно з [7] дозволяє стверджувати справедливість наступної теореми.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D35.
The research described in this publication was made posible in part by Grant ҐUCR000 from the International Science Foundation.

Теорема 2. *Функція $E_\varrho(z)$ є функцією обмеженого l-індексу,*

тобто існує таке $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}_+$, що

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \le k \le \mathcal{N}\right\}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}$.

Гіпотезу про справедливість цієї теореми було висунуто М.М. Шереметою в [6], там же він довів це твердження для раціональних чисел ϱ. З теореми 2 випливає ([8], лема 1) такий

Наслідок. *Функція $E_\varrho(z)$ при $0 < \varrho \le 1$ є функцією обмеженого індексу,*

тобто існує таке $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}_+$, що $|f^{(n)}(z)|/n! \le \max\{|f^{(k)}(z)|/k! : 0 \le k \le \mathcal{N}\}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}$.

С. Шах висловив гіпотезу про справедливість цього твердження і довів [10] його при $\varrho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. М.М. Шеремета [6] довів цей наслідок для раціональних $\varrho \in (0, 1]$.

Оскільки $E_1(z) = e^z$, $E_{1/2}(z) = \operatorname{ch}\sqrt{z}$ і ці елементарні функції та їхні логарифмічні похідні досліджуються тривіально, ми надалі виключаємо з розгляду значення $\varrho = 1$ і $\varrho = 1/2$, про що ми не нагадуватимемо кожен раз.

Відомо, що функція $E_\varrho(z)$ є цілою функцією цілком регулярного зростання в розумінні Б.Я. Левіна-А. Пфлюгера. Неважко перевірити, що нулі $E_\varrho(z)$ задовольняють умову (C$'$) з [11], с.128, а саме: нулі a_n розміщені всередині скінченної кількості замкнених кутів зі спільною вершиною в початку координат, які не мають інших спільних точок, причому якщо перенумерувати нулі всередині будь-якого з цих кутів у порядку зростання модулів, то для цих нулів, які розміщені всередині одного кута, виконується $|a_{k+1}| - |a_k| > d|a_k|^{1-\varrho}$ при деякому $d > 0$.

Дійсно, нехай $\varrho > 1/2$. Відомо ([2], с.156), що λ_n – нулі функції $E_\varrho(z)$, що лежать у верхній півплощині, мають таку асимптотику (ми виправляємо помилку в [2] і позначаємо $\alpha = 1/\varrho$):

$$\lambda_n = e^{i\pi\alpha/2}(2\pi n)^\alpha\left(1 - \frac{1}{4\varrho^2 n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + i\frac{\ln n}{\varrho^2 2\pi n} + iO\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}|\lambda_n| &= (2\pi n)^\alpha\left(1 - \frac{1}{4\varrho^2 n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right) = \\ &= (2\pi n)^\alpha - \frac{(2\pi)^\alpha}{4\varrho^2}n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-2}\ln^2 n\right), \qquad n \to \infty,\end{aligned} \tag{3}$$

де в (2) і (3) через $O(\cdot)$ позначені дійсні величини. Крім того, нулями $E_\varrho(z)$ будуть $\overline{\lambda}_n$ і при $1/2 < \varrho < 1$ скічення кількість від'ємних нулів [1], [12]. З (3) випливає, що $|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| = (1 + o(1))(2\pi)^\alpha \alpha n^{\alpha-1}$, а $|\lambda_n|^{1-\varrho} = (1 + o(1))(2\pi)^{\alpha-1}n^{\alpha-1}$, $n \to \infty$, тому при $0 < q < 2\pi\alpha$ і $n \ge n_0(q)$ виконується $|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| > q|\lambda_n|^{1-\varrho}$. Звідси ясно, що при достатньо малому d умова (C$'$) справджується.

Якщо $0 < \varrho < 1/2$, то всі нулі λ_n, крім скінченної кількості[1], від'ємні і для

[1] А. Віман [12] стверджує навіть, що всі нулі λ_n від'ємні, але його доведення не видається переконливим. Проте Й.В. Островський довів справедливість цього твердження (письмове повідомлення).

них виконується

$$\lambda_n = -\frac{(\pi(n-1/2))^{\alpha}}{(\sin\pi\varrho)^{\alpha}} + o(n^{\alpha-1}), \qquad n\to\infty. \tag{4}$$

Справедливість (4) доведена в [5], вона буде випливати також з міркувань при доведенні теореми 1 (трохи менш точне співвідношення фактично виведене в [12]). З (4) також легко випливає, що і при $0<\varrho<1/2$ нулі $E_\varrho(z)$ задовольняють умову (C$'$).

Б.Я. Левін ([11], гл.2, теорема 5) довів, що якщо ціла функція f порядку ϱ цілком регулярного зростання з нулями (a_k), що задовольняють умову (C$'$), то в $\mathbb{C}\setminus G(q)$ справедливе співвідношення $\ln|f(re^{i\varphi})| = \mathcal{H}(\varphi)r^\varrho + o(r^\varrho)$, $r\to\infty$. Це наводить на думку, що і для таких функцій справедлива теорема 1. В кінці цієї статті буде показано, що це не так. Отже, специфічні властивості функцій $E_\varrho(z)$ не лише істотно використовуються при доведенні теореми 1, але суттєві для справедливості самої теореми.

Щиро дякую М.М. Шереметі, який уважно прочитав рукопис та висловив низку справедливих критичних зауважень.

2. *Доведення теореми 1 при* $\varrho > 1/2$. З відомих асимптотичних формул для $E_\varrho(z)$ легко випливає, що для довільно малого η, $0<\eta<\min\{\pi-\pi\alpha/2, \pi\alpha/2\}$ в $\{z: |\arg z|\le \pi\alpha/2-\eta\}$ справедливе

$$E'_\varrho(z)/E_\varrho(z) = \varrho z^{\varrho-1} + O(z^{\varrho-2}e^{-z^\varrho}), \qquad z\to\infty, \tag{5}$$

а в $\{z: \pi\alpha/2+\eta\le|\arg z|\le\pi\}$ –

$$E'_\varrho(z)/E_\varrho(z) = -z^{-1} + O(z^{-2}), \qquad z\to\infty. \tag{6}$$

З (5) і (6) випливає, що у вказаних кутах справедлива оцінка (1) з достатньо великим $\mathcal{P}$. Потрібно отримати оцінку (1) в кутах

$$W_1 = \{z: \pi\alpha/2-\eta < \arg z < \pi\alpha/2+\eta, |z|>2\}$$

та

$$W_2 = \{z: -\pi\alpha/2-\eta < \arg z < -\pi\alpha/2+\eta, |z|>2\}.$$

Оскільки $E'_\varrho(\overline{z})/E_\varrho(\overline{z}) = \overline{E'_\varrho(z)/E_\varrho(z)}$, то досить дістати потрібну оцінку в першому з цих кутів.

В W_1 фукція $E_\varrho(z)$ може бути зображена у вигляді

$$E_\varrho(z) = \varrho e^{z^\varrho} - \frac{a}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad a = \frac{1}{\Gamma(1-1/\varrho)}, \quad z\to\infty. \tag{7}$$

При достатньо великих $\mathcal{R}$ нулі, що лежать в $W_1\cap\{z: |z|>\mathcal{R}\}$, зображуються у вигляді (2), і при $n\ge\mathcal{N}$ круги $\{z: |z-\lambda_n|\le q|\lambda_n|^{1-\varrho}\}$, $0<q<\pi\alpha$, попарно не перетинаються і лежать в W_1. З (7) випливає, що

$$\varrho e^{\lambda_n^\varrho} = \frac{a}{\lambda_n} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right), \quad n\to\infty.$$

Нехай $\zeta = \lambda_n + q\lambda_n^{1-\varrho}e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Тоді

$$\begin{aligned}
\zeta^\varrho =& \lambda_n^\varrho(1+q\lambda_n^{-\varrho}e^{i\theta})^\varrho = \lambda_n^\varrho + \varrho q e^{i\theta} + O(\lambda_n^{-\varrho}), \quad n\to\infty,\\
E_\varrho(\zeta) =& \varrho e^{\lambda_n^\varrho}\exp\{\varrho q e^{i\theta} + O(\lambda_n^{-\varrho})\} - \frac{a}{\lambda_n + q\lambda_n^{1-\varrho}e^{i\theta}} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) =\\
=& \frac{a}{\lambda_n}\exp\{\varrho q e^{i\theta} + O(\lambda_n^{-\varrho})\} - \frac{a}{\lambda_n + q\lambda_n^{1-\varrho}e^{i\theta}} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) =\\
=& \frac{a}{\lambda_n}\left(\exp\{\varrho q e^{i\theta} + O(\lambda_n^{-\varrho})\} - 1\right) + \frac{aq\lambda_n^{1-\varrho}e^{i\theta}}{\lambda_n^2(1+q\lambda_n^{-\varrho}e^{i\theta})} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) =\\
=& \frac{a}{\lambda_n}\left(\exp\{\varrho q e^{i\theta} + O(\lambda_n^{-\varrho})\} - 1\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{1+\varrho}}\right), \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

При достатньо великих n модуль $|\exp(\varrho q e^{i\theta} + O(\lambda_n^{-\varrho})) - 1|$ обмежений знизу. Звідси випливає, що існує така стала $\mathcal{K}$, що $|E_\varrho(\zeta)| \ge \mathcal{K}|\lambda_n|^{-1}$ для всіх $\lambda_n \in W_1$. Оцінимо $|E'_\varrho(\zeta)|$ зверху. Оскільки в W_1 маємо

$$E'_\varrho(z) = \varrho^2 z^{\varrho-1}\exp(z^\varrho) + az^{-2} + O(z^{-3}), \quad z\to\infty,$$

то

$$\begin{aligned}
|E'_\varrho(\zeta)| \le& \varrho|\zeta|^{\varrho-1}|\varrho e^{\zeta^\varrho}| + O(|\zeta|^{-2}) =\\
=& \varrho|\zeta|^{\varrho-1}|\varrho e^{\lambda_n^\varrho}|\cdot|\exp\{\varrho q + O(\lambda_n^{-\varrho})\}| + O(|\lambda_n|^{-2}) =\\
=& \varrho|\zeta|^{\varrho-1}\frac{|a|}{|\lambda_n|}O(1) + O\left(\frac{|\zeta|^{\varrho-1}}{|\lambda_n|^2}\right) + O(|\lambda_n|^{-2}) \le \mathcal{K}_1\frac{|\zeta|^{\varrho-1}}{|\lambda_n|},
\end{aligned}$$

де $\mathcal{K}_1$ – деяка додатна стала. Тепер ми маємо, що на колах $\{\zeta : |\zeta - \lambda_n| = q|\lambda_n|^{1-\varrho}\}$ виконується

$$\left|\frac{E'_\varrho(\zeta)}{E_\varrho(\zeta)}\right| \le \frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}}|\zeta|^{\varrho-1}.$$

Таким чином, на краю множини $W_1\backslash G(q)$справджується (1) при достатньо великому $\mathcal{P}$.

Оцінимо тепер модуль $|E'_\varrho(z)/E_\varrho(z)|$ на колі

$$\{z : |z| = r_n\}, \qquad r_n = (|\lambda_n| + |\lambda_{n+1}|)/2, \quad n \ge n_0.$$

З теореми Адамара ([4], гл.II, §4) отримаємо, що

$$E_\varrho(z) = e^{\mathcal{P}(z)}\prod_\nu E(\frac{z}{a_\nu}, p),$$

де $E(z,p)$ – первісний множник Вейерштрасса роду p, $p = [\varrho]$, $\mathcal{P}$ – многочлен степеня не вище p. Тоді

$$E'_\varrho(z)/E_\varrho(z) = \mathcal{P}'(z)/\mathcal{P}(z) + z^p\sum_\nu \frac{1}{a_\nu^p(z-a_\nu)}.$$

Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$ настільки велике, що при $k \geq n_0$ виконується $(2\pi)^\alpha k^\alpha \geq |\lambda_k| \geq$ $\geq (2\pi)^\alpha (k-1)^\alpha$. Те, що n_0 можна вибрати настільки великим, щоб виконувалась ліва нерівність, очевидне. Можливість досягти того, щоб виконувалась права нерівність, випливає з рівності (див. (3))

$$\begin{aligned}|\lambda_k| - (2\pi(k-1))^\alpha =&(2\pi k)^\alpha - \frac{(2\pi)^\alpha}{4\varrho^2}k^{\alpha-1} + O(k^{\alpha-2}\ln^2 k) - (2\pi(k-1))^\alpha = \\ =&(2\pi k)^\alpha \left\{(1-(1-1/k)^\alpha) - \frac{\alpha^2}{4}k^{-1} + O(k^{-2}\ln^2 k)\right\} = \\ =&(2\pi k)^\alpha \left\{\alpha(1-\alpha/4)k^{-1} + O(k^{-2}\ln^2 k)\right\}, \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Тоді

$$E'_\varrho(z)/E_\varrho(z) = O(z^{p-1}) + z^p \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^p (z-\lambda_k)} + z^p \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\overline{\lambda}_k^p (z-\overline{\lambda}_k)}, \quad z \to \infty.$$

Нехай $c_\varrho = (p/(p+1))^\varrho$. Тоді

$$\begin{aligned}\left|\frac{E'_\varrho(r_n e^{i\varphi})}{E_\varrho(r_n e^{i\varphi})}\right| \leq& O(r_n^{p-1}) + 2r_n^p \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^p \big|r_n - |\lambda_k|\big|} \leq O(r_n^{p-1}) + \\ &+2r_n^p \sum_{k=n_0}^{[c_\varrho n]} \frac{1}{|\lambda_k|^p \big(r_n - |\lambda_k|\big)} + 2r_n^p \sum_{k=[c_\varrho n]+1}^{n-2} \frac{1}{|\lambda_k|^p \big(|\lambda_n| - |\lambda_k|\big)} + \\ &+4r_n^p (|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n|)^{-1} \sum_{k=n-1}^{n+2} |\lambda_k|^{-p} + 2r_n^p \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^p \big(|\lambda_k| - |\lambda_{n+1}|\big)} = \\ &=O(r_n^{p-1}) + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4.\end{aligned}$$

Оцінимо кожен доданок $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, враховуючи, що

$$\begin{aligned}r_n &\sim (2\pi)^\alpha n^\alpha, \qquad n \to \infty, \\ \int_{x_0}^{a} \frac{x^{\varrho-p-1}dx}{1-x} &\sim \ln\frac{1}{1-a}, \quad a \to 1-, \quad 0 < x_0 < 1, \\ \int_{a}^{\infty} \frac{x^{\varrho-p-1}dx}{x-1} &\sim \ln\frac{1}{a-1}, \quad a \to 1+.\end{aligned}$$

Маємо $(n \to \infty)$

$$\mathcal{A}_1 = O\left(r_n^{p-1} \sum_{k=n_0}^{[c_\varrho n]} k^{-p\alpha}\right) = \begin{cases} O(r_n^{p-1} n^{1-p\alpha}) = O(r_n^{\varrho-1}), & \text{якщо } \varrho > p, \\ O(r_n^{p-1}\ln n) = O(r_n^{\varrho-1}\ln r_n), & \text{якщо } \varrho = p, \end{cases}$$

Отже, в будь-якому випадку $\mathcal{A}_1 = O(r_n^{\varrho-1}\ln r_n)$, $n \to \infty$. Далі

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 \leq& 2r_n^p \sum_{k=[c_\varrho n]+1}^{n-2} \frac{1}{(2\pi k)^{p\alpha}(2\pi)^\alpha((n-1)^\alpha - k^\alpha)} = \\ =&O\left(r_n^p \sum_{k=[c_\varrho n]+1}^{n-2} \frac{1}{k^{p\alpha}((n-1)^\alpha - k^\alpha)}\right), \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Враховуючи, що при $n-1>k>c_\varrho n$ скінченна послідовність $k^{p\alpha}((n-1)^\alpha-k^\alpha)$ спадає, дістаємо

$$\sum_{k=[c_\varrho n]+1}^{n-2}\frac{1}{k^{p\alpha}((n-1)^\alpha-k^\alpha)}\le\frac{1}{(n-2)^{p\alpha}((n-1)^\alpha-(n-2)^\alpha)}+$$

$$\int_{c_\varrho n}^{n-2}\frac{dt}{t^{p\alpha}((n-1)^\alpha-t^\alpha)}\le O(n^{1-(p+1)\alpha})+\varrho(n-1)^{1-(p+1)\alpha}\int_{p/(p+1)}^{(1-1/n)^\alpha}\frac{x^{\varrho-p-1}}{1-x}dx=$$

$$=O(r_n^{\varrho-p-1})+O\left(n^{1-(p+1)\alpha}\ln\frac{1}{1-(1-1/n)^\alpha}\right)=$$

$$=O(r_n^{\varrho-p-1})+O(r_n^{\varrho-p-1}\ln r_n)=O(r_n^{\varrho-p-1}\ln r_n),\quad n\to\infty.$$

Отже, $\mathcal{A}_2=O(r_n^{\varrho-1}\ln r_n)$, $n\to\infty$. Легко оцінюється $\mathcal{A}_3$:

$$\mathcal{A}_3=O(r_n^p n^{1-\alpha}n^{-p\alpha})=O(r_n^{\varrho-1}),\quad n\to\infty.$$

Нарешті,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4\le&2r_n^p\sum_{k=n+3}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{(p+1)\alpha}(k-1)^{p\alpha}((k-1)^\alpha-(n+1)^\alpha)}=\\=&O\left(r_n^p\left\{\frac{1}{(n+2)^{p\alpha}}\frac{1}{(n+2)^\alpha-(n+1)^\alpha}+\int_{n+2}^\infty\frac{dt}{t^{p\alpha}(t^\alpha-(n+1)^\alpha)}\right\}\right)=\\=&O(r_n^{\varrho-1})+O\left(r_n^p(n+1)^{1-(p+1)\alpha}\varrho\int_{(1+\frac{1}{n+1})^\alpha}^\infty\frac{x^{\varrho-p-1}}{x-1}dx\right)=\\=&O(r_n^{\varrho-1})+O\left(r_n^{\varrho-1}\ln\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^\varrho-1}\right)=\\=&O(r_n^{\varrho-1})+O(r_n^{\varrho-1}\ln r_n)=O(r_n^{\varrho-1}\ln r_n),\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Таким чином,

$$|E_\varrho'(r_ne^{i\varphi})/E_\varrho(r_ne^{i\varphi})|=O(r_n^{\varrho-1}\ln r_n),\quad n\to\infty. \tag{8}$$

Розглянемо в W_1 функцію $\Psi(z)=z^{1-\varrho}E_\varrho'(z)/E_\varrho(z)$. На краю множини $W_1\backslash G(q)$, як було доведено, $|\Psi(z)|\le\mathcal{P}$. На обмежених зв'язних компонентах $W_1\backslash G(q)$, якщо вони є, виконується $|\Psi(z)|\le\mathcal{P}$ з огляду на принцип максимуму модуля. Для необмеженої зв'язної компоненти $W_1\backslash G(q)$ (позначимо її через $W_{1\infty}$) застосуємо варіант методу Фрагмена-Ліндельофа. Нехай z_0 – довільна точка в $W_{1\infty}$, $\varepsilon>0$ – довільне мале число, $\Psi_\varepsilon(z)=z^{1-\varrho-\varepsilon}E_\varrho'(z)/E_\varrho(z)$, n вибране настільки великим, що $|z_0|<r_n$ і на $\{z:|z|=r_n,\ \frac{\pi}{2\varrho}-\eta<\arg z<\frac{\pi}{2\varrho}+\eta\}$ виконується $|\Psi_\varepsilon(z)|\le\mathcal{P}$, що можливе з огляду на (8). З принципу максимуму модуля випливає, що $|\Psi_\varepsilon(z_0)|\le\mathcal{P}$. Спрямувавши ε до 0, дістаємо, що $|\Psi(z_0)|\le\mathcal{P}$. Отже, скрізь в $W_1\backslash G(q)$ виконується $|\Psi(z)|\le\mathcal{P}$, тобто (1).

3. *Доведення теореми 1 у випадку* $0<\varrho<1/2$. Позначимо $\mathcal{M}(\varphi)=\{k\in\mathbb{Z}:|\varphi+2\pi k|<\pi\alpha\}$. Нехай η, $\pi/2>\eta>0$, настільки мале, що $\mathcal{M}(\varphi)=\mathcal{M}(\pi)$ при

$|\varphi-\pi|\le\eta$. Оскільки $n(r,0,E_\varrho)=\frac{\sin\pi\varrho}{\pi}r^\varrho+o(r^\varrho)$, $r\to\infty$, то при $-\pi+\eta\le\varphi\le\pi-\eta$ рівномірно відносно φ виконується ($z=re^{i\varphi}$)

$$E'_\varrho(z)/E_\varrho(z)=\varrho z^{\varrho-1}+o(r^{\varrho-1}),\quad z\to\infty$$

(це можна довести так само, як вправу 5 на с.126 в [4]). Отже, в куті $\{z:|\arg z|\le\pi-\eta\}$ справджується (1). Тепер треба розглянути E'_ϱ/E_ϱ в куті $W=\{z:\pi-\eta<\arg z<\pi+\eta\}$.

Позначимо ($m=0,1,\ldots,m_0$)

$$\Psi_m(z)=\varrho\left\{\exp(z^\varrho e^{2m\pi i\varrho})+\exp(z^\varrho e^{-2(m+1)\pi i\varrho})\right\}$$

визначену в W функцію, де однозначна в W вітка z^ϱ вибрана з умови $\pi-\eta<\arg z<\pi+\eta$, $m_0=\max\{m\in\mathbb{Z}_+:m<1/(2\varrho)-1/2\}$. Відомо, що в W справедливо

$$E_\varrho(z)=\sum_{m=0}^{m_0}\Psi_m(z)+O(1/z),\quad z\to\infty, \tag{9}$$

при $\varrho=1/n$, $n\in\mathbb{N}$, член $O(1/z)$ відсутній. З (9) легко виводиться

$$E'_\varrho(z)=\sum_{m=0}^{m_0}\Psi'_m(z)+O(1/z^2),\quad z\to\infty. \tag{10}$$

Нехай

$$r_k=\frac{(k-1/2)^\alpha\pi^\alpha}{(\sin\pi\varrho)^\alpha},\quad a_k=-r_k,$$
$$\zeta=a_k+dr_k^{1-\varrho}e^{i\theta},\quad d=q/4,\quad 0<q\le2,\quad 0\le\theta\le2\pi.$$

Тоді

$$\zeta^\varrho=(r_ke^{i\pi}+dr_k^{1-\varrho}e^{i\theta})^\varrho=r_k^\varrho e^{i\pi\varrho}(1-dr_k^{-\varrho}e^{i\theta})^\varrho=r_k^\varrho e^{i\pi\varrho}-d\varrho e^{i(\theta+\pi\varrho)}+O(r_k^{-\varrho}), k\to\infty.$$

Звідси

$$\begin{aligned}|\Psi_m(\zeta)|\le&\varrho\exp\left(r_k^\varrho\cos(2m+1)\pi\varrho-d\varrho\cos(\theta+(2m+1)\pi\varrho)+O(r_k^{-\varrho})\right)+\\&+\varrho\exp\left(r_k^\varrho\cos(2m+1)\pi\varrho-d\varrho\cos(\theta-(2m+1)\pi\varrho)+O(r_k^{-\varrho})\right)\le\\&\le2\varrho\exp\left(r_k^\varrho\cos(2m+1)\pi\varrho+d\varrho+O(r_k^{-\varrho})\right),\qquad k\to\infty,\end{aligned} \tag{11}$$

$$|\Psi'_m(\zeta)|\le2\varrho^2r_k^{\varrho-1}\exp\left(r_k^\varrho\cos(2m+1)\pi\varrho+d\varrho+O(r_k^{-\varrho})\right),\qquad k\to\infty. \tag{12}$$

Величину $|\Psi_0(\zeta)|$ оцінимо знизу

$$\begin{aligned}|\Psi_0(\zeta)|=\varrho\,|&\exp(r_k^\varrho e^{i\pi\varrho})\exp(-d\varrho e^{i(\theta+\pi\varrho)})\exp(O(r_k^{-\varrho}))+\\&+\exp(r_k^\varrho e^{-i\pi\varrho})\exp(-d\varrho e^{i(\theta-\pi\varrho)})\exp(O(r_k^{-\varrho}))\,|=\\=\varrho\exp(r_k^\varrho\cos\pi\varrho)\,|&\exp(-d\varrho e^{i(\theta+\pi\varrho)}+ir_k^\varrho\sin\pi\varrho)(1+o(1))+\\&+\exp(-d\varrho e^{i(\theta-\pi\varrho)}-ir_k^\varrho\sin\pi\varrho)(1+o(1))\,|=\\&=\varrho\exp(r_k^\varrho\cos\pi\varrho)\exp(-d\varrho\cos\theta\cos\pi\varrho)\times\\&\times|\exp(dr\sin\theta\sin\pi\varrho)\exp(-id\varrho\cos\theta\sin\pi\varrho)(1+o(1))-\\&-\exp(-dr\sin\theta\sin\pi\varrho)\exp(id\varrho\cos\theta\sin\pi\varrho)(1+o(1))\,|\ge\\&\ge\varrho\exp(r_k^\varrho\cos\pi\varrho)\exp(-d\varrho\cos\pi\varrho)\left|2i\sin(d\varrho\sin\pi\varrho e^{i\theta})+o(1)\right|\ge\\&\ge2\varrho\exp(r_k^\varrho\cos\pi\varrho)\exp(-d\varrho\cos\pi\varrho)\left\{\sin(d\varrho\sin\pi\varrho)+o(1)\right\},\quad k\to\infty.\end{aligned} \tag{13}$$

З уваги на те, що $\cos\pi\varrho > \cos 3\pi\varrho > \cdots > \cos(2m_0+1)\pi\varrho > -1$, а також з (9)–(13) отримаємо

$$|E_\varrho(\zeta)| = |\Psi_0(\zeta)|(1+o(1)), \quad k\to\infty, \tag{14}$$
$$|E'_\varrho(\zeta)| \le 2\varrho^2 r_k^{\varrho-1}\exp(r_k^\varrho\cos\pi\varrho)(e^{d\varrho}+o(1)), \quad k\to\infty. \tag{15}$$

З (14) за теоремою Руше випливає, що всередині круга $G'_k(d)=\{z: |z+r_k|< dr_k^{1-\varrho}\}$ фунція $E_\varrho(z)$ має (при достатньо великих k) стільки ж нулів, як і $\Psi_0(z)$. А Ψ_0 має в цьому крузі єдиний нуль першого порядку в точці a_k, що неважко перевірити елементарними рахунками (пор. [12], [5]). Отже, при достатньо великих k маємо

$$|\lambda_k - a_k| < dr_k^{1-\varrho}. \tag{16}$$

З (13)–(15) випливає, що

$$\begin{aligned}|E'_\varrho(\zeta)/E_\varrho(\zeta)| &\le \varrho r_k^{\varrho-1}e^{d\varrho(1+\cos\pi\varrho)}/\sin(d\varrho\sin\pi\varrho)(1+o(1)) = \\ &= \varrho|\zeta|^{\varrho-1}e^{d\varrho(1+\cos\pi\varrho)}/\sin(d\varrho\sin\pi\varrho)(1+o(1)), \quad k\to\infty.\end{aligned}$$

Отже, на краю $W\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}G'_k(d)$ при достатньо великому $\mathcal{P}$ справджується (1).

Тепер так само, як у випадку $\varrho>1/2$, методом Фрагмена-Ліндельофа доводимо, що (1) є вірне в $\mathbb{C}\setminus G'(d)$, $G'(d)=\bigcup_{k=1}^{\infty}G'_k(d)$.

Нехай $z\in G'_k(d)$. Тоді $|z-\lambda_k|\le|z-a_k|+|a_k-\lambda_k|<2dr_k^{1-\varrho}$. З (16) випливає, що $r_k - dr_k^{1-\varrho}<|\lambda_k|$, тим більше $r_k(1-d)<|\lambda_k|$, $r_k<2|\lambda_k|$. Тому $|z-\lambda_k|< \; < 2^{2-\varrho}d|\lambda_k|^{1-\varrho}<q|\lambda_k|^{1-\varrho}$. Отже, $G'_k(d)\subset\{z: |z-\lambda_k|<q|\lambda_k|^{1-\varrho}\}$ і $G'(d)\subset G(q)$. Якщо (1) виконується в $\mathbb{C}\setminus G'(d)$, то й поготів в $\mathbb{C}\setminus G(q)$. Теорему 1 повністю доведено.

4. *Приклад однієї цілої функції цілком регулярного зростання.* Обмежимося прикладом цілої функції порядку ϱ, $0<\varrho<1$. Нехай $k_n=2^{2^n}$, $q_n=2^{2^n}-2^{2^n-n}=k_n(1-2^{-n})$. Легко перевірити, що $q_{n+1}>k_n$, $n\in\mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[k_n,q_{n+1}]$, $\mathcal{A}=\{k^{1/\varrho}: k\in\mathcal{B}\cap\mathbb{N}\}$, $f(z)=\prod_{a\in\mathcal{A}}(1-z/a)$. Ясно, що $n(r,0)\le r^\varrho$. З іншого боку,

$$\begin{aligned}\varliminf_{r\to\infty}\frac{n(r,0)}{r^\varrho} &= \varliminf_{n\to\infty}\frac{n(k_{n+1},0)}{k_{n+1}^\varrho} = \varliminf_{n\to\infty}\frac{n(q_{n+1},0)}{k_{n+1}^\varrho} = \\ &= \varliminf_{n\to\infty}\frac{q_{n+1}^\varrho-k_n^\varrho}{k_{n+1}^\varrho} = \varliminf_{n\to\infty}\{(1-2^{-n-1})^\varrho-(k_n/k_{n+1})^\varrho\}=1.\end{aligned}$$

Отже, $n(r,0)=(1+o(1))r^\varrho$, $r\to\infty$, і f є функцією цілком регулярного зростання. Оскільки послідовність $(k^{1/\varrho})_1^\infty$ задовольняє умову (C$'$), то і поготів послідовність $\mathcal{A}$ задовольняє цю умову.

Оцінимо модуль функції

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{a\in\mathcal{A}}\frac{1}{z-a}$$

в точах $k_n^\alpha(1-q/k_n)=l_n$, де q – довільне фіксоване додатне число, настільки мале, що $l_n>q_n^\alpha$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Маємо

$$\begin{aligned}\left|\frac{f'(l_n)}{f(l_n)}\right| &= \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\geq k_n^\alpha}}\frac{1}{a-l_n}-\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\leq q_n^\alpha}}\frac{1}{l_n-a}\geq\sum_{k=k_n}^{q_{n+1}}\frac{1}{k^\alpha-l_n}-\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{l_n-k^\alpha}\geq\\ &\geq\int_{k_n}^{q_{n+1}}\frac{dt}{t^\alpha-l_n}-\int_1^{q_n+1}\frac{dt}{l_n-t^\alpha}=\\ &=\varrho l_n^{\varrho-1}\int_{k_n^\alpha/l_n}^{q_{n+1}^\alpha/l_n}\frac{x^{\varrho-1}dx}{x-1}-\varrho l_n^{\varrho-1}\int_{1/l_n}^{(q_n+1)^\alpha/l_n}\frac{x^{\varrho-1}dx}{1-x}=\\ &=\varrho l_n^{\varrho-1}\left\{\int_{(1-q/k_n)^{-1}}^{\infty}\frac{x^{\varrho-1}dx}{x-1}-\int_0^{b_n}\frac{x^{\varrho-1}dx}{1-x}+o(1)\right\}=\\ &=(1+o(1))\varrho l_n^{\varrho-1}\left\{\ln\frac{1}{(1-q/k_n)^{-1}-1}-\ln\frac{1}{1-b_n}\right\},\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

де $b_n=(1-2^{-n}+k_n^{-1})^\alpha/(1-q/k_n)=1-\alpha 2^{-n}+o(2^{-n})$, $n\to\infty$. Тоді

$$\ln\frac{1}{(1-q/k_n)^{-1}-1}-\ln\frac{1}{1-b_n}=\ln k_n+O(1)+n\ln 2=(1+o(1))\ln k_n=\varrho(1+o(1))\ln l_n.$$

Отже,

$$|f'(l_n)/f(l_n)|\geq(1+o(1))\varrho^2 l_n^{\varrho-1}\ln l_n.$$

Таким чином, для нашої функції f в $\mathbb{C}\backslash G(q)$ оцінка (1) неможлива при жодному $\mathcal{P}$, бо l_n лежать на краю $\mathbb{C}\backslash G(q)$.

Зауваження. Цей приклад, що стосується цілих функцій, нулі яких задовольняють умову (C′), контрастує з ситуацією для цілих функцій цілком регулярного зростання, нулі $\{a_k\}$ яких задовольняють умову (C) за Б.Я. Левіним [11], с.128, тобто при достатньо малому $q>0$ круги $U_k=\{z:|z-a_k|<q|a_k|^{1-\varrho/2}\}$ попарно не перетинаються. В цьому випадку (1) справджується поза $\cup_k U_k$. Це легко довести, використавши деякі оцінки зі статті [13].

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.3. – М.:Наука, 1967. – 300с.
2. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. – М.:ГИТТЛ, 1957. – 160с.
3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.:Наука, 1966. – 672с.
4. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.:Наука, 1970. – 592с.
5. Седлецкий А.М. *Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера* // Analysis Math. 1994. V.20. P.117–132.
6. Шеремета М.М. *До гіпотези Шаха про обмеженість індексу функції Міттаг-Леффлера* // (друкується)
7. Шеремета М.Н., Кузык А.Д. *О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-распределения значений* // Сибирск. мат. ж. 1992. Т.33, Ґ2. С.142–150.
8. Гольдберг А.А., Шеремета М.Н. *О существовании целой транцендентной функции ограниченного l-индекса* // Мат. заметки. 1995. Т.57, Ґ1. С.125–129.

9. Shah S.M. *Entire functions of bounded index* // Lect. Notes in Math. 1977. V.589. P.117–145.
10. Shah S.M. *Entire functions satisfying a linear differential equation* // J. Math. Mech. 1968. V.18, Ѓ2. P.131–136.
11. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.:ГИТТЛ, 1956. – 632с.
12. Wiman A. *Ueber die Nullstellen der Funktionen* $E_\alpha(x)$ // Acta math. 1905. V.29. P.217–234.
13. Гольдберг А.А., Коренков Н.Е. *Об асимптотике логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста* // Укр. мат. ж. 1978. Т.30, Ѓ1. С.25–32.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University,

Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшло 30.08.1995.