Математичні студії
випуск 5

УДК 512.546

РАЗЛОЖИМОСТЬ τ-ОГРАНИЧЕННЫХ ГРУПП

И.В. Протасов

Abstract. Protasov I.V. *Resolvability of τ-bounded groups* // Matematychni Studii, **5** (1995) P.17–20.

It is constructed a partition of an infinite group $G = A_1 \cup A_2$ such that the subsets A_1, A_2 are dense in any totally bounded group topology. It is proposed some generalization of this construction.

Топологическая група G называется разложимой, если существуют два непересекающихся подмножества, плотные в группе G. В статье [1] анонсирована теорема Комфорта, Глэдинс и ван Милла о разложимости бесконечной вполне ограниченной абелевой группы. В статье [2] доказано, что любая бесконечная вполне ограниченная группа содержит дискретное незамкнутое подмножество. Как заметил В.И. Малыхин в письме автору от 15.06.1994, из этого утверждения следует разложимость любой бесконечной вполне ограниченной группы. Однако, построение разложения группы этим способом существенно зависит от выбора незамкнутого дискретного подмножества, а, следовательно, и от топологии на группе. Известно [3], что число вполне ограниченных топологий на бесконечной абелевой группе G равно $\exp\exp|G|$.

В этой заметке доказано (теорема 2), что любую бесконечную группу можно разбить на два подмножества, плотные в любой вполне ограниченной топологии на группе. Это утверждение – простое следствие комбинаторной теоремы 1 о разбиении групп. Таким образом, причина разложимости вполне ограниченной группы скорее комбинаторная, чем топологическая. Теорема 1 допускает естественное кардинальное обобщение – теорема 3. В свою очередь, из теоремы 3 вытекают два достаточные признаки (теоремы 4,5) разложимости τ-ограниченных групп. Отметим, что никаких условий отделимости рассматриваемых топологий на группах не предполагается.

Теорема 1. *Для любой бесконечной группы G найдутся такие подмножества A_1, A_2, что $G = A_1 \cup A_2$, $A_1K \neq G$, $A_2K \neq G$ для любого конечного подмножества $K \subset G$.*

Доказательство. Фиксируем некоторый пересчет $\{K_\alpha : \alpha < \gamma\}$ семейства всех непустых конечных подмножеств группы G, $K_0 = \{e\}$, e – единица группы G. Пересчет – это минимальное вполне упорядочение множества. Построим

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22A05, 54H11.

индуктивно два семейства $\{a_\alpha : \alpha < \gamma\}$, $\{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ элементов группы G так, чтобы $A \cap B = \varnothing$, где

$$A = \cup\{a_\alpha K_\alpha : \alpha < \gamma\}, \qquad B = \cup\{b_\alpha K_\alpha : \alpha < \gamma\}.$$

Возьмем два различные элементы $a_0, b_0 \in G$ и положим $A_0 = \{a_0\}$, $B_0 = \{b_0\}$. Фиксируем ординал $\lambda \geq \gamma$ и предположим, что для всех ординалов $\beta < \lambda$ мы уже нашли такие семейства $\{a_\alpha : \alpha < \beta\}$, $\{b_\alpha : \alpha < \beta\}$ элементов группы G, для которых $A_\beta \cap B_\beta = \varnothing$, где $A_\beta = \cup\{a_\alpha K_\alpha : \alpha < \beta\}$, $B_\beta = \cup\{b_\alpha K_\alpha : \alpha < \beta\}$.

Если λ – предельный ординал, то полагаем

$$A_\lambda = \cup\{A_\beta : \beta < \lambda\}, \qquad B_\lambda = \cup\{B_\beta : \beta < \lambda\}.$$

Допустим, что $\lambda = \delta + 1$. Так как $|B_\delta K_{\delta+1}^{-1}| < |G|$, то выберем элемент $a_{\delta+1} \notin B_\delta K_{\delta+1}^{-1}$. Положим $A_{\delta+1} = A_\delta \cup \{a_{\delta+1}K_{\delta+1}\}$. Так как $|A_{\delta+1}K_{\delta+1}^{-1}| < |G|$, то выбирем элемент $b_{\delta+1} \notin A_{\delta+1}K_{\delta+1}^{-1}$. Положим $B_{\delta+1} = B_\delta \cup \{b_{\delta+1}K_{\delta+1}\}$. Ясно, что $A_{\delta+1} \cap B_{\delta+1} = \varnothing$. Итак, трансфинитной индукцией построены подмножества $A = A_\gamma$, $B = B_\gamma$, причем $A \cap B = \varnothing$.

Положим $A_1 = G \backslash A$, $A_2 = G \backslash B$. Поскольку $A \cap B = \varnothing$, то $G = A_1 \cup A_2$. Допустим, что $A_1 K = G$ для некоторого конечного подмножества $K \subset G$. Выберем такой ординал $\alpha < \gamma$, что $K_\alpha = K^{-1}$. Так как $A_1 K_\alpha^{-1} = G$, то $a_\alpha \in A_1 K_\alpha^{-1}$ и $a_\alpha K_\alpha \cap A_1 \neq \varnothing$. Однако по определению подмножества A_1 $a_\alpha K_\alpha \subset G \backslash A_1 = A$. Аналогично приводится к противоречию и предположение о том, что $A_2 K = G$ для некоторого конечного подмножества $K \subset G$.

Напомним, что топологическая группа G называется вполне ограниченной, если для любой окрестности единицы $\mathcal{U}$ найдется такое конечное подмножество K, что $G = \mathcal{U}K$.

Теорема 2. *Любую бесконечную группу G можно разбить на два подмножества $G = A_1 \cup A_2$, плотные в любой вполне ограниченной топологии на группе G.*

Доказательство. По теореме 1 найдутся такие подмножества A_1, A_2, что $G = A_1 \cup A_2$, $A_1 K \neq G$, $A_2 K \neq G$ для любого конечного подмножества $K \subset G$. Не умаляя общности, можно считать, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Предположим, что в некоторой вполне ограниченной топологии на группе G подмножество A_i имеет непустую внутренность. Тогда найдется такое конечное подмножество F, что $A_i F = G$. Значит, $\mathrm{int}\, A_1 = \mathrm{int}\, A_2 = \varnothing$ и $\mathrm{cl}\, A_1 = \mathrm{cl}\, A_2 = G$.

Теорема 3. *Пусть G – бесконечная группа мощности γ, τ – кардинал и $\gamma^\mu = \gamma$ для всех кардиналов μ, удовлетворяющих условию $0 < \mu < \tau$. Если $\tau < \gamma$ либо $\mathrm{cf}\,\gamma = \gamma$ ($\mathrm{cf}\,\gamma$ – конфинальность кардинала γ), то найдутся такие подмножества A_1, A_2 группы G, что $G = A_1 \cup A_2$, $A_1 K \neq G$, $A_2 K \neq G$ для любого подмножества K группы G мощности $< \tau$.*

Доказательство. Для каждого кардинала μ, $0 < \mu < \tau$ обозначим через $\mathcal{F}_\mu$ семейство всех непустых подмножеств группы G мощности $\leq \mu$. Так как $|\mathcal{F}_\mu| \leq \gamma^\mu$ и $\gamma^\mu = \gamma$, то $|\mathcal{F}_\mu| = \gamma$. Пусть $\mathcal{F}$ – семейство всех непустых подмножеств группы G мощности $< \tau$. Поскольку $\mathcal{F} = \cup\{\mathcal{F}_\mu : \mu$ – кардинал, $0 < \mu < \tau\}$ и $\mathcal{F}_{\mu_1} \subset \mathcal{F}_{\mu_2}$ при $\mu_1 < \mu_2$, то по теореме о цепи подмножеств $|\mathcal{F}| = \gamma$.

Зафиксируем некоторый пересчет $\{K_\alpha : \alpha < \gamma\}$ семейства $\mathcal{F}$, $K_0 = \{e\}$, e – единица группы. Построим индуктивно два семейства $\{a_\alpha : \alpha < \gamma\}$, $\{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ элементов группы G так, чтобы $A \cap B = \varnothing$, где $A = \cup\{a_\alpha K_\alpha : \alpha < \gamma\}, B = \cup\{b_\alpha K_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

Возьмем два различных элемента $a_0, b_0 \in G$ и положим $A_0 = \{a_0\}$, $B_0 = \{b_0\}$. Фиксируем ординал $\lambda \leq \gamma$ и предположим, что для всех ординалов $\beta < \lambda$ мы уже нашли такие семейства $\{a_\alpha : \alpha < \beta\}$, $\{b_\alpha : \alpha < \beta\}$ элементов группы G, для которых $A_\beta \cap B_\beta = \varnothing$, где $A_\beta = \cup\{a_\alpha K_\alpha : \alpha < \beta\}, B_\beta = \cup\{b_\alpha K_\alpha : \alpha < \beta\}$.

Если λ – предельный ординал, то полагаем

$$A_\lambda = \cup\{A_\beta : \beta < \lambda\}, \quad B_\lambda = \cup\{B_\beta : \beta < \lambda\}.$$

Допустим, что $\lambda = \delta + 1$. По построению $B_\delta = \cup\{b_\alpha K_\alpha : \alpha < \delta\}$. Если $\tau < \gamma$, то $|B_\delta| \leq \delta\tau < \gamma$. Если же $\tau = \gamma$, то по предположению $\operatorname{cf}\gamma = \gamma$ и, следовательно, $|B_\delta| < \gamma$. Значит, в любом из двух возможных случаев $|B_\delta| < \gamma$. Так как $|K_{\delta+1}| < \tau$ и $\tau \leq \gamma$, то $|B_\delta K_{\delta+1}^{-1}| < |G|$. Выберем элемент $a_{\delta+1} \notin B_\delta K_{\delta+1}^{-1}$ и положим $B_{\delta+1} = B_\delta \cup \{b_{\delta+1}K_{\delta+1}\}$. Ясно, что $A_{\delta+1} \cap B_{\delta+1} = \varnothing$. Итак, трансфинитной индукцией построены подмножества $A = A_\gamma$, $B = B_\gamma$, причем $A \cap B = \varnothing$.

Положим $A_1 = G \backslash A$, $A_2 = G \backslash B$. Поскольку $A \cap B = \varnothing$, то $G = A_1 \cup A_2$. Допустим, что $A_1 K = G$ для некоторого подмножества $K \subset G$ мощности $< \tau$. Выберем такой ординал $\alpha < \gamma$, что $K_\alpha = K^{-1}$. Так как $A_1 K_\alpha^{-1} = G$, то $a_\alpha \in A_1 K_\alpha^{-1}$ и $a_\alpha K_\alpha \cap A_1 \notin \varnothing$. Однако, по определению подмножества A_1 $a_\alpha K_\alpha \subset G \backslash A_1 = A$. Аналогично приводится к противоречию и предположение о том, что $A_2 K = G$ для некоторого подмножества $K \subset G$ мощности $< \tau$.

Отметим, что теорема 1 является частным случаем теоремы 3 при $\tau = \aleph_0$. Как следует из доказательства теоремы 2 подмножества A_1, A_2 плотны и в некоторых топологиях, не являющихся групповыми. Достаточно потребовать лишь непрерывности правых сдвигов.

Слегка модифицируя определение И.И. Гурана [4], назовем топологическую группу G τ-ограниченной (τ – кардинал), если для любой окрестности единицы $\mathcal{U}$ найдется такое подмножество K мощности $< \tau$, что $G = \mathcal{U}K$. Согласно этому определению волне ограниченная группа является $\aleph_0$-ограниченной.

Теорема 4. *Пусть G – бесконечная группа мощности γ, τ – кардинал и $\gamma^\mu = \gamma$ для всех кардиналов μ, удовлетворяющих условию $0 < \mu < \tau$. Если $\tau < \gamma$ либо $\operatorname{cf}\gamma = \gamma$, то группу G можно разбить на два подмножества A_1, A_2, плотные в любой τ-ограниченной топологии на группе G.*

Доказательство. Рассмотрим подмножества A_1, A_2, удовлетворяющие заключению теоремы 3. Заменяя подмножество A_2 на подмножество $A_2 \backslash A_1$, можно считать, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Предположим, что в некоторой τ-ограниченной топологии на группе G подмножество A_i имеет непустую внутренность. Тогда найдется такое подмножество F мощности $< \tau$, что $A_i F = G$. Значит, $\operatorname{int} A_1 = \operatorname{int} A_2 = \varnothing$ и $\operatorname{cl} A_1 = \operatorname{cl} A_2 = G$.

Теорема 5. *Группу G мощности $\geq 2^\tau$ (τ – бесконечный кардинал) можно разбить на два подмножества A_1, A_2, плотные в любой τ^+-ограниченной топологии на группе G (τ^+ – кардинал-последователь кардинала τ).*

Доказательство. Выберем подгруппу H группы G мощности $\gamma = 2^\tau$. По теореме 4 подгруппу H можно разбить на два подмножества H_1, H_2, плотные в любой τ^+-ограниченной топологии на H. Разложим группу G на смежные классы по подгруппе H $G = \cup\{g_\alpha H : \alpha \in J\}$. Положим $A_1 = \cup\{g_\alpha H_1 : \alpha \in J\}$, $A_2 = \cup\{g_\alpha H_2 : \alpha \in J\}$. Ясно, что $G = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Фиксируем τ^+-ограниченную топологию на группе G и покажем, что $\operatorname{cl} A_1 = \operatorname{cl} A_2 = G$. Возьмем произвольный елемент $g \in G$ и представим его в виде $g = g_a h$, $\alpha \in J$, $h \in H$. Так как подгруппа H τ^+-ограниченной группы G является τ^+-ограниченной [4], то $h \in \operatorname{cl} H_1$, $h \in \operatorname{cl} H_2$. Значит, $g \in \operatorname{cl} A_1$, $g \in \operatorname{cl} A_2$ и теорема доказана.

Отметим, что теорема 1 доказана автором в связи со следующей теоремой из статьи [5]. Если группу G разбить на конечное число подмножеств $G = A_1 \cup \dots \cup A_n$, то найдутся такие подмножество A_i и конечное подмножество K, что $G = A_i^{-1} A_i K$.

Вопрос. *Пусть группа G разбита на конечное число подмножеств $G = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Верно ли, что $G = A_i^{-1} A_i K$ для некоторых подмножества A_i разбиения и подмножества K мощности $\leq n$?*

Покажем, что для аменабельных групп ответ на поставленный вопрос утвердительный. Пусть μ – конечно-аддитивная инвариантная мера на группе G и $\mu(G) = 1$. Выберем такое подмножество $A = A_i$, что $\mu(A) \geq \frac{1}{n}$. Пусть $Ag_1, \dots, Ag_m$ – максимальная дизъюнктная система подмножеств группы G. Ясно, что $m \leq n$. Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Тогда $Ag \cap Ag_k \neq \varnothing$ для некоторого индекса k. Следовательно, $g \in A^{-1} A g_k$ и $G = A^{-1} A K$, где $K = \{g_1, \dots, g_m\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Comfort W.W., van Mill J. *Groups with only resolvable group topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V.120. No 3. P.687–696.
2. Протасов И.В. *Дискретные подмножества топологических групп*, Матем. заметки. 1994, T.55. No 1. C.150–151.
3. Berhanu S., Comfort W.W., Reid J.D. *Counting subgroups and topological group topologies*, Pacific J. Math. 1985. V.116. P.217–241.
4. Гуран И.И. *О топологических группах, близких к финально компактным*, Докл. АН СССР. T.256. No 6. C.1305–1307.
5. Протасов И.В. *Ультрафильтры и топологии на группах*, Сиб. мат. журн. 1993. T.34. No 5. C.163–180.

Department of Cybernetics, Kiev University,

pr. Glushkova, 6, Kiev, Ukraine

Получено 15.01.95.