Математичні студії
випуск 5

УДК 512.536

ТОПОЛОГИИ НА ГРУППАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КОМПАКТАМИ

Е.Г. Зеленюк

Abstract. Ye. Zeleniuk. *Determined by compactum topologies on groups* // Matematychni Studii. **5** (1995) P.5–16.

A classification of spaces of countable groups whose topology is determined by a countable system of compact subspaces is obtained.

Согласно определению из работ [1,2] последовательность $\{a_n\}$ элементов счетной группы G называется T-последовательностью, если на G существует групповая хаусдорфовая топология, в которой $\{a_n\}$ сходится к единице. T-последовательность, содержащая бесконечное число неединичных елементов, называется нетривиальной. Если $\{a_n\}$ – T-последовательность на группе G, то из всех групповых топологий на G, в которых $\{a_n\}$ сходится к единице, существует наибольшая. Группа G, снабженная этой топологией, обозначается $G\{a_n\}$. В 1990г. автором было доказано (неопубликованный результат), что для любых счетных абелевых групп G, H и для любых нетривиальных T-последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ на G, H соответственно пространства групп $G\{a_n\}$, $H\{b_n\}$ гомеоморфны. По существу была доказана гомеоморфность этих пространств некоторому факторпространству σ-произведения счетного числа сходящихся последовательностей в ящичной топологии. И.В. Протасов высказал гипотезу, что для любой счетной группы G и для любой нетривиальной T-последовательности $\{a_n\}$ на G пространоство $G\{a_n\}$ гомеоморфно просто σ-произведению счетного числа сходящихся последовательностей. Авотором было выяснено, что эта гипотеза справедлива даже в более общей форме.

Пусть (G,τ') – хаусдорфова группа, $\mathcal{K}$ – некоторая система ее подпространств. Из всех групповых топологий на G, сохраняющих подпространства из $\mathcal{K}$, т.е. таких топологий τ'', что $\tau''|_K = \tau'|_K$ для любого $K \in \mathcal{K}$ существует наибольшая топология τ. Будем говорить, что топология τ на группе G определяется системой $\mathcal{K}$ подпространств. Хаусдорфову группу (G,τ) будем называть компактно определенной, если в ней существует счетная система $\mathcal{K}$ компактных подпространств, определяющая топологию τ и порождающая алгебраически подгруппу в G счетного индекса. К компактно определенным группам относятся, в частности, свободные группы над компактными, а также группы $G\{a_n\}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22A05, 54H11.

Основной результат данной работы состоит в классификации пространств счетных компактно определенных групп. Известно, что классификацию счетных компактов дает теорема Мазуркевича-Серпинского [3]: каждый счетный компакт A полностью определяется (естественно, с точностью до гомеоморфизмов) парой (α, n), где α – ранг A, т.е. порядок последней непустой производной компакта A, а $n = \operatorname{card} A^{(\alpha)}$ – число елементов в последней непустой производной. Оказывается, пространство счетной компактно определенной группы полностью определяется рангами компактов из любой определяющей ее топологию счетной системы компактных подпространств и аналогично случаю $G\{a_n\}$ также гомеоморфно некоторому σ-произведению. Кроме подтверждения упомянутой выше гипотезы И.В. Протасова, это дает также положительный ответ в случае счетных компактов на вопрос О.Г. Окунева [4, п.10]: верно ли, что для любого компакта его свободная группа и свободная абелева группа гомеоморфны?

Попутно классификации доказана полнота по Вейлю произвольной компактно определенной группы. В некоторых частных случаях этот результат был известен ранее. Например, в случае свободных групп над компактами [5,6] и в случае групп $G\{a_n\}$ [1,2].

Все пространства предполагаются хаусдорфовыми, а счетные множества не обязательно бесконечными.

§1. Индуктивная компактность пространства компактно определенной группы

1.1. Пусть $\{X_n\}$ – возрастающая последовательность вложенных друг в друга пространств, $X = \bigcup\limits_n X_n$. Множества $A \subset X$ вида $\bigcup\limits_n \mathcal{V}_n$, где $\mathcal{V}_n$ – открытое множество в X_n и $\mathcal{V}_{n+1} \cap X_n = \mathcal{V}_n$, образуют на X некоторою топологию τ_0 – максимальную из всех топологий, сохраняющих подпространства X_n. Топология τ_0 выражается также и через произвольную топологию τ на X, сохраняющую подпространства X_n, – это множества вида $\bigcap\limits_n \mathcal{U}_n$, где $\mathcal{U}_n$ – открытое множество в (X, τ), $\mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ и $\mathcal{U}_{n+1} \cap X_n = \mathcal{U}_n \cap X_n$. Топология τ_0 обладает следующим харатеристическим свойством: каждое отображение пространства (X, τ_0) в произвольное пространство, имеющее непрерывные сужения на X_n, само непрерывно. Отметим также, что каждое счетно компактное подпространство пространства (X, τ_0) содержится в некотором X_n. Пространство (X, τ_0) называется индуктивным пределом пространств X_n и обозначается $\lim X_n$. Индуктивный предел компактных пространств называется индуктивно компактным пространством. Отметим, что если $\{X_n\}$, $\{Y_m\}$ – возрастающие последовательности компактных пространств, то $\lim X_n = \lim Y_m$ тогда и только тогда, когда каждое X_n содержится в некоторм $Y_{m(n)}$, а каждое Y_m содержится в некоторм $X_{n(m)}$.

1.2. Пусть (G, τ) – топологическая группа, K – подпространство (G, τ), φ – фильтр на G, содержащий подпространство $K \cdot K^{-1}$ и индуцирующий на нем фильтр окрестностей единицы $e \in K \cdot K^{-1}$. Тогда каждая групповая топология на G, в которой φ сходится к единице, сохраняет либо уплотняет подпространство K.

Пусть теперь φ – произвольный сходящийся к единице фильтр на (G, τ), причем τ – максимальная групповая топология, в которой φ сходится к единице. Выразим τ через φ.

Образуем фильтр φ^G, объявив его базой множества вида

$$\bigcup_{g\in G} g^{-1}\cdot F_g\cdot g,$$

где $F_g\in\varphi$. Затем образуем фильтр ${}^*\varphi^G$, объявив его базой множества вида

$$F^{-1}\cup F\cup\{e\},$$

где $F\in\varphi^G$ (можно и наоборот, вначале образовать фильтр ${}^*\varphi$, а затем $({}^*\varphi)^G$, – результат будет тот же). А затем образуем фильтр $[\varphi]$, объявив его базой множества вида

$$[F_1,\dots,F_n,\dots]=\bigcup_n [F_1,\dots,F_n],$$

где $F_n\in{}^*\varphi^G$. По определению

$$[F_1,\dots,F_n]=\bigcup_{\pi\in S_n} F_{\pi(1)},\dots,F_{\pi(n)},$$

где S_n – множество перестановок чисел $1,\dots,n$. Несложно проверить, что фильтр $[\varphi]$ сходится к единице (G,τ) и удовлетворяет характеристическим свойствам фильтра окрестностей единицы топологической группы. Следовательно, $[\varphi]$ – фильтр окрестностей единицы (G,τ). Отметим, что если

$${}^*\varphi^G=\bigcap_n \varphi_n$$

для некоторой убывающей последовательности фильтров φ_n, то $[\varphi]$ имеет базу из множеств вида

$$\bigcap_n [F_1^n,\dots,F_n^n],$$

где $F_j^i\in\varphi_i$, $F_j^i\subset F_j^{i+1}$.

Абелев вариант изложенной конструкции подробно изучен в [1].

1.3. Лемма. *Пусть* (G,τ) *– компактно определенная группа,* $\{K_n : n<\omega\}$ *– определяющая топологию* τ *система компактных подпространств,* $e\in K_n=K_n^{-1}\subset K_{n+1}$, $<\bigcup\limits_n K_n>=G$, $X_n=\underbrace{K_n\cdot\ldots\cdot K_n}_{n}$. *Тогда* $(G,\tau)=\lim X_n$.

Доказательство. То, что $X_n\subset X_{n+1}$ и $G=\bigcup\limits_n X_n$, очевидно. Пусть τ_0 – топология пространств $\lim X_n$, т.е. $\lim X_n=(G,\tau_0)$. Ясно, что $\tau\subset\tau_0$. Нам нужно доказать обратное включение.

Пусть φ_n – фильтр на G, содержащий X_n и индуцирующий на X_n фильтр окрестностей $e\in X_n$, $\varphi=\bigcap_n\varphi_n$. Заметим, что τ – максимальная групповая топология на G, в которой φ сходится к e, и ${}^*\varphi^G=\varphi$. Следовательно, точка $g\in(G,\tau)$ имеет базу окрестностей из множеств вида

$$\bigcup_n g\cdot[F_1^n,\dots,F_n^n],$$

где $F_j^i \in \varphi_i$, $F_j^i \subset F_j^{i+1}$.

Возьмем теперь произвольную открытую окрестность точки $g \in (G, \tau_0)$. Она имеет вид $\bigcap\limits_n \mathcal{U}_n$, где $\mathcal{U}_n$ открыто в (G, τ), $\mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_{n+1} \cap X_n = \mathcal{U}_n \cap X_n$. Достаточно построить такие $F_j^i \in \varphi_i$ $(j \leq i < \omega)$, что

$$F_J^i \subset F_j^{i+1}, \qquad \bigcup_n g \cdot [F_1^n, \dots, F_n^n] \subset \bigcap_n \mathcal{U}_n.$$

Каждому $n \geq 1$ сопоставим наименьшее $m(n)$ такое, что

$$g \cdot \underbrace{X_n \cdot \ldots \cdot X_n}_{n} \subset X_{m(n)}.$$

Выберем в (G, τ) компактное $F_1^1 \in \varphi_1$ такое, что $F_1^1 \subset X_1$, $g \cdot F_1^1 \subset \mathcal{U}_{m(1)}$. Предположим, что в (G, τ) уже выбраны компактные $F_1^n, \dots, F_n^n \in \varphi_n$ такие, что

$$F_1^n, \dots, F_n^n \subset X_n, \qquad g \cdot [F_1^n, \dots, F_n^n] \subset \mathcal{U}_{m(n)}.$$

Но тогда

$$g \cdot [F_1^n, \dots, F_N^n] \subset \mathcal{U}_{m(n+1)}.$$

Следовательно, в (G, τ) можно выбрать и компактные $F_1^{n+1}, \dots, F_n^{n+1}, F_{n+1}^{n+1} \in \varphi_{n+1}$ такие, что

$$F_1^n \subset F_1^{n+1} \subset X_{n+1}, \dots, F_n^n \subset F_n^{n+1} \subset X_{n+1}, \quad F_{n+1}^{n+1} \subset X_{n+1},$$
$$g \cdot [F_1^{n+1}, \dots, F_n^{n+1}, F_{n+1}^{n+1}] \subset \mathcal{U}_{n+1}.$$

Очевидно, что так построенные можества F_j^i будут требуемыми.

1.4. Следствие. *Пространство компактно определенной грyпы индуктивно компактно.*

1.5. Лемма (Граев, [6]). *Если пространство группы индуктивно компактно, то она полна по Вейлю.*

Из следствия 1.4 и леммы 1.5 вытекает

1.6. Теорема. *Каждая компактно определенная группа полна по Вейлю.*

§2. Невырожденная индуктивная компактность пространства счетной компактно определенной группы

2.1. В ординальной арифметике (см., например, [7, с.66–74; 8, с.59–60]) важную роль играет понятие аддитивно неразложимого ординала – ординала $\gamma \neq 0$, удовлетворяещего одному из следующих еквивалентных условий:

(i) $\xi + \eta < \gamma$ для любых $\xi, \eta < \gamma$;
(ii) $\xi + \gamma = \gamma$ для любых $\xi < \gamma$;
(iii) $\gamma = \omega^\xi$ для некоторого ξ.

Каждый ординал представим в виде $\gamma_1 \cdot n_1 + \cdots + \gamma_k \cdot n_k$, где $\gamma_1 > \cdots > \gamma_k$ – аддитивно неразложимые ординалы, $n_1, \dots, n_k < \omega$. Такое разложение ординала единственно с точностью до нулевых слагаемых и называется натуральным.

С его помощью легко вычисляются арифметические операции на ординалах. Например, если $\gamma_1 \cdot n_1 + \dots + \gamma_k \cdot n_k$, $\gamma_1 \cdot m_1 + \dots + \gamma_k \cdot m_k$, – натуральные разложения ординалов α, β, то

$$\alpha + \beta = \gamma_1 \cdot n_1 + \dots + \gamma_{j-1} \cdot n_{j-1} + \gamma_j \cdot (n_j + m_j) + \gamma_{j+1} \cdot m_{j+1} + \dots + \gamma_k \cdot m_k,$$

где j – номер первого ненулевого числа среди $m_1, \dots, m_k$. С этой точки зрения более естественно выглядит натуральное сложение:

$$\alpha(+)\beta = \gamma_1 \cdot (n_1 + m_1) + \dots + \gamma_k \cdot (n_k + m_k).$$

Отметим, что

$$\max(\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m}) \leq \alpha_1(+)\dots(+)\alpha_m < (\max \alpha_i) \cdot (m+1),$$

где max справа берется по номерам $i = 1, \dots, m$, а слева – по перестановкам $(i_1, \dots, i_m)$ номеров $1, \dots, m$.

2.2. Пусть X – постранство, $A \subset X$, A' – множество всех предельных точек A. Положим

$$A^{(0)} = \operatorname{cl} A, \quad A^{(\alpha)} = \begin{cases} (A^{(\beta)})', & \text{если } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcap\limits_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}, & \text{если } \alpha \text{ – предельный ординал.} \end{cases}$$

Множество $A(\alpha)$ называется производным порядка α множества A. Несложно проверить, что

$$(A \cup B)^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)}, \qquad A^{(\alpha+\beta)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^{(\beta)}$$

для любых подмножеств $A, B \subset X$ и ординалов α, β.

Пусть A – счетный компакт. Тогда A нульмерен, метризуем и разрежен (не содержит плотных в себе подмножеств или, что то же, $\bigcap\limits_{\beta} A^{(\beta)} = \varnothing$) Более того, существует счетный ординал α такой, что $0 < \operatorname{card} A^{(\alpha)} < \omega$, $A^{(\alpha+1)} = \varnothing$. Рангом точки $a \in A$ называется ординал β такой, что $a \in A^{(\beta)} \backslash A^{(\beta+1)}$, и обозначается $r(a, A)$. Если $r(a, A) = \beta$, то $\mathcal{U}^{(\beta)} = \{a\}$ для любой открыто-замкнутой окрестности $\mathcal{U}$ точки a, отделяющей a от всех остальных точек из A ранга β. Рангом всего пространства A называется наибольший из рангов его точек, т.е. ординал α, и обозначается $r(A)$. Для любых счетного ординала α и натурального числа $n > 0$ множество W ординалов $\leq \alpha \cdot n$, наделенное порядковой топологией, – счетный компакт ранга α и $\operatorname{card} W^{(\alpha)} = n$. Так как $(A \cup B)^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)}$, то

$$r(A \cup B) = \max\{r(A), r(B)\}$$

для любых счетных компактных подпространств A, B пространства X.

2.3. Лемма. *Для любых компактных подпространств A, B топологической группы и ординала α*

$$(A\cdot B)^{(\alpha)} = \bigcup_{\xi(+)\eta=\alpha} A^{(\xi)}\cdot B^{(\eta)}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = 1$. Мы должны доказать, что

$$(A\cdot B)' = A'\cdot B \cup A\cdot B'.$$

Возьмем в правой части произвольную точку x. Пусть, например, $x\in A'\cdot B$. Тогда $x = a\cdot b$ для некоторых $a\in A'$, $b\in B$. Так как a – предельная точка множества A, то x – предельная точка множества $A\cdot b\subset A\cdot B$ и, значит, $x\in(A\cdot B)'$.

Обратно, пусть $x\in(A\cdot B)'$. Это значит, что x – предельная точка множества $A\cdot B$. Возьмем на группе какой-то свободный ультрафильтр φ, сходящийся к x и содержащий $A\cdot B$. Каждой точке $c\in A\cdot B$ сопоставим точки $c_A\in A$, $c_B\in B$ такие, что $c = c_A\cdot c_B$, и подействуем на φ отображениями $c\mapsto c_A$, $c\mapsto c_B$. Получим ультрафильтры φ_A,φ_B, содержащие множества A, B соответственно. По крайней мере один из них свободный, например, φ_A. Так как A, B компактны, то φ_A, φ_B сходятся к некоторым точкам $a\in A$, $b\in B$. Тогда a – предельная точка множества A и $a\cdot b = x$. Следовательно, $x\in A'\cdot B$.

Пусть $\alpha > 1$ и лемма справедлива для всех производных порядков $<\alpha$.

Предположим вначале, что α аддитивно разложим. Пусть $\gamma_1\cdot n_1+\dots+\gamma_k\cdot n_k$ – его натуральное разложение. Тогда

$$(A\cdot B)^{(\alpha)} = \left[(A\cdot B)^{(\gamma_1\cdot n_1+\dots+\gamma_{k-1}\cdot n_{k-1}+\gamma_k\cdot(n_k-1)}\right]^{(\gamma_k)} =$$

$$\bigcup_{\substack{i_1\le n_1\\ \dots\\ i_k\le n_k-1}} \left[A^{(\gamma_1\cdot(n_1-i_1)+\dots+\gamma_k\cdot(n_k-1-i_k))}\cdot B^{(\gamma_1\cdot i_1+\dots+\gamma_k\cdot i_k)}\right]^{(\gamma_k)} =$$

$$\bigcup_{\substack{i_1\le n_1\\ \dots\\ i_k\le n_k-1}} \left[A^{(\gamma_1\cdot(n_1-i_1)+\dots+\gamma_k\cdot(n_k-i_k))}\cdot B^{(\gamma_1\cdot i_1+\dots+\gamma_k\cdot i_k)}\right]\bigcup$$

$$\bigcup_{\substack{i_1\le n_1\\ \dots\\ i_k\le n_k-1}} \left[A^{(\gamma_1\cdot(n_1-i_1)+\dots+\gamma_k\cdot(\eta_k-1-i_k))}\cdot B^{(\gamma_1\cdot i_1+\dots+\gamma_k\cdot(i_k+1))}\right].$$

Но последнее объединение равно

$$\bigcup_{\substack{i_1\le n_1\\ \dots\\ 0<i_k\le n_k}} \left[A^{(\gamma_1\cdot(n_1-i_1)+\dots+\gamma_k\cdot(n_k-i_k))}\cdot B^{(\gamma_1\cdot i_1+\dots+\gamma_k\cdot i_k)}\right].$$

Следовательно,

$$(A{\cdot}B)^{(\alpha)} = \bigcup_{\substack{i_1 \le n_1 \\ \dots \\ i_k \le n_k}} \left[A^{(\gamma_1\cdot(n_1-i_1)+\dots+\gamma_k\cdot(n_k-i_k))}{\cdot}B^{(\gamma_1\cdot i_1+\dots+\gamma_k\cdot i_k)} \right] = \bigcup_{\xi(+)\eta=\alpha} A^{(\xi)}{\cdot}B^{(\eta)}.$$

Пусть теперь α аддитивно неразложим. Если α изолирован в ряду аддитивно неразложимых ординалов, то $\alpha = \sup\limits_n \gamma\cdot n$ для некоторого аддитивно неразложимого ординала γ и тогда

$$(A\cdot B)^{(\alpha)} = \bigcap_n (A\cdot B)^{(\gamma\cdot n)} = \bigcap_n \bigcup_{i\le n} \left[A^{(\gamma\cdot(n-i))}\cdot B^{(\gamma\cdot i)} \right] =$$

$$\bigcap_n \left[A^{(\gamma\cdot n)}\cdot B \right] \bigcup \bigcap_n \left[A\cdot B^{(\gamma\cdot n)} \right] = A^{(\alpha)}\cdot B \bigcup A\cdot B^{(\alpha)}.$$

Если же α предельный в ряду аддитивно неразложимых ординалов, то $\alpha = \sup\limits_n \gamma_n$ для некоторой возрастающей последовательности аддитивно неразложимых ординалов γ_n и тогда

$$(A\cdot B)^{(\alpha)} = \bigcap_n (A\cdot B)^{(\gamma_n)} = \bigcap_n \left[A^{(\gamma_n)}\cdot B \bigcup A\cdot B^{(\gamma_n)} \right] =$$

$$\bigcap_n \left[A^{(\gamma_n)}\cdot B \right] \bigcup \bigcap_n \left[A\cdot B^{(\gamma_n)} \right] = A^{(\alpha)}\cdot B \bigcup A\cdot B^{(\alpha)}.$$

2.4. Следствие. (Граев, [5]). *Для любых счетных компактных подпространств A, B топологической группы*

$$r(A\cdot B) = r(A)(+)r(B).$$

2.5. Следствие. *Пусть $A_1,\dots,A_m$ – счетные компактные подпространства топологической группы, $A = A_1\cdot\ldots\cdot A_m$, $a_1\in A_1,\dots,a_m\in A_m$, $a = a_1\cdot\ldots\cdot a_m$. Тогда*

$$r(a_1,A_1)(+)\dots(+)r(a_m,A_m) \le r(a,A) \le r(A_1)(+)\dots(+)r(A_m).$$

2.6. Замечание. В лемме 2.3 и следствиях 2.4, 2.5 произведение компактных подпространств топологической группы очевидным образом можно заменить на декартово произведение компактных пространств.

2.7. Пусть X – счетное индуктивно компактное пространство, $\{X_n\}$ – возрастающая последовательность его компактных подпространств. Пространство X называется невырожденным, если для любого номера n

$$\sup_m \inf_{x\in X_n} r(x, X_{n+m}) = \sup_m r(X_m).$$

При этом ординал $\sup\limits_m r(X_m)$ назывется его рангом и обозначается $r(X)$. Определения невырожденности и ранга пространства X корректны, ординал $r(X)$ аддитивно неразложим и является точной верхней гранью рангов счетных компактных подпространств X.

2.8. Пример. Пусть α – произвольный счетный аддитивно неразложимый ординал, $\{\alpha_n\}$ – последовательность ординалов $< \alpha$ такая, что $\sup_n(\alpha_1+\dots+\alpha_n) = \alpha$ или, что то же, $\sup_n(\alpha_1(+)\dots(+)\alpha_n) = \alpha$. Каждому ординалу α_n сопоставим компакт A_n ранга α_n и какую-то точку $a_n \in A_n^{(\alpha_n)}$. Пусть $\prod_n A_n$ – ящичное произведение пространств A_n, $a = (a_n) \in \prod_n A_n$, $\mathcal{I}_\alpha$ – подпространство в $\prod_n A_n$ всех таких $x = (x_n)$, что $x_n \neq a_n$ лишь для конечного числа номеров n. Покажем, что $\mathcal{I}_\alpha$ – невырожденное счетно индуктивное компактное пространство ранга α. Действительно, обозначим X_n подпространтсво $\mathcal{I}_\alpha$ всех таких $x = (x_i)$, что $x_i = a_i$ для $i > n$. Тогда X_n – счетный компакт, $r(X_n) = \alpha_1(+)\dots(+)\alpha_n$, $\lim X_n = \mathcal{I}_\alpha$, для любой точки $x \in X_n$

$$\alpha_{n+1}(+)\dots(+)\alpha_{n+m} \le r(x, X_{n+m}) \le \alpha_1(+)\dots(+)\alpha_{n+m},$$
$$\sup_m(\alpha_{n+1}(+)\dots(+)\alpha_{n+m}) = \sup_m(\alpha_1(+)\dots(+)\alpha_{n+m}) = \alpha.$$

Пространство $\mathcal{I}_\alpha$ назовем ящичным пространством ранга α.

2.9. Теорема. *Пусть G – счетная компактно определенная группа, $\mathcal{K}$ – счетная определяющея ее топологию система компактых подпространств. Тогда пространство G – невырожденное индуктивно компактное пространство ранга*

$$\sup\{r(K)\cdot n : K \in \mathcal{K}, n < \omega\}.$$

Доказательство. Так как $r(A \cup B) = \max\{r(A), r(B)\}$, то можно считать, что система $\mathcal{K} = \{K_n : n < \omega\}$ удовлетворяет условиям леммы 1.3. Тогда имеем $G = \lim X_n$, где $X_n = K_n^n = K_n \cdot \ldots \cdot K_n$. Возьмем произвольную точку $x \in X_n$ и с помощью следствия 2.5 оценим ее ранг в X_{n+2m}. Для этого представим ее в виде $x \cdot y \cdot y^{-1} \cdot \ldots \cdot y \cdot y^{-1}$, где y (а значит, и y^{-1}) – точка максимального ранга K_{n+2m}. Получаем

$$\underbrace{r(K_{n+2m})(+)\dots(+)r(K_{n+2m})}_{2m} \le r(x, X_{n+2m}) \le \underbrace{r(K_{n+2m})(+)\dots(+)r(K_{n+2m})}_{n+2m}.$$

Осталось заметить, что число слева $\ge r(K_{n+2m})\cdot 2m$, число справа $< r(K_{n+2m})\cdot(n+2m+1)$,

$$\sup_m(r(K_{n+2m})\cdot 2m) = \sup_m(r(K_{n+2m})\cdot(n+2m+1)) = \sup\{r(K)\cdot n : K \in \mathcal{K}, n < \omega\}.$$

2.10. Замечание. Пусть (G, τ) – счетная недискретная метризуемая группа. Тогда для любого счетного аддитивно неразложимого ординала α топология τ легко усиливается до групповой топологии τ_0 такой, что (G, τ_0) – компактно определенная группа ранга α.

§3. Классификация пространств счетных компактно определенных групп

3.1. Лемма. *Пусть A – счетный компакт, $a \in A$, $\mathcal{U}$ – окрестность точки a, $\alpha \le r(a, A)$. Тогда существует компакт $B \subset \mathcal{U}$ такой, что $B^{(\alpha)} = \{a\}$.*

Доказательство. Выберем неубывающую последовательность $\{\alpha_n\}$ ординалов такую, что $\sup\limits_n(\alpha_n + 1) = \alpha$, и сходящуюся к точке a последовательность $\{b_n\}$ внутренних точек в $\mathcal{U}$ такую, что $r(b_n, A) = \alpha_n$. Каждой точке b_n сопоставим некоторою ее компактную окрестность $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ так, что все $\mathcal{U}_n$ попарно дизъюнктны, $\mathcal{U}_n^{(\alpha_n)} = \{b_n\}$ и каждая окрестность точки a содержит почти все $\mathcal{U}_n$. Множество $B = \bigcup\limits_n \mathcal{U}_n \cup \{a\}$ будет требуемым.

3.2. Лемма. *Пусть A, B – счетные компакты, $A \subset B$, $\alpha \leq r(a, B)$ для любого $a \in A$. Тогда существует компакт C такой, что $A \subset C \subset B$ и $C^{(\alpha)} = A$.*

Доказательство. Положим $A_1 = A \backslash A'$ и сопоставим каждой точке $a \in A_1$ некоторую ее окрестность $\mathcal{U}_a$ в пространстве B так, что все $\mathcal{U}_a$ попарно дизъюнктны и любая окрестность множества A в B содержит почти все $\mathcal{U}_a$. По лемме 3.1 в каждой окрестности $\mathcal{U}_a$ сущестует компакт C_a такой, что $C_a^{(\alpha)} = \{a\}$. Положим

$$C = \bigcup_{a \in A_1} C_a \cup A.$$

Тогда C – компакт, $r(a, C) = \alpha \Leftrightarrow a \in A_1$ и, следовательно, $C^{(\alpha)} = A$.

3.3. Лемма. *Пусть A, B, C – счетные компакты, $A, B \subset C$, $r(B) < \alpha \leq r(a, C)$ для любого $a \in A$. Тогда существует компакт D такой, что $A \cup B \subset D \subset C$, $D^{(\alpha)} = A$.*

Доказательство. По лемме 3.2 существует компакт E такой, что $A \subset E \subset C$, $E^{(\alpha)} = A$. Положим $D = E \cup B$. Тогда D – компакт, $A \cup B \subset D \subset C$, $D^{(\alpha)} = E^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} = A$.

3.4. Лемма. *Пусть X – невырожденное счетное индуктивно компактное пространство, $r(X) = \alpha$, $\{\alpha_n\}$ – последовательность ординалов $< \alpha$ такая, что $\sup\limits_n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = \alpha$. Тогда в X существует возрастающая последовательность $\{X_n\}$ компактных подпространств такая, что $\lim X_n = X$, $\operatorname{card} X_1 = 1$, $X_{n+1}^{(\alpha_n)} = X_n$.*

Доказательство. Пусть $\{Y_n\}$ – последовательность компактных подпространств X такая, что $\lim Y_n = X$. В роли X_1 возьмем произвольное одноэлементное подпространство из X. Выберем номер n такой, что $\alpha_n + \cdots + \alpha_1 > r(Y_1)$. В силу невырожденности X и леммы 3.3 существует компакт X_{n+1} такой, что $X_1 \cup Y_1 \subset X_{n+1} \subset X$, $X_{n+1}^{(\alpha_n + \cdots + \alpha_1)} = X_1$. Положим $X_n = X_{n+1}^{(\alpha_n)}$, $X_{n-1} = X_n^{(\alpha_{n-1})}, \ldots, X_2 = X_3^{(\alpha_2)}$. Затем выберем номер $m > n$ такой, что $\alpha_m + \cdots + \alpha_{n+1} > r(Y_2)$. Снова в силу невырожденности X и леммы 3.3 существует компакт X_{m+1} такой, что $X_{n+1} \cup Y_2 \subset X_{m+1} \subset X$, $X_{m+1}^{(\alpha_m + \cdots + \alpha_{n+!})} = X_{n+1}$. Положим $X_m = X_{m+1}^{(\alpha_m)}$, $X_{m-1} = X_m^{(\alpha_{m-1})}, \ldots, X_{n+2} = X_{n+3}^{(\alpha_{n+2})}$. Продолжая в том же духе, мы и построим требуемую последовательность $\{X_n\}$.

Счетный компакт называется простым, если он имеет единственную точку максимального ранга.

3.5. Лемма. *(i) Пусть A – счетный компакт, $r(A) = \alpha$, $\operatorname{card} A^{(\alpha)} = n$. Тогда A гомеоморфен сумме простых счетных компактов $A_1, \ldots, A_n$ ранга α.*

(ii) *Пусть A – простой счетный компакт, $r(A) = \alpha$, $\{\alpha_n\}$ – неубывающая последовательность ординалов такая, что $\sup_n(\alpha_n + 1) = \alpha$. Тогда A гомеоморфен одноточечной компактификации суммы простых счетных компактов A_n рангов α_n соответственно.*

Доказательство. (i) Пусть $A^{(\alpha)} = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n > 1$. Выберем попарно дизъюнктные открытые компактные окрестности $A_1, \dots, A_{n-1}$ точек $a_1, \dots, a_{n-1}$, не содержащие точку a_n, и положим $A_n = A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$.

(ii) Пусть $A^{(\alpha)} = \{a\}$, $\{\mathcal{U}_n\}$ – убывающая база открытых компактных окрестностей точки a. В каждой окрестности $\mathcal{U}_n$ выберем открытый простой компакт B_n ранга α_n так, что все B_n попарно дизъюнктны. Положим $B = \bigcup_n B_n$, $C_n = \mathcal{U}_n \setminus (\mathcal{U}_{n+1} \cup B)$. Затем выберем возрастающую последовательность $\{m_n\}$ натуральных чисел такую, что $\alpha_{m_n} > r(C_n)$, и положим

$$A_k = \begin{cases} B_{m_n} \cup C_n, & \text{если } k = m_n, \\ B_k, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда A – открытый простой компакт ранга α_n, все A_n попарно дизъюнктны, $\bigcup_n A_n = A \setminus \{a\}$ и любая окрестность точки a содержит почти все A_n.

3.6. Следствие (Мазуркевич-Серпинский, [3]). *Пусть A – счетный компакт, $r(A) = \alpha$, $\operatorname{card} A^{(\alpha)} = n$. Тогда A гомеоморфен пространству w всех ординалов $\le \omega^\alpha \cdot n$.*

3.7. Лемма. *Пусть A, B – счетные компакты, $\alpha \ge 1$, $A^{(\alpha)}$, $B^{(\alpha)} \ne \varnothing$, $f : A^{(\alpha)} \to B^{(\alpha)}$ – гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм $F : A \to B$, продолжающий f.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_0$ – дизъюнктная система открытых простых компактных подпространств из A ранга $\ge \alpha$, покрывающая A (первая часть леммы 3.5.). Предположим, что уже определена дизъюнктная система $\mathfrak{A}_n$ открытых простых компактов из A ранга $\ge \alpha$.

Пусть $C \in \mathfrak{A}_n$, $r(C) > \alpha$, c – точка из C максимального ранга. По второй части леммы 3.5 существует бесконечная дизъюнктная система $\mathfrak{A}(C)$ открытых простых компактов из C ранга $\ge \alpha$ такая, что $\cup \mathfrak{A}(C) = C \setminus \{c\}$ и любая окрестность точки c содержит почти все $D \in \mathfrak{A}(C)$. Обозначим $\mathfrak{A}_{n+1}$ объединение систем $\mathfrak{A}(C)$ по всем $C \in \mathfrak{A}_n$ ранга $> \alpha$.

По завершении процеса положим $\mathfrak{A} = \bigcup_n \mathfrak{A}_n$. Отметим следующие свойства системы $\mathfrak{A}$.

(i) Для любой точки $a \in A^{(\alpha)}$ найдется $A(a) \in \mathfrak{A}$ такое, что a – точка максимального ранга $A(a)$.

(ii) Множества $A(a) \setminus \{a\}$, где $a \in A^{(\alpha)} \setminus A^{(\alpha+1)}$, разбивают $A \setminus A^{(\alpha)}$, что позволяет для каждой точки $a \in A \setminus A^{(\alpha)}$ определить точку $a^* \in A^{(\alpha)} \setminus A^{(\alpha+1)}$ как такую, что $a \in A(a^*)$.

Пусть $\mathfrak{B}$ – аналогичная система открытых простых компактов из B, $a \in A^{(\alpha)} \setminus A^{(\alpha+1)}$, $b = f(a)$. Тогда $b \in B^{(\alpha)} \setminus B^{(\alpha+1)}$. Так как $A(a)$, $B(b)$ – простые компакты ранга α, то по следствию 3.6. существует гомеморфизм $f_a : A(a) \to B(b)$. Ясно, что $f_a(a) = b = f(a)$. Положим

$$F = \cup \{f_a : a \in A^{(\alpha)} \setminus A^{(\alpha+1)}\} \cup f.$$

Тогда F продолжает f и является биекцией A на B. Так как f, f_a – гомеоморфизмы, то по свойству (ii) гомеоморфизмом будет и F.

3.8. Теорема. *Невырожденные счетные индуктивно компактные пространства одинаковых рангов гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть X, Y – невырожденные счетные индуктивно компактные пространства, $r(X) = r(Y) = \alpha$, $\{\alpha_n\}$ – последовательность ординалов $< \alpha$ такая, что $\sup\limits_n(\alpha_n + \dots + \alpha_n) = \alpha$. По лемме 3.4 существуют возрастающие последовательности $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ компактных подпространств из X, Y соответственно такие, что $\lim X_n = X$, $\lim Y_n = Y$, $\operatorname{card} X_1 = \operatorname{card} Y_1 = 1$, $X_{n+1}^{(\alpha_n)} = X_n$, $Y_{n+1}^{(\alpha_n)} = Y_n$. Обозначим f_0 гомеомерфизм X_1 на Y_1 и построим индуктивно с помощью леммы 3.7 последовательность гомеоморфизмов $f_n : X_n \to Y_n$ такую, что f_{n+1} продолжает f_n. Но тогда отображение $f = \bigcup\limits_n f_n$ и будет гомеоморфизмом X на Y.

3.9. Следствие. *Пространства счетных компактно определенных групп гомеоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их ранги. Пространство счетной компактно определенной группы ранга α гомеоморфно ящичному пространству $\mathcal{I}_\alpha$.*

3.10. Замечание. Пусть топология счетной компактно определенной группы G определяется компактом X, a – точка из X максимального ранга. Тогда по следствию 3.9 пространство группы G гомеоморфно подпространству счетной ящичной степени X^ω компакта X, состоящему из всех таких $x = (x_n) \in X$, что $x_n \neq a$ лишь для конечного числа номеров n. В частности, этому пространству гомеоморфны свободная группа $F(X)$ и свободная абелева группа $A(X)$ компакта X.

В случае произвольного тихоновского пространства X вопрос о гомеоморфности $F(X)$ и $A(X)$ решается отрицательно. Действительно, пусть X – несчетное пространство с единственной неизолированной точкой. И пусть эта точка имеет счетные окрестности. Тогда точки $A(X)$ также имеют счетные окрестности, а все окрестности точек $F(X)$ несчетны.

В случае, когда X – несчетный компакт, вопрос о гомеоморфности $F(X)$ и $A(X)$ остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеленюк Е.Г., Протасов И.В. *Топологии на абелевых группах* // Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т.54, Ѓ5. С.1090–1107.
2. Зеленюк Е.Г., Протасов И.В., Хромуляк О.М. *Топологии на счетных группах и кольцах* // Докл. АН УССР, сер. А. 1991, Ѓ8. С.8–11.
3. Mazurkiewicz S., Sierpinski W. *Contribution a la topologie des ensembles denombrables* // Fund. Math. 1920. V.1. P.17–27.
4. Нерешенные задачи топологической алебры. – Кишинев: Штиинца, 1985.
5. Граев М.И. *Свободные топологические группы* // Изв. АН СССР, сер. матем. 1948, Ѓ3. С.279–324.
6. Граев М.И. *Теория топологических групп* // Успехи мат. наук. 1950. Т.5, Ѓ2. С.3–56.
7. Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.-Л., 1937.
8. Общая алгебра, Т.1. Под редакцией Скорнякова Л.А. – М.: Наука, 1990.

Получено 21.03.1995.