Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 513.88

ПРО УМОВИ ВЗАЄМНОЇ СПРЯЖЕНОСТІ ОДНОГО КЛАСУ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ЗБУРЕНЬ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

О.Я. Мильо, О.Г. Сторож

Abstract. O.Ya. Mylyo, O.G. Storozh. *On mutually adjointness conditions for a class of finite-dimensional perturbations of positively defined operator* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.67–74.

Using the methods of extension theory and perturbation theory for linear operators in the Hilbert space one class of perturbations of given coercetive operator is described. In terms of abstract boundary values mutually adjointness conditions of considered operators are established.

У цій роботі систематично вживаються такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень і ядро (лінійного) оператора T, $\mathcal{B}(X,Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$, $A|_E$ – звуження відображення A на множину E, 1_X – тотожне перетворення простору X. Якщо $A_i : X \to Y_i, i = 1, \dots, n$, – лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ означає, що $Ax = (A_1x, \dots, A_nx)$.

Роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ з індексом дефекта (m,m), $0 < m < \infty$, де H – фіксований (комплексний) гільбертів простір, а $\mathcal{C}(X)$ – клас лінійних замкнених, щільно визначених операторів у цьому просторі. Через L_F позначаємо розширення за Фрідріхсом оператора L, а через H_e та $(\cdot|\cdot)_e$ – його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток. Відомо [1], що $H_e = D(L_F^{1/2})$, $\forall u, v \in H_e$ $(u|v)_e = (L_F^{1/2}u|L_F^{1/2}v)$. Під P розуміємо проектор $H_e \dot{+} \ker L_0^* \to H_e$ паралельно до $\ker L_0^*$, а під $D[T]$, де $T \in \mathcal{C}(H)$, – многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір із скалярним добутком $(y|z)_T = (y|z) + (Ty|Tz)$. Якщо $W \in \mathcal{B}(D[L_0^*], \mathfrak{h})$, а $G \in \mathcal{B}(H_e, \mathfrak{h})$, де $\mathfrak{h}$ – (допоміжний) гільбертів простір, то спряжені оператори W' та G^0 визначаємо з умов:

$$\forall y \in D(L_0^*), \forall h \in \mathfrak{h} \quad (Wy|h) = (y|W'h)_{L_0^*},$$
$$\forall u \in H_e, \forall h \in \mathfrak{h} \quad (Gu|h) = (u|G^0h)_e$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A55, 47B25.

(в усіх інших випадках для позначення оператора, спряженого з оператором A, використовується символ A^*). Зазначимо, що $G \in \mathcal{B}(H_e, \mathfrak{h})$ допускає продовження за неперервністю до деякого оператора з $\mathcal{B}(H, \mathfrak{h})$ тоді і тільки тоді, коли $R(G^0) \subset D(L_F)$; в цьому випадку $G^* = L_F G^0$.

Далі, нехай: $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ – простір граничних значень (ПГЗ) оператора L_0 тобто (див. [2] і цитовану там літературу) $\mathcal{H}$ – гільбертів простір, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{B}(D[L_0^*], \mathcal{H})$, $R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\ker(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = D(L_0)$,

$$\forall y, z \in D(L_0^*) \quad (L_0^* y|z) - (y|L_0^* z) = (\Gamma_1 y|\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y|\Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}; \tag{1}$$

$\Psi_j \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, $R(\Psi_j^0) \cap D(L_F) = \{0\}$, $\Phi_j \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H})$, $R(\Psi_j) \cap R(\Phi_j) = \{0\}$, $\Gamma_i^{(j)}$ – продовження оператора Γ_i нулем на $R(\Psi_j^0), i = 1, 2$, $\Gamma_3^{(j)}$ – відображення $D(L_0^*) \dot{+} \dot{+} R(\Psi_j^0) \to R(\Psi_j)$, яке визначається з умови $\Gamma_3^{(j)} y = h \Leftrightarrow y + \Psi_j^0 h \in D(L_0^*)$, $j = 1, 2$; $\Gamma_4^{(1)} = \Psi_2 P$, $\Gamma_4^{(2)} = \Psi_1 P$.

Введемо в розгляд оператори L_{max}, L_{min}, M_{max}, M_{min} за допомогою співвідношень:

$$D(L_{min}) = D(L_0) \cap \ker \Psi_1, \quad L_{min} \subset L_0,$$
$$D(M_{min}) = D(L_0) \cap \ker \Psi_2, \quad M_{min} \subset L_0,$$
$$D(L_{max}) = D(L_0^*) \dot{+} R(\Psi_2^0), \ L_{max} y = L_0^*(y + \Psi_2^0 \Gamma_3^{(2)} y), \ y \in D(L_{max}),$$
$$D(M_{max}) = D(L_0^*) \dot{+} R(\Psi_1^0), \ M_{max} y = L_0^*(z + \Psi_1^0 \Gamma_3^{(1)} y), \ z \in D(M_{max}),$$

і припустимо, що $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2)$ – крайова пара для (L_0^*, L_0), (див. [3]): $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H})$, $R(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\ker \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) = D(L_0)$. Доведено [3], що існує єдина крайова пара $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2)$ для (L_0^*, L_0) така, що

$$\forall y, z \in D(L_0^*) \quad (L_0^* y|z) - (y|L_0^* z) = (\mathcal{U}_1 y|\widetilde{\mathcal{U}}_2 z) - (\mathcal{U}_2 y|\widetilde{\mathcal{U}}_1 z). \tag{2}$$

Позначимо через $\mathcal{U}_i^{(2)}$ $(\widetilde{\mathcal{U}}_i^{(1)})$ продовження оператора $\mathcal{U}_i$ $(\widetilde{\mathcal{U}}_i)$ нулем на $R(\Psi_2^0)$ $(R(\Psi_1^0))$ і покладемо: $\chi_i = \Psi_i P + \Phi_i$, $\chi_i^0 = (\chi_i|_{H_e})^0 = \Psi_i^0 + \Phi_i^0$.

Основним об'єктом нашого дослідження є оператор T, визначений за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{y \in D(L_{max}) : y + \Psi_2^0 \mathcal{U}_2^{(2)} y \in D(L_0^*), \mathcal{U}_1^{(2)} y = \chi_1 y\} \tag{3}$$
$$Ty = L_0^*(y + \chi_2^0 \mathcal{U}_2^{(2)} y), \quad y \in D(T), \tag{4}$$

або, що еквівалентно:

$$D(T) = \{y \in D(L_{max}) : P_1^{(2)} \mathcal{U}_2^{(2)} y = \Gamma_3^{(2)} y, \mathcal{U}_1^{(2)} y - \Gamma_4^{(2)} y = \Phi_1 y\} \tag{5}$$
$$Ty = L_{max} y + \Phi_2^* \mathcal{U}_2^{(2)} y, \quad y \in D(T), \tag{6}$$

(де $P_1^{(2)}$ – ортопроектор $\mathcal{H} \to R(\Psi_2)$).

Показано [4,5] (див. також [6]), що усі максимально акретивні розширення оператора L_0, а також спряжені з ними, можуть бути подані у вигляді (3), (4). У випадку $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ оператори розглядуваного типу досліджувались в [7], у випадку диференціальних операторів – у [8] Метою даної роботи є побудова спряженого оператора T^* та дослідження умов взаємної спряженості (зокрема, самоспряженості) відображень розглядуваного класу. Зазначимо, що оператор T ми трактуємо як збурення оператора $L_1 = L_0^*|_{\ker \mathcal{U}_1}$, який отримаємо, поклавши в (3), (4) $\Phi_1 = \Phi_2 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$, і це збурення змінює не тільки закон дії оператора, але й його область визначення (для диференціальних операторів – крайові умови).

1. Встановимо потрібний для подальшого абстрактний аналог формули Лагранжа для пар (L_{max}, L_{min}) та (M_{max}, M_{min}).

Теорема 1. *$L_{min}, L_{max}, M_{min}, M_{max} \in \mathcal{C}(H)$, причому $L^*_{min} = M_{max}$, $L^*_{max} = M_{min}$.*

$(\mathcal{H} \oplus R(\Psi_2) \oplus \mathcal{H} \oplus R(\Psi_1), \Gamma_1^{(2)} \oplus \Gamma_2^{(2)} \oplus \Gamma_3^{(2)} \oplus \Gamma_4^{(2)})$ (відповідно $(\mathcal{H} \oplus R(\Psi_1) \oplus \mathcal{H} \oplus R(\Psi_2), \Gamma_1^{(1)} \oplus \Gamma_2^{(1)} \oplus \Gamma_3^{(1)} \oplus \Gamma_4^{(1)})$) є крайовою парою для (L_{max}, L_{min}) (відповідно (M_{max}, M_{min})) і $\quad \forall y \in D(L_{max}), \forall z \in D(M_{max})$

$$\begin{aligned}(L_{max}y|z) - (y|M_{max}z) &= (\Gamma_1^{(2)}y|\Gamma_2^{(1)}z) - (\Gamma_2^{(2)}y|\Gamma_1^{(1)}z)\\ &+ (\Gamma_3^{(2)}y|\Gamma_4^{(1)}z) - (\Gamma_4^{(2)}y|\Gamma_3^{(1)}z). \qquad (7)\end{aligned}$$

Доведення. Перше твердження теореми доведено в [5] (див. також [4]). Покажемо справедливість другого. Оскільки $\ker \Gamma_i^{(2)} \supset D(L_{min})$, $i = 1, \ldots, 4$, то $\ker \Gamma_i^{(2)}$ замкнений у $D[L_{max}]$ як сума замкненого та скінченновимірного підпросторів. Крім цього, $\dim D(L_{max})|_{\ker \Gamma_i^{(2)}} < +\infty$, тому $\Gamma_i \in \mathcal{B}(D[L_{max}], \mathcal{H})$. Далі, очевидно, що

$$\ker(\Gamma_1^{(2)} \oplus \Gamma_2^{(2)} \oplus \Gamma_3^{(2)} \oplus \Gamma_4^{(2)}) = \bigcap_{i=1}^{4} \ker \Gamma_i^{(2)} = D(L_{min}).$$

Нехай $(h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathcal{H} \oplus R(\Psi_2) \oplus \mathcal{H} \oplus R(\Psi_1)$. Існують $u \in D(L_0^*)$ таке, що $\Gamma_1 u = h_1$, $\Gamma_2 u = h_3$ (тобто $\Gamma_1^{(2)}u = h_1$, $\Gamma_2^{(2)}u = h_3$, $\Gamma_3^{(2)}u = 0$), $v \in R(\Psi_2^0)$ таке, що $\Gamma_3^{(2)}v = h_2$ (досить покласти $v = -\Psi_2^0 h_2$) та $w \in D(L_0)$ таке, що $\Gamma_4^{(2)}w = \Psi_1 w = h_4 - \Gamma_4^{(2)}(u + v)$ (оскільки $R(\Psi_1|_{D(L_0)}) = R(\Psi_1)$). Покладемо $y = u + v + w$. Безпросередня перевірка показує, що $\Gamma_1^{(2)}y = h_1$, $\Gamma_3^{(2)}y = h_2$, $\Gamma_2^{(2)}y = h_3$, $\Gamma_4^{(2)}y = h_4$. Таким чином, $(\mathcal{H} \oplus R(\Psi_2) \oplus \mathcal{H} \oplus R(\Psi_1), \Gamma_1^{(2)} \oplus \Gamma_2^{(2)} \oplus \Gamma_3^{(2)} \oplus \Gamma_4^{(2)}))$ – крайова пара для (L_{max}, L_{min}). Аналогічно переконуємось у тому, що $(\mathcal{H} \oplus R(\Psi_1) \oplus \mathcal{H} \oplus R(\Psi_2), \Gamma_1^{(1)} \oplus \Gamma_2^{(1)} \oplus \Gamma_3^{(1)} \oplus \Gamma_4^{(1)})$ – крайова пара для (M_{max}, M_{min}).

Нарешті, $\forall y \in D(L_{max}), \forall z \in D(M_{max})$

$$\begin{gathered}(L_{max}y|z) = (L_0^*(y + \Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y)|(z + \Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z) - \Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z) = (y + \Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y|L_0^*(z + \Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z))\\ +(\Gamma_1(y + \Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y)|\Gamma_2(z + \Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z))_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2(y + \Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y)|(\Gamma_1(z + \Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z))_{\mathcal{H}} -\\ (L_0^*(y + \Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y)|\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z) = (y|M_{max}z) + (\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y|L_0^*(z + \Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z)) +\\ (\Gamma_1^{(2)}y|\Gamma_2^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{(2)}y|\Gamma_1^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (L_0^*(y + \Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y)|\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z),\end{gathered}$$

тобто

$$(L_{max}y|z) - (y|L_{max}z) = (\Gamma_1^{(2)}y|\Gamma_2^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{(2)}y|\Gamma_1^{(1)}z)_{\mathcal{H}} + (\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y|L_0^*(z+\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z)) - (L_0^*(y+\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y)|\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z).$$

Але

$$(L_0^*(y+\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y)|\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z)) = (Py|\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z)_e = (\Gamma_4^{(2)}y|\Gamma_3^{(1)}z)_{\mathcal{H}} + (\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y|\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z),$$
$$(\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y|L_0^*(z+\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z)) = (\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y|Pz)_e = (\Gamma_3^{(2)}y|\Gamma_4^{(1)}z)_{\mathcal{H}} + (\Psi_2^0\Gamma_3^{(2)}y|\Psi_1^0\Gamma_3^{(1)}z),$$

що й показує правильність формули (7).

2. З результатів, викладених в [3,7], випливає, що оператор T, визначений співвідношеннями (3), (4), є замкненим і щільно визначеним, тому існує спряжений оператор $T^* \in \mathcal{C}(H)$.

Теорема 2.

$$D(T^*) = \{z \in D(M_{max}) : z + \Psi_1^0\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(1)}z \in D(L_0^*), \widetilde{\mathcal{U}}_1^{(1)}z = \chi_2 z\}, \tag{8}$$

$$T^*z = L_0^*(z + \chi_1^0\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(1)}z), \quad z \in D(T^*). \tag{9}$$

Доведення. На підставі результатів, наведених у [7], а також з (2) і (7) одержуємо, що $D(T^*) \subset D(M_{max})$. Тому, якщо $z \in D(T^*)$, то $\forall y \in D(T)$

$$(y|T^*z) = (Ty|z) = (L_{max}y|z) + (\mathcal{U}_2^{(2)}y|\Phi_2 z) = (y|M_{max}z) + (\mathcal{U}_1^{(2)}y|\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_2 z)_{\mathcal{H}} -$$
$$(\mathcal{U}_2^{(2)}y|\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_1 z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3^{(2)}y|\Gamma_4^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_4^{(2)}y|\Gamma_3^{(1)}z)_H + (\mathcal{U}_2^{(2)}y|\Phi_2 z)_{\mathcal{H}} = (y|M_{max}z) +$$
$$(\Gamma_4^{(2)}y + \Phi_1 y|\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_2 z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{(2)}y|\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_1 z)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{U}_2^{(2)}y|\Gamma_4^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_4^{(2)}y|\Gamma_3^{(1)}z)_{\mathcal{H}} +$$
$$(\mathcal{U}_2^{(2)}y|\Phi_2 z)_{\mathcal{H}} = (y|M_{max}z + \Phi_1^*\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_2 z) + (\Gamma_4^{(2)}y|\mathcal{U}_2^{(1)}z - \Gamma_3^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{(2)}y|\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_1 z - \chi_2 z)_{\mathcal{H}}.$$

Стверджуємо, що

$$D(T^*) = \{z \in D(M_{max}) : \widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_1 z = \chi_2 z, P_1^{(1)}\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_2 z = \Gamma_3^{(1)}z\}, \tag{10}$$
$$T^*z = M_{max}z + \Phi_1^*\widetilde{\mathcal{U}^{(1)}}_2 z, z \in D(T^*). \tag{11}$$

Дійсно, позначимо (тимчасово) оператор (8), (9) через $\widetilde{T}$. Проведені вище обчисленя показують, що $\widetilde{T} \subset T^*$. З теореми про індекс споріднених операторів [7] випливає, що $\dim D(T^*)|_{D(\widetilde{T})} = 0$, тобто $\widetilde{T} = T^*$. Отже, твердження теореми є наслідком еквівалентності співвідношень (8), (9) та (10), (11).

3. Нехай Ψ_j, Φ_j, χ_j, χ_j^0 – ті ж самі, що в попередніх пунктах, $P^{(j)}$ – ортопроектор $\mathcal{H} \to R(\chi_j)$, $j = 1, 2$. Домовимось під $W^{(j)}$ розуміти продовження оператора $W \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H})$ нулем на $R(\Psi_j^0)$, а твердження $(W_1, W_2) \in \{\chi\}$ розшифровуємо так:

$$W_1, W_2 \in \mathcal{B}(D[L_0^*], \mathcal{H}),\ \ker W_1 \cap \ker W_2 \supset D(L_0),\ R(W_1) = \mathcal{H},$$
$$R(W_1 \oplus W_2) = R(W_1) \oplus R(W_2),\ \chi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H}),\ R(\chi) = R(W_2).$$

У цьому пункті розв'яжемо задачу про умови взаємної спряженості операторів T та $\widetilde{T}$, визначених як:

$$D(T) = \{y \in D(L_{max}) : y + \Psi_2^0 U_2^{(2)} y \in D(L_0^*), U_1^{(2)} y = \chi_1 y\} \tag{12}$$

$$Ty = L_0^*(y + \chi_2^0 U_2^{(2)} y), \quad y \in D(T), \tag{13}$$

$$D(\widetilde{T}) = \{z \in D(M_{max}) : z + \Psi_1^0 V_2^{(1)} z \in D(L_0^*), V_1^{(1)} z = \chi_2 z\}, \tag{14}$$

$$\widetilde{T} z = L_0^*(z + \chi_1^0 V_2^{(1)} z), \quad z \in D(\widetilde{T}), \tag{15}$$

де $(U_1, U_2) \in \{\chi_2\}$, $(V_1, V_2) \in \{\chi_1\}$.

Зазначимо, що при $U_1 = \mathcal{U}_1$, $U_2 = P^{(2)}\mathcal{U}_2$, $V_1 = \widetilde{\mathcal{U}}_1$, $V_2 = P^{(1)}\widetilde{\mathcal{U}}_2$ співвідношення (3), (4) набирають вигляду (12), (13), а співвідношення (8), (9) – вигляду (14), (15), тому постановка задачі є природною.

Лема. *Нехай (U_1, U_2), $(W_1, W_2) \in \{\chi_2\}$, $T = T_U$ визначений згідно з (12), (13), а T_W – згідно з аналогічними співвідношеннями з заміною U_i на W_i, $i = 1, 2$. Для того щоб $T_W = T_U$, необхідно і достатньо, щоб існувала бієкція $\Omega \in \mathcal{B}(R(\chi_1) \oplus R(\chi_1)^{\perp} \oplus R(\chi_2))$ така, що $\Omega|_{R(\chi_i)} = 1_{R(\chi_i)}$, $i = 1, 2$, $W = \Omega U$.*

Доведення. Нехай $T_W = T_U$. Тоді $D(T_W) = D(T_U)$. Звідси та з леми про трійку [9] випливає існування бієкції $\Omega_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus R(\Psi_2))$ такої, що $\forall \in D(L_{max})$

$$[(W_1^{(2)} - \chi_1) \oplus (W_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})]y = \Omega_1[(U_1^{(2)} - \chi_1) \oplus (U_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})]y.$$

Зокрема, для $y \in D(L_{min})$ (а отже, й для всіх $y \in H$) $\Phi_1 y = \Omega_1 \Phi_1 y$, тому

$$\Omega_1|_{R(\Phi_1)} = 1_{R(\Phi_1)}, \quad [(W_1^{(2)} - \Gamma_4^{(2)}) \oplus (P_1^{(2)} W_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})] = \\ \Omega_1[(U_1^{(2)} - \Gamma_4^{(2)}) \oplus (P_1^{(2)} U_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})]. \tag{16}$$

Виходячи звідси, переконуємось у виконанні співвідношень:

$$\Omega_1|_{R(\Psi_1)} = 1_{R(\Psi_1)}, [W_1^{(2)} \oplus (P_1^{(2)} W_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})] = \Omega_1[U_1^{(2)} \oplus (P_1^{(2)} U_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})], \tag{17}$$

$$\Omega_1|_{\{0\} \oplus R(\Psi_2)} = 1|_{R(\Psi_2)}, W_1^{(2)} \oplus P_1^{(2)} W_2^{(2)} = \Omega_1(U_1^{(2)} \oplus P_1^{(2)} U_2^{(2)}). \tag{18}$$

З (16)–(18) випливає, що

$$\begin{pmatrix} P^{(1)} W_1 y \\ [1_{\mathcal{H}} - P^{(1)}] W_1 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{R(\chi_1)} & \Omega_{21} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{(1)} U_1 y \\ [1_{\mathcal{H}} - P^{(1)}] U_1 y \end{pmatrix}, \tag{19}$$

де $\Omega_{21} \in \mathcal{B}(R(\chi_1)^{\perp}, R(\chi_1))$, $\Omega_{22} \in \mathcal{B}(R(\chi_1)^{\perp})$.

Далі, для кожного $y \in D(T_U)$ маємо $L_0^* \chi_2^0 (U_2^{(2)} y - W_2^{(2)} y) = 0$, а отже, й $W_2^{(2)} y - U_2^{(2)} y = 0$. Тому, як показує лема про трійку, для деякого $\Omega_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus R(\Psi_2), R(\chi_2))$:

$$W_2^{(2)} - U_2^{(2)} = \Omega_2[(U_1^{(2)} - \chi_1) \oplus (P_1^{(2)} U_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})]. \tag{20}$$

Зокрема, для $y \in D(L_{min})$ (а отже, й для всіх $y \in H$) $\Omega_2\Phi_1 y = 0$. Таким чином,

$$\Omega_2|_{R(\Phi_1)} = 0, \quad W_2^{(2)} - U_2^{(2)} = \Omega_2[(U_1^2 - \Gamma_4^{(2)}) \oplus (P_1^{(2)} U_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})], \tag{21}$$

а отже

$$\Omega_2|_{R(\Psi_1)} = 0, \quad W_2^{(2)} - U_2^{(2)} = \Omega_2[U_1^2 \oplus (P_1^{(2)} U_2^{(2)} - \Gamma_3^{(2)})], \tag{22}$$

$$\Omega_2|_{\{0\}+R\{\Psi_2\}} = 0, \quad W_2^{(2)} = U_2^{(2)} + \Omega_2[U_1^{(2)} \oplus 0]. \tag{23}$$

З (20)–(23) випливає, що

$$W_2 y = \Omega_{23}[1_{\mathcal{H}} - P^{(1)}]U_1 + U_2, \tag{24}$$

де $\Omega_{23} \in \mathcal{B}(R(\chi_1)^{\perp}, R(\chi_2))$. Об'єднуючи (19) та (24), отримуємо: $W = \Omega U$, де

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1_{R(\chi_1)} & \Omega_{21} & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & 0 \\ 0 & \Omega_{23} & 1_{R(\chi_2)} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

З оборотності Ω_1 випливає оборотність Ω_{22}, а з неї – оборотність оператора Ω. Необхідність доведено. Достатність показуємо за допомогою аналогічних міркувань.

Теорема 3. *Оператори T та $\widetilde{T}$ взаємно спряжені тоді й тільки тоді, коли*

$$UL_0^* V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1_{R(\chi_1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1_{R(\chi_2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

де $U = U_1 \oplus U_2$, $V = V_1 \oplus V_2$, а $UL_0^* V'$ трактується як відображення $R(\chi_2) \oplus R(\chi_2)^{\perp} \oplus R(\chi_1) \to R(\chi_1) \oplus R(\chi_1)^{\perp} \oplus R(\chi_2)$.

Доведення. Позначимо через P_i ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus R(\chi_i)$, $i = 1, 2$. Очевидно, що існує $\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2 \in \mathcal{B}(D[L_0^*], \mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ такий, що $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{U}})$ є крайовою парою для (L_0^*, L_0) і $V = P_1 \widetilde{\mathcal{U}}$. Доведено [3], що існує (єдиний) $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \in \mathcal{B}(D[L_0^*], \mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ такий, що $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \mathcal{U})$ є крайовою парою для (L_0^*, L_0) і виконується (2). При цьому

$$\mathcal{U} L_0^* \widetilde{\mathcal{U}}' = \begin{pmatrix} 0 & -1_{\mathcal{H}} \\ 1_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{def}{=\!=} \mathcal{I}. \tag{27}$$

З теореми 2 випливає, що

$$D(\widetilde{T}^*) = \{y \in D(L_{max}) : \mathcal{U}_1^{(2)} y = \chi_1 y, P_1^{(2)} \mathcal{U}_2^{(2)} y = \Gamma_3^{(2)} y\},$$
$$\widetilde{T}^* y = L_{max} y + \Phi_2^* \mathcal{U}_2^{(2)} y, \quad y \in D(\widetilde{T}^*).$$

Нехай $\widetilde{T}^* = T$. Тоді $U = \Omega P_2 \mathcal{U}$, де Ω – оператор (вигляду (25)) із попередньої леми. Зважаючи на (27),

$$UL_0^* V' = \Omega P_2 \mathcal{U} L_0^* \widetilde{\mathcal{U}}' P_1 = \Omega P_2 \mathcal{I} P_1,$$

тобто виконується (26).

Переконаємось у достатності цієї умови. Відомо [3], що існують $U_3, V_3 \in \mathcal{B}(D[L_0^*], \mathcal{H}), R, \widetilde{R} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такі, що $(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}, U_1 \oplus U_3)$, $(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}, V_1 \oplus V_3)$ є крайовими парами для (L_0^*, L_0),

$$U_2 = RU_1 + P^{(2)}U_3, \quad V_2 = \widetilde{R}V_1 + P^{(1)}V_3, \quad (RP^{(2)})^* = RP^{(1)},$$
$$(U_1 \oplus U_3)L_0^*(V_1 \oplus V_3)' = \mathcal{I},$$
$$\forall y, z \in D(L_0^*) \ \ (L_0^* y|z) - (y|L_0^* z) = (U_1 y|V_3 z)_{\mathcal{H}} - (U_3 y|V_1 z)_{\mathcal{H}}.$$

З цих рівностей із теореми 1 випливає, що $\forall y \in D(L_{max})$, $\forall z \in D(M_{max})$

$$(L_{max}y|z) - (y|M_{max}z) = (U_1^{(2)}y|V_2^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (U_2^{(2)}y|V_1^{(1)}z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3^{(2)}y|\Gamma_4^{(1)}z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_4^{(2)}y|\Gamma_3^{(1)}z)_{\mathcal{H}}, \tag{28}$$

$$D(T) = \{y \in D(L_{max}) : U_1^{(2)}y = \Gamma_4^{(2)}y + \Phi_1 y, \ P_1^{(2)}(RU_1^{(2)} + U_3^{(2)})y = \Gamma_3^{(2)}y\},$$
$$Ty = L_{max}y + \Phi_2^*(RU_1 + U_3)y, \quad y \in D(T), \tag{29}$$
$$D(\widetilde{T}) = \{z \in D(M_{max}) : V_1^{(1)}z = \Gamma_4^{(1)}z + \Phi_2 z, P_1^{(1)}(\widetilde{R}V_1^{(1)} + V_3^{(1)})z = \Gamma_3^{(1)}z\},$$
$$\widetilde{T}z = M_{max}z + \Phi_1^*(\widetilde{R}V_1^{(1)} + V_3^{(1)})z, \quad z \in D(\widetilde{T}). \tag{30}$$

Виходячи з (28)–(30) неважко за допомогою безпосередніх обчислень переконатись у справедливості рівності $(Ty|z) - (y|\widetilde{T}z) = 0$, $y \in D(T), z \in D(\widetilde{T})$. Отже, $\widetilde{T} \subset T^*$. Використовуючи, як і вище, в п.2, теорему про індекс споріднених операторів [7], переконуємось, що насправді $\widetilde{T} = T^*$.

Наслідок 1. *Якщо $T^* = \widetilde{T}$, то оператори L_1 та $\widetilde{L}_1$, визначені співвідношеннями*

$$D(L_1) = \{y \in D(L_0^*) : U_1 y = 0\}, \quad L_1 \subset L_0^*,$$
$$D(\widetilde{L}_1) = \{z \in D(L_0^*) : V_1 z = 0\}, \quad \widetilde{L}_1 \subset L_0^*,$$

взаємно спряжені.

Наслідок 2. *Нехай в умовах теореми 3 маємо, що $U = A\Gamma$, $V = B\Gamma$, де $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, $(\mathcal{H}, \Gamma_1 \oplus \Gamma_2)$ – ПГЗ оператора L_0. $T^* = \widetilde{T}$ тоді й тільки тоді, коли*

$$A\mathcal{I}B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1_{R(\chi_1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1_{R(\chi_2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. $UL_0^*V' = A\Gamma L_0^*\Gamma' B^* = A\mathcal{I}B^*$.

Зауваження. Виходячи з теореми 3 (або наслідку 2) та припускаючи, що $\chi_1 = \chi_2$, неважко сформулювати умови самоспряженості оператора T. Можна показати, що це припущення у випадку $T = T^*$ не зменшує загальності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука. 1968. 576с.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. 283с.
3. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. – К.: Наук. думка, 1983. 212с.
4. Мильо О.Я., Сторож О.Г. *Про загальний вигляд максимально акретивного розширення додатно визначеного оператора* // Доп. АН УРСР. 1991. № 6. С.19–22.
5. Мильо О.Я., Сторож О.Г. *Максимально аккретивные расширения положительно определенного оператора с конечным индексом дефекта* // Львов. ун-т. Львов. 1993. 31с. Деп. в ГНТБ Украины 28.10.93. № 2139 – Ук 93.
6. Evans W.D., Knowles I. *On the Extension Problem for Accretive Differential Operators* // J. of Func. Anal. 1985. 63. P.276–298.
7. Лянце В.Э. *О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами* // Докл. АН. СССР. 1972. 204. № 3. С.542–545.
8. Brown R.C., Krall A.M. *N-th order ordinary differential systems under Stieltjes boundary conditions* // Czech. Math. J. 1977. 27. P.119–131.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:Наука. 1989. 624с.

Львівський університет, механіко-математичний факультет,

Університетська 1, Львів 290602.

Надійшло 22.04.94.