Математичні студії

1995, випуск 4

УДК 517.5

ПРО ДОСТАТНЮ УМОВУ ГОЛОМОРФНОСТІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВІДОБРАЖЕНЬ ОБЛАСТЕЙ БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ

О.С. Грецький

Abstract. O. Gretsky. *On a sufficient condition of holomorphity for a certain class of Banach spaces mappings* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.59–66.

We develop a system of notions to investigate differential properties of mappings and prove a sufficient condition for a certain class of mappings of Banach spaces to be holomorphic.

Відображенню банахових просторів і точці з області визначення відображення ставимо у відповідність множину похідних операторів (множина моногенності). Потім, накладаючи на множину моногенності відображення певні "геометричні" умови, як от: незалежність дійсних частин похідних чисел функції від "дійсних" напрямків (випадок комплексного виміру 1), отримуємо критерій $\mathbb{C}$-диференційо вності відображення в точці.

Далі доводимо достатню умову голоморфності відображення, визначеного на деякій області.

Існує кілька підходів до означення голоморфності відображення областей банахових просторів [1]. У статті в основу дослідження достатніх умов голоморфності відображення областей банахових просторів покладено таке поняття голоморфності відображення: f голоморфне на U, де U – область $\iff f$ неперервне на U та голоморфне на кожному комплексному багатовимірному аффінному підпросторі, що проходить через довільну точку області U.

Побудуємо понятійний апарат, на базі якого буде проводитись дослідження диференціальних властивостей відображень банахових просторів. Для гільбертових просторів це зроблено в [2]. Мінімальна структура – комплексний банахів простір із базисом.

Нехай пара $(B, ||\cdot||)$ – банахів комплексний простір із відповідною нормою, $\mathfrak{A}$ – множина довільної потужності.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32H02.

Означення 1. Сукупність $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ елементів простору B назвемо базисом простору, якщо справджується наступне твердження:

$$\forall z \in B \quad \exists! \{z_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \quad \big[\{z_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subset \mathbb{C} \wedge z = \sum_\alpha z_\alpha e_\alpha\big],$$

де підсумовування розуміється в сенсі [3, с.234–236].

Кожний такий базис назвемо репером, а сукупність всіх реперів позначимо через $o(B)$.

Нехай $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \in o(B)$. Позначимо через $E(\varepsilon)$ дійсну лінійну замкнену оболонку ε:

$$E(\varepsilon) := \overline{\mathcal{L}_\mathbb{R}(\varepsilon)}.$$

За лемою 1 [4, с.136–137], $B = E(\varepsilon) \oplus iE(\varepsilon)$, де $\oplus$ – операція прямої топологічної суми.

Означимо множину таких дійсних підпросторів:

$$\mathcal{K}(B) := \{E(\varepsilon) | \varepsilon \in o(B)\}.$$

Нехай $E_0 \in \mathcal{K}(B)$ – довільний, але фіксований дійсний підпростір. Введемо $\mathbb{R}$-лінійний оператор спряження J, асоційований з розкладом $B = E_0 \oplus iE_0$:

$$\forall z \in B, \qquad Jz := z' - iz'', \text{ де } z := z' + iz'' \text{ та } z', z'' \in E_0.$$

Для довільного $E \in \mathcal{K}(B)$ означимо $\mathbb{C}$-лінійний оператор $T_E : B \to B$, а саме: $T_E z := Jz' + iJz''$, де $z := z' + iz''$ – довільний елемент простору B та $z', z'' \in E$.

Означення 2. Сім'я послідовностей $\widetilde{\varepsilon} = \{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^\infty\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, $z_\alpha^k \neq a$, $\forall k, \alpha$ називається репером послідовностей у точці a з дотичним репером $\varepsilon \in o(B)$, якщо виконані умови:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} z_\alpha^k = a \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{A}$;

б) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{z_\alpha^k - a}{||z_\alpha^k - a||} = e_\alpha \ \forall \alpha \in \mathfrak{A}$; $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\varepsilon)$, $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

Означення 3. Нехай B, B_1 – комплексні банахові простори, $f : D \to B_1$ – відображення області $D \subset B$ та $\widetilde{\varepsilon} = \{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^\infty\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ – такий репер послідовностей у точці $a \in D$ з дотичним репером $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \in o(B)$, що $z_\alpha^k \in D \ \ \forall \alpha, k$. Вважатимемо, що в точці a існує похідний оператор $L(f, \widetilde{\varepsilon}, a)$ відображення f вздовж репера послідовностей $\widetilde{\varepsilon}$, якщо:

а) $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$ існують границі: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{f(z_\alpha^k) - f(a)}{||z_\alpha^k - a||} = \zeta_\alpha \in B_1$;

б) $L(f, \widetilde{\varepsilon}, a)$ – $\mathbb{C}$-лінійний обмежений оператор, що відповідає умовам:

$$L(f, \widetilde{\varepsilon}, a)e_\alpha = \zeta_\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Множину всіх реперів послідовностей $\widetilde{\varepsilon}$ у точці a (з різними дотичними реперами $\varepsilon \in o(B)$), вздовж яких існують похідні оператори відображення f, позначимо через $\mathcal{R}(f, a)$, а множину всіх похідних операторів $L(f, \widetilde{\varepsilon}, a)$, де $\widetilde{\varepsilon}$ пробігає $\mathcal{R}(f, a)$, позначимо через $\mathcal{P}(f, a)$ та назвемо її множиною похідних операторів відображення f у точці a.

Означення 4. Відображення $f : D \to B_1$, де $B \supset D$ – область, назвемо $\mathbb{R}$-диференційовним ($\mathbb{C}$-диференційовним) у точці $a \in D$, якщо існує такий $\mathbb{R}$-лінійний ($\mathbb{C}$-лінійний) неперервний оператор $f'(a) : B \to B_1$, що

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)}{||z-a||} = 0.$$

Подамо параметричне зображення множини $\mathcal{P}(f,a)$ для $\mathbb{R}$-диференційовного відображення f у точці a.

Теорема 1. *Нехай $B \supset D$ – область, $f : D \to B_1$ – відображення, $\mathbb{R}$-диференційовне в точці $a \in D$, тобто $f'(a) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(B, B_1)$, де $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(B, B_1)$ – клас $\mathbb{R}$-лінійних неперервних відображень. Тоді для довільного репера ε з $o(B)$ та довільного репера послідовностей $\widetilde{\varepsilon} = \{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^\infty\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ (у сенсі означення 2) в точці a з дотичним репером ε існує похідний оператор $L(f, \widetilde{\varepsilon}, a)$ відображення f у точці a вздовж $\widetilde{\varepsilon}$ та відповідне зображення $\mathcal{P}(f,a)$:*

$$L_E(f,a) := L(f, \widetilde{\varepsilon}, a) = f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)T_E, \tag{2.1.1}$$

де $E = E(\varepsilon)$.

Доведення. Введемо $\mathbb{C}$-лінійні оператори з банахового простору B у банахів простір B_1:

$$f_z(a)z = \frac{f'(a)z - if'(a)iz}{2}, \quad f_{\overline{z}}(a)z = \frac{if'(a)Jz - f'(a)iJz}{2i} \qquad \forall z \in B.$$

Тоді $f'(a)$ зобразиться у вигляді:

$$f'(a) = f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)J.$$

Із $\mathbb{R}$-диференційовності f у точці $a \in D$ та означення репера послідовностей випливає:

$$\zeta_\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_\alpha^k) - f(a)}{||z_\alpha^k - a||} = \lim_{k\to\infty} f'(a)\frac{z_\alpha^k - a}{||z_\alpha^k - a||} =$$
$$f'(a)e_\alpha = f_z(a)e_\alpha + f_{\overline{z}}(a)Je_\alpha = (f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)T_E)e_\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Теорему доведено.

Якщо $E \in \mathcal{K}(B)$ та $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in o(B)$ такі, що $\varepsilon_1 \subset E$, $\varepsilon_2 \subset E$, то з доведення теореми випливає, що для довільних реперів послідовностей $\widetilde{\varepsilon}_1$ і $\widetilde{\varepsilon}_2$ у точці a з дотичними реперами ε_1, ε_2 відповідно похідні оператори $L(f, \widetilde{\varepsilon}_1, \alpha)$ та $L(f, \widetilde{\varepsilon}_2, \alpha)$ рівні. Тому $L_E(f,a)$ назвемо похідним оператором відображення f у точці a вздовж E.

Як показує теорема 1, дослідження умов $\mathbb{C}$-диференційовності для $\mathbb{R}$-диференційовних відображень у точці зводиться до пошуку достатніх умов, що забезпечували б операторну рівність $f_{\overline{z}}(a) = 0$. При цьому важливим є вивчення властивостей сім'ї операторів $T_E : B \to B$, де $E \in \mathcal{K}(B)$.

Лема 1. *Нехай x – довільний фіксований ненульовий елемент банахового простору B, $F := \{T_E x\}_{E\in\mathcal{K}(B)}$. Тоді справедливе твердження*

$$\forall y \quad (y \neq 0 \wedge y \in B) \quad \exists s\,(s \in F) \quad \exists \gamma \quad (\gamma \in \mathbb{R}_+) \quad [y = \gamma \cdot s].$$

Доведення. Припустимо спочатку, що x та Jy $\mathbb{C}$-лінійно залежні: $Jj = \lambda x$. Маємо: $y = J(Jy) = J(\lambda x) = \overline{\lambda} J(x)$.

Нехай $a = \left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)^{1/2}$ та $g_1 = ax$. Тоді $x = \overline{a} g_1$. Доповнимо множину $\{g_1\}$ до базису простору B (це можна зробити на основі [5, с. 108–110]) і позначимо через E замкнену дійсну лінійну оболонку утвореної множини елементів. Маємо

$$T_E x = T_E(\overline{a} g_1) = \overline{a} T_E g_1 = \overline{a} J(ax) = (\overline{a})^2 Jx = \frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|} Jx = \frac{1}{|\lambda|} y.$$

Отже, $s = \frac{1}{|\lambda|} y$ та $\gamma = ||y||$.

Нехай x та Jy – $\mathbb{C}$-лінійно незалежні та $\overline{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}\{x, Jy\}}$ – лінійний підпростір, породжений елементами x та Jy. Тоді за наслідком теореми Банаха [6, с.17] маємо

$$B = \overline{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}\{x, Jy\}} \oplus B_1.$$

Розглянемо лінійний топологічний ізоморфізм

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{B_1} \end{bmatrix}, \text{ де}$$

$$Ax = ix - iJy, \qquad AJy = x + Jy.$$

Маємо

$$x = \frac{1}{2i}(\widetilde{A}x + i\widetilde{A}y).$$

Доповнимо множину елементів (Ax, AJy) до базису простору B (див. [5]) та позначимо через E замкнену дійсну лінійну оболонку утвореної множини елементів. Тоді

$$T_E x = \frac{1}{2i}(T_E\widetilde{A}x + iT_E\widetilde{A}y) = \frac{1}{2i}(JAx + iJAJy) = \frac{1}{2i}\big(J(ix - iJy) + iJ(x + Jy)\big) = y.$$

Отже, $a = y$ та $\gamma = 1$. Лему доведено.

Нехай B – комплексний рефлексивний банахів простір із базисом $\widehat{\varepsilon} = \{e_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\mathcal{A} : B \to B$ – довільний $\mathbb{C}$-лінійний неперервний оператор: $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(B)$, та $\{\varphi_t\}_{t=1}^{\infty}$ – базис у спряженому до B просторі B^*, ортогональний до $\widehat{\varepsilon}$. Результат дії лінійного функціоналу $\varphi \in B^*_{\mathbb{C}}$ на елемент x з простору $B_{\mathbb{C}}$ позначатимемо $< x, \varphi >$. Тоді $\mathrm{Re} < x, \varphi >$ можна розглядати як результат дії дійсного лінійного функціоналу $\mathrm{Re} < \cdot, \varphi >$ на елемент x з простору $B_{\mathbb{R}}$. Отже, якщо $\forall \in B \quad \mathrm{Re} < x, \varphi >= 0$, то $\varphi = 0$. Оператор $\mathcal{A}$ допускає матричне зображення A відносно базису $\widehat{\varepsilon}$ [7, с.227–229]:

$$A := (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}, \text{ де } a_{ij} =< \mathcal{A}e_i, \varphi_j > .$$

Означення 5. Вважатимемо, що лінійний неперевний оператор $\mathcal{A}$ зображується у вигляді декартового розкладу операторів відносно базису $\widehat{\varepsilon}$, якщо

$$A := \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im}\ A, \text{ де}$$
$$\operatorname{Re} A := (b_{ij})_{i,j=1}^{\infty},$$
$$b_{ij} := \frac{< \mathcal{A}e_i, \varphi_j > + \overline{< \mathcal{A}e_i, \varphi_j >}}{2}.$$

$\operatorname{Re} A$ назвемо дійсною частиною оператора $\mathcal{A}$.

Надалі ототожнюватимемо оператор $\mathcal{A}$ із його матричним представленням A відносно базису $\widehat{\varepsilon}$, і вживатимемо для них однакові позначення. Діагональ матриці A позначатимемо як $\operatorname{diag} A$.

Теорема 2. *Нехай $f : D \to B$ – відображення області $D \subset B$, $\mathbb{R}$-диференційовне в точці $a \in D$, і відносно деякого базису $\widehat{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ всі діагоналі дійсних частин похідних операторів $\mathcal{P}(f, a)$ збігаються:*

$$\operatorname{diag} \operatorname{Re} L_E = \operatorname{diag} \operatorname{Re} A \qquad \forall E \in \mathcal{K}(B).$$

Тоді відображення f $\mathbb{C}$-диференційовне в точці a.

Доведення. За умовою теореми

$$\operatorname{Re} < L_E e_k, \varphi_k >= \operatorname{Re} < A e_k, \varphi_k > \qquad \forall E \in \mathcal{K}(B) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отже, $\operatorname{Re} < L_E e_k, \varphi_k >= \operatorname{Re} < L_{iE} e_k, \varphi_k > \forall E, k$.

З теореми 1 та з того, що $T_{iE} = -T_E$, випливає: $\forall E, k$

$$< (f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)T_E)e_k, \varphi_k > + \overline{< (f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)T_E)e_k, \varphi_k >} =$$
$$< (f_z(a) - f_{\overline{z}}(a)T_E)e_k, \varphi_k > + \overline{< (f_z(a) - f_{\overline{z}}(a)T_E)e_k, \varphi_k >} \Longrightarrow$$
$$\operatorname{Re} < f_{\overline{z}}(a)T_E e_k, \varphi_k >= 0 \quad \forall E, k \Longrightarrow$$
$$\operatorname{Re} < T_E e_k, f_{\overline{z}}^*(a)\varphi_k >= 0 \quad \forall E, k.$$

За лемою 1 множина векторів $\{T_E e_1\}_{E \in \mathcal{K}(B)}$ тотальна в просторі B.

Отже,

$$f_{\overline{z}}^*(a)\varphi_k = 0 \quad \forall k \Longrightarrow f_{\overline{z}}^*(a) = 0 \Longrightarrow f_{\overline{z}}(a) = 0 \Longrightarrow f'(a) = f_z(a) \Longrightarrow$$

відображення f $\mathbb{C}$-диференційовне у точці a. Теорему доведено.

Нехай B – комплексний рефлексивний сепарабельний банахів простір із базисом, D – область у B та M – підмножина в D. Позначимо через $\mathcal{F}(D, M)$ множину всіх відображень $f : D \to B$, що мають таку властивість: для довільного репера $\varepsilon \in o(B)$ та довільної точки $a \in M$ існує такий репер послідовностей $\widetilde{\varepsilon}$ у точці a із дотичним репером ε, вздовж якого існує похідний оператор $L(f, \widetilde{\varepsilon}, a)$ відображення f у точці a. Нехай $\mathcal{P}(f, a)$ – множина всіх похідних операторів відображення f у точці a.

Лема 2. *Нехай D – область банахового простору B, $Q' \subset Q \subset D$ – вкладення множин, при цьому підмножина Q' є множиною не першої категорії у Q. Нехай $f : D \to B_1$ – неперервне відображення, що для довільної точки $a \in Q'$ відповідає такій умові:*

$$\limsup_{z \to a} \frac{||f(z) - f(a)||_1}{||z - a||} = \mathcal{M}(a) < \infty. \tag{L}$$

Тоді існує така куля K_0 ($K_0 \subset D$) із центром у деякій точці $z_0 \in Q$, що на множині $K_0 \cap Q \neq \varnothing$ відображення f відповідає умові Ліпшиця з деякою константою $\mathcal{M}$.

Доведення. Нехай X_n є множиною всіх точок $a \in Q$, для яких замкнена куля $\overline{K(a, 1/n)}$ міститься в D та виконується така умова:

$$\frac{||f(z) - f(a)||_1}{||z - a||} \leq n \qquad \forall z \in K(a, 1/n) \backslash \{a\}.$$

Покажемо, що кожна множина X_n $(n = 1, 2, \dots)$ замкнена відносно Q. Справді, нехай $z_k \in X_n$ та $z_k \to a \in Q$ при $k \to \infty$. Беремо в $1/n$-околі точки a довільну точку z'; починаючи з деякого k, вона потрапляє в $1/n$-окіл довільної точки z_k, а тому (для цих k):

$$||f(z') - f(z_k)||_1 \leq n||z' - z_k||, \quad z' \neq z_k.$$

Перехід до границі в попередній нерівності з врахуванням неперервності відображення f дає нам:

$$||f(z') - f(a)||_1 \leq n||z' - a||,$$

тобто $a \in X_n$.

З умови леми та означення множини X_n маємо:

$$Q' \subset X := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

тобто X є множиною не першої категорії у Q. Тому існує така куля $K_0(z_0, 1/n_0)$ із центром у деякій точці $z_0 \in Q$, що множина $K_0(z_0, 1/n_0) \cap X_{n_0} \cap Q$ всюди щільна в $K(z_0, 1/n_0) \cap Q$, а отже, $K_0(z_0, 1/n_0) \cap Q \subset X_{n_0}$ (оскільки множина X_{n_0} замкнена відносно Q) та $\mathcal{M} = n_0$.

Лему доведено.

Теорема 3. *Нехай D – область комплексного сепарабельного рефлексивного банахового простору B із базисом, $f : D \to B$ – неперервне відображення, що належить множині $\mathcal{F}(D, D)$ та для кожної точки $a \in D$ відповідає таким умовам: (L) і відносно деякого базису $\widehat{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ діагоналі дійсних частин похідних операторів $L(f, \widetilde{\varepsilon}, a)$, $\varepsilon \in o(B)$, збігаються.*

Тоді відображення f голоморфне в області D.

Доведення. Нехай a – довільна фіксована точка області D, F – $\mathbb{C}$-лінійний n-вимірний підпростір простору B та $D' := (a + F) \cap D$. За лемою 2 існує така куля $K_0 \subset D$, що відображення f ліпшицеве на $K_0 \cap D'$. Тоді $f|K_0 \cap D'$ майже скрізь $\mathbb{R}$-диференційовне на $K_0 \cap d'$ [8, с.14]. За теоремою 2 [8, с.16], отримаємо: відображення f голоморфне на $K_0 \cap D'$. Отже, відображення $f|_{D'}$ голоморфне на відкритій всюди щільній множині $\mathcal{O} \subset D$.

Нехай $Q := D' \backslash \mathcal{O}$. Тоді множина Q є замкненою, досконалою та другої категорії щодо до себе.

Нехай $Q \neq \{\varnothing\}$. За лемою 2 існує така куля $K' \subset D$ з центром $a_0 \in Q$, що відображення f відповідає умові Ліпшиця з деякою константою M на множині $K_1 \cap Q \neq \{\varnothing\}$. Нехай r_1 – радіус кулі K_1. Розглянемо кулю K_2 радіуса $r_2 < r_1$, розміщену концентрично до K_1. Нехай

$$M_1 := \max_{x \in K_1 \cap D'} ||f(x)||, \quad M_2 := \frac{2M_1}{r_1 - r_2}, \quad M_3 := \max\{M_1, M_2\}.$$

Доведемо, що $\forall a \in K_2 \cap Q$ та $\forall z \in K_1 \cap D'$ виконується нерівність

$$||f(z) - f(a)|| \leq M_3 ||z - a||.$$

Достатньо розглянути випадок, коли $z \in (K_1 \cap D') \backslash Q$. Виберемо компоненту $G \subset (K_1 \cap D') \backslash Q$ таку, що $z \in G$. Маємо $\partial G \subset Q \cup \partial K_1$. Доведемо нерівність для $z \in \partial G \cap \partial K_1$ (для $z \in Q$ отримано вище):

$$||f(z) - f(a)|| \leq 2M_1 = \frac{2M_1}{r_1 - r_2}(r_1 - r_2) =$$

$$M_2 \frac{r_1 - r_2}{||z - a||} ||z - a|| \leq M_2 ||z - a|| \leq M_3 ||z - a||.$$

Отже, нерівність виконується $\forall z \in \partial G$.

На основі теореми 12 [9] можна зробити висновок, що ця нерівність виконується $\forall z \in G$. Як і в [8, с.16] переконуємося, що відображення $f|_{K_2 \cap D'}$ голоморфне. Оскільки $a_0 \in K_2 \cap D'$, то це суперечить означенню множини Q. Отже, $Q = \{\varnothing\}$.

Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bochnac I., Siciak I. *Analytic functions in topological vektor spaces* // Studia Math. 1971. V.39. P.77–112.
2. Бондарь А.В. Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений. – Киев: Наук. думка. 1992. 223с.
3. Бурбаки Н. Общая топология. Основные конструкции. – М.:Физматгиз. 1958. 324с.
4. Гохберг И.У., Маркус А.С. *Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства* // Успехи матем. наук. 1959. Т.14. № 5(89). С.135–140.
5. Singer I. Bases in Banach Spaces, V.2. – Berlin e.a.: Springer-Verlag. 1981. 876p.
6. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.:Мир. 1967. 203с.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.П. Элементы функционального анализа. – М.;Л.:Гостехиздат. 1951. 519с.
8. Грецький О.С. Про умови голоморфності ліпшицевих відображень банахових просторів. – Київ. Препр. Ін-ту математики АН України. 1993. № 93.19. 20с.
9. Тамразов П.М. Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений. – Київ. Препр Ін-ту математики АН України. 1983. № 83.65. 50с.

Надійшло 19.01.94.