Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 517.5

ПРОСТІР ЦІЛИХ У C^N ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ

М.Т. Бордуляк

Abstract. M.T. Bordulyak. *The space of entire in $\mathbb{C}^n$ functions of bounded L-index* // Mathematychni Studii. **4** (1995) P.53–58.

The properties of a space of entire in $\mathbb{C}^n$ functions of bounded L-index in Iyer's metric are investigated. It is shown that such space is of the first category.

1. Нехай $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, а $f(Z)$ – ціла функція. Для $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ покладемо $||K|| = k_1 + \dots + k_n$ і $K! = k_1! \dots k_n!$, а $\square = (0, \dots, 0)$. Якщо $A = (a_1, \dots, a_n)$ і $B = (b_1, \dots, b_n)$, то $AB = (a_1b_1, \dots, a_nb_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n)$ і $A^B = a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n}$. Відношення $A \le B$ означає, що $a_i \le b_i$, $i = \overline{1, n}$. Для вектор–функції L з додатними неперервними на $[0, +\infty)$ компонентами l_i позначимо $L(|Z|) = (l_1(|z_1|), \dots, l_n(|z_n|))$, для часткових похідних вживатимемо позначення

$$f^{(K)}(Z) = \frac{\partial^{||K||} f}{\partial Z^K}(Z) = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}(z_1, \dots, z_n).$$

Функція f називається [1] цілою функцією обмеженого L-індексу, якщо існує число $\nu \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $Z \in \mathbb{C}^n$ та $J \in \mathbb{Z}_+^n$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(J)}|}{J! L^J(|Z|)} \le \max\left\{ \frac{|f^{(K)}(Z)|}{K! L^K(|Z|)} : ||K|| \le \nu \right\}. \tag{1}$$

Найменше з таких чисел ν назвемо L-індексом функції f і позначимо через $\nu(f, L)$. Якщо такого ν не існує, то покладаємо $\nu(f, L) = \infty$. Нарешті, через $\nu(f, L, Z^o)$ позначимо L-індекс функції f у точці Z^o, тобто найменше з чисел $\nu \in \mathbb{Z}_+$, для яких виконується (1) при $Z = Z^o$.

Якщо $n = 1$, то з цього означення випливає означення цілої функції (однієї змінної) обмеженого l-індексу ($l = l_1$), введене в [2], а якщо, крім цього, $l(x) \equiv 1$, то отримуємо класичне означення цілої функції обмеженого індексу.

Показано [3], що в просторі всіх цілих функцій із метрикою Ієра підпростір функцій обмеженого індексу є першої категорії. Нижче цей результат буде

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32A15.

перенесено на цілі в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу. Отримані теореми є новими і для цілих у $\mathbb{C}$ функцій обмеженого L-індексу.

2. Для цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій

$$f(Z)=\sum_{J\geq\square} a_J Z^J = \sum_{j_1,\dots,j_n=0}^{\infty} a_{j_1\dots j_n} z_1^{j_1}\dots z_n^{j^n}$$

і

$$g(Z)=\sum_{J\geq\square} b_J Z^J$$

покладемо

$$d(f,g)=\sup\{|a_\square-b_\square|, |a_J-b_J|^{1/||J||} : J\in\mathbb{Z}_+^n\},$$

а простір всіх цілих функцій із такою метрикою позначимо через E^n. Через $B^n(L)$ позначимо множину всіх цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого L-індексу, а через $B^n_\nu(L)$ – множину тих функцій із $B^n(L)$, для яких $\nu(f,L)\leq\nu$. Ясно, що $B^n(L)=\bigcup\limits_\nu B^n_\nu(L)$.

Лема 1. *Нехай $f\in E^n$. Тоді для будь-яких $\nu_o\in\mathbb{N}$ та $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що якщо $g\in E^n$ та $d(f,g)<\delta$, то $d(f^{(K)},g^{(K)})<\varepsilon$ для всіх $K\in\mathbb{Z}_+^n$, $||K||\leq\nu_o$.*

Доведення. Нехай $d(f,g)<\delta<1$. Оскільки

$$f^{(K)}(Z)=\sum_{J\geq\square}\frac{(J+K)!}{J!}a_{J+K}Z^J,\quad g^{(K)}(Z)=\sum_{J\geq\square}\frac{(J+K)!}{J!}b_{J+K}Z^J,$$

то

$$K!|a_K-b_K|\leq(\nu_o!)^n|a_K-b_K|^{||K||/||K||}\leq(\nu_o!)^n\delta\ ,$$

а при $J\neq\square$, аналогічно,

$$\left(\frac{(J+K)!}{J!}|a_{J+K}-b_{J+K}|\right)^{1/||J||}\leq\left(\frac{(J+K)!}{J!}\right)^{1/||J||}\delta^{\frac{||K||+||J||}{||J||}}\leq$$

$$\leq\left(\frac{(j_1+k_1)!}{j_1!}\dots\frac{(j_n+k_n)!}{j_n!}\right)^{1/(j_1+\dots+j_n)}\delta\leq(2+\nu_o)^{\nu_o n}\delta\ ,$$

тобто

$$d(f^{(K)},g^{(K)})\leq\max\{(\nu_o!)^n,\ \ (2+\nu_o)^{\nu_o n}\}\delta\ ,$$

і лему 1 доведено.

Теорема 1. *Нехай $f\in E^n$, $\nu\in\mathbb{Z}_+$ і $\nu(f,L)>\nu$. Тоді існує $\delta>0$ таке, що для кожної функції $g\in E^n$ з того, що $d(f,g)<\delta$, випливає $\nu(g,L)>\nu$.*

Доведення. Оскільки $\nu(f,L)>\nu$, то існують $Z^o\in\mathbb{C}^n$ і $\nu_o>\nu$ такі, що $\nu(f,L,Z^o)=\nu_o>\nu$. Для всіх $||K||\leq\nu_o-1$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(K)}(Z^o)|}{K!L^K(|Z^o|)}<\frac{|f^{(K^o)}(Z^o)|}{K!L^{K^o}(|Z^o|)},$$

де $||K^o|| = \nu_o$. Тому існує $\delta^* > 0$ таке, що

$$\frac{|f^{(K)}(Z^o)}{K!L^K(|Z^o|)} + \delta^* < \frac{|f^{(K^o)}(Z^o)|}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)}. \tag{2}$$

Використовуючи нерівність $a - b \geq c - d - |a-c| - |b-d|$, маємо

$$\frac{|g^{(K^o)}(Z^o)|}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)} - \frac{|g^{(K)}(Z^o)|}{K!L^K(|Z^o|)} \geq \frac{|f^{(K^o)}(Z^o)|}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)} - \frac{|f^{(K)}(Z^o)|}{K!L^K(|Z^o|)} - \\ - \frac{\big||g^{(K^o)}(Z^o)| - |f^{(K^o)}(Z^o)|\big|}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)} - \frac{\big||g^{(K)}(Z^o)| - |f^{(K)}(Z^o)|\big|}{K!L^K(|Z^o|)}. \tag{3}$$

Легко бачити, що

$$||g^{(K)}(Z^o)| - |f^{(K)}(Z^o)|| \leq d(f^{(K)}, g^{(K)}) + \sum_{J \neq \square} d(f^{(K)}, g^{(K)})^{||J||} |Z^o|^J. \tag{4}$$

За лемою 1 число δ можна вибрати так, щоб, якщо $d(f,g) < \delta$, то $d(f^{(K)}, g^{(K)}) < \varepsilon < 1$ та $d(f^{(K)}, g^{(K)})|z_i^o| < \varepsilon < 1$ для всіх $i = \overline{1,n}$ та $||K|| \leq \nu_o$. Тому з (4) випливає, що

$$||g^{(K)}(Z^o)| - |f^{(K)}(Z^o)|| \leq \frac{1 - (1-\varepsilon)^{n+1}}{(1-\varepsilon)^n}.$$

Тоді з (2) і (3) для $||K|| \leq \nu_o - 1$ маємо

$$\frac{|g^{(K^o)}(Z^o)|}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)} - \frac{|g^{(K)}(Z^o)|}{K!L^K(|Z^o|)} > \delta^* - \left\{ \frac{1 - (1-\varepsilon)^{n+1}}{(1-\varepsilon)^n} \left(\frac{1}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)} + \frac{1}{K!L^K(|Z^o|)} \right) \right\},$$

звідси та з довільності ε випливає, що

$$\frac{|g^{(K^o)}(Z^o)|}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)} > \frac{\delta^*}{2} + \frac{|g^{(K)}(Z^o)|}{K!L^K(|Z^o|)},$$

тобто $\infty \geq \nu(g,L) \geq \nu(g,L,Z^o) \geq \nu_o > \nu$. Теорему доведено.

Наслідок. *Множина $B_\nu^n(L)$ замкнена в E^n.*

3. Позначимо через Q клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій l таких, що $l(x + O(\frac{1}{l(x)}) = O(l(x))$ при $x \to +\infty$, і будемо говорити, що $L \in Q^n$, якщо $l_i \in Q$, $i = \overline{1,n}$.

Теорема 2. *Нехай $L \in Q^n$. Тоді $B^n(L)$ є простором першої категорії.*

Доведення. Покажемо, що для будь-якого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ множина $B_\nu^n(L)$ ніде не щільна в $B^n(L)$. Звідси, враховуючи, що $B^n(L) = \underset{\nu}{\cup} B_\nu^n(L)$, випливатиме твердження теореми.

Покладемо $\psi(r)=\max\left\{\int_0^r l_i(t)dt:\ i=\overline{1,n}\right\}$, і нехай $\Phi(r)$ – додатна опукла неспадна на $(-\infty,+\infty)$ функція така, що $\psi(r)=o(\Phi(\ln r)),\quad r\to\infty$. За теоремою Клуні [4] існує ціла функція $F(z_1)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k z_1^k$ з $c_k\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}_+$, така, що

$$\ln M(r,F)\sim\Phi(\ln r),\ \ r\to\infty,$$

де

$$M(r,F)=\max\left\{|F(z_1)|:\ |z_1|=r\right\}.$$

Виберемо $R=(r,\ldots,r)$. Тоді при $R\to\infty$

$$\frac{\ln M(R,F)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_0^r l_i(t)dt}>\frac{\ln M(R,F)}{n\psi(r)}\to\infty, \tag{5}$$

де $M(R,F)=\max\left\{|F(Z)|:\ |z_i|=r_i,\ i=\overline{1,n}\right\}$. Але в [1] показано, що ліва частина (5) обмежена, якщо $\nu(f,L)<\infty$. Тому звідси випливає, що функція F є необмеженого l-індексу. Те ж саме можна сказати про функції

$$\widetilde{F}_j(Z)=P_j(z_1,\ldots,z_n)+\sum_{k=i+1}^{\infty}c_k z_1^k,$$

де P_j – будь-який многочлен порядку j по всіх змінних.

Нехай тепер функція f має L-індекс $\nu(f,L)=\nu_o<\infty$. Покладемо

$$f_j(Z)=\sum_{||K||\leq j}a_K Z^K+\sum_{k=j+1}^{\infty}c_k z_1^k$$

та

$$f_{j,m}(Z)=\sum_{||K||\leq j}a_K Z^K+\sum_{k=j+1}^{m}c_k z_1^k\quad(m>j).$$

Легко показати, що $d(f,f_j)\to 0$ при $j\to\infty$ та $d(f_j,f_{j,m})\to 0$ при $m\to\infty$. Але функції f_j є необмеженого L -індексу, тобто $\nu(f_j,L)>\nu_o$, і за теоремою 1 маємо, що $\nu(f_{j,m},L)>\nu_o$ для всіх досить великих m. Отже, $f_{j,m}\in B^n(L)\setminus B^n_{\nu_o}(L)$, бо $\nu(f_{j,m},L)\leq m$ та $d(f,f_{j,m})\to 0$ при $m,j\to\infty$. Звідси випливає, що простір $B^n_{\nu_o}(L)$ – ніде не щільний у $B^n(L)$, а отже, простір $B^n(L)$ є першої категорії.

4. Неважко показати (аналогічно до доведення теореми 2), що простір $E^n\setminus B^n(L)$ – щільний в E^n. Для того щоб вияснити, чи таку властивість має також $B^n(L)\setminus B^n_\nu(L)$, нам буде потрібна наступна

Лема 2. *Нехай $l_1(r)$ задовольняє умову $\inf l_1(r)=c>0$. Тоді функція*

$$h(Z)=\sum_{||J||\leq m}a_J Z^J+e^{cz_1}$$

має обмежений L-індекс.

Твердження цієї леми випливає з означення (1).

Теорема 3. *Якщо* $\max\limits_{1\le i\le n}\inf\{l_i(r),\ r\ge 0\}\ge c>0$, *то для кожного* $\nu\in\mathbb{Z}_+$ *простір* $B^n(L)\setminus B^n_\nu(L)$ *є щільним у* E^n.

Доведення. Нехай $f\in E^n\setminus(B^n(L)\setminus B^n_\nu(L))$, тобто f – необмеженого L-індексу або
$\nu(f,L)\le\nu$. Покажемо, що f в обох випадках є граничною для функцій f_j, $\nu<\nu(f_j,L)<\infty$.

У першому випадку виберемо многочлени

$$f_j(Z)=\sum_{0\le||K||\le j}a_K Z^K,$$

тоді

$$\lim_{j\to\infty} d(f,f_j)=0$$

і, отже, існує підпослідовність $\{f_{j*}\}$ така, що $\nu(f_{j*},L)>\nu$, бо інакше б f мала обмежений L-індекс.

У другому випадку вважаємо, що $l_1(r)\ge c>0$ та

$$\varphi_j(Z)=\sum_{0\le||K||\le j}a_K Z^K+\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}z_1^k.$$

За лемою 2 функції φ_j є обмеженого L-індексу. Якщо $\nu(\varphi_j,L)>\nu$, то нехай $f_j=\varphi_j$. Якщо ж $\nu(\varphi_j,L)\le\nu$, то за теоремою 2 існує така f_j, що $f_j\in B^n(L)\setminus B^n_\nu(L)$ і $d(\varphi_j,f_j)<\frac{1}{j}$. Тоді й $d(f,f_j)\to 0$ при $j\to\infty$. Теорему 3 доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бордуляк М.Т., Шеремета М.М. *Обмеженість L-індексу цілої функції багатьох змінних* // Доп. АН України. Сер.А. 1993. № 9. с.10–13.
2. Кузык А.Д., Шеремета М.Н. *Целые функции ограниченного l-распределения значений* // Мат. заметки. 1986. т.39. № 1. с.3–13.
3. Ekblaw K.A. *The functions of bounded index as a subspace of a space of entire functions* // Pacific J. Math. 1971. V.37. P.353–355.
4. Clunie J. *On entire functions having prescribed growth* // Canad. J. Math. 1965. V.17. P.396–404.

Department of Mechanics and Mathematics, L'viv University,
Universitetska 1, 290602, Ukraine.

Надійшло 12.07.94.