Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 517.5

ПРО ДЕЯКІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНІ З ОПЕРАТОРОМ ПОММ'Є

М.І. Нагнибіда

Abstract. M.İ. Nahnybida. *On some maps of spaces of analytic functions related to Pommier operator* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.45–52.

Let A_{R_1}, $0 < R_1 \le \infty$, and $\overline{A}_{R_2}$, $0 \le R_2 < \infty$, be respectively the spaces of all univalent and analytic in disks $|z| < R_1$ and $|z| \le R_2$ functions, with usual topologies, Δ: $(\Delta f)(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ – Pommier operator in these spaces, and m, n fixed natural numbers.

In the paper all linear continuous maps T of these spaces into themselves that are solutions of the operator equation

$$T\Delta^m = \Delta^n T$$

are founded.

Через A_{R_1}, $0 < R_1 \le \infty$, позначимо простір всіх однозначних і аналітичних у крузі $|z| < R_1$ функцій з топологією компактної збіжності, а через $\overline{A}_{R_2}$, $0 \le R_2 < \infty$, – простір функцій, аналітичних у замкненому крузі $|z| \le R_2$. Нагадаємо, що послідовність функцій $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ з $\overline{A}_{R_2}$ збігається в цьому просторі до функції $f(z)$, якщо всі $f_n(z)$ та $f(z)$ аналітичні в деякому крузі $|z| < R_0$ для $R_0 > R_2$, і ця послідовність збігається до $f(z)$ за топологією простору A_{R_0}.

Останнім часом помітно зросла зацікавленість математиків до вивчення різних задач, пов'язанних з оператором Помм'є $\triangle$: $(\triangle f)(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ $(\forall f(z) \in A_{R_1}$ $(\overline{A}_{R_2}))$. Вивчались, наприклад, комутант оператора $\triangle^p$ $(p \in \mathbb{N})$ та переставні з $\triangle^p$ ізоморфізми просторів A_{R_1} на себе, умови застосовності операторів нескінченного порядку до A_{R_1} та умови еквівалентності операторів Помм'є, а також умови повноти та базисності в A_{R_1} відповідних систем функцій. І хоч оператор Помм'є – оператором узагальненого диференціювання, отримані при розв'язуванні вказаних задач результати відрізняються від аналогічних результатів для класичних звичайних диференціальних операторів досить істотно. Крім цієї інтригуючої властивості оператора Помм'є, слід відмітити й деяку

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30H05, 47B38.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

його універсальність. Справа в тому, що, як легко перевірити (див. [1]), будь-яке лінійне неперервне відображення L простору A_{R_1} у себе можна зобразити у вигляді

$$(Lf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)(\triangle^n f)(z), \quad \forall f(z) \in A_{R_1},$$

де функції $\varphi_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$, задовольняють умову

$$\forall \rho < R_1 \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\max_{|z|\le\rho} |\varphi_n(z)|} < R_1.$$

При цьому $\varphi_0(z) = L1$ та $\varphi_n(z) = Lz^n - zLz^{n-1}$, $n \ge 1$.

Існування такого зображення також диктує необхідність розв'язування різних задач, в першу чергу, саме для оператора Помм'є.

Позначатимемо надалі множину всіх лінійних неперервних відображень простору A_{R_1} (або $\overline{A}_{R_2}$) в себе через $\mathcal{L}(A_{R_1})$ (відповідно $\mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$).

Мета цієї роботи – відшукати в $\mathcal{L}(A_{R_1})$ та $\mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$ всіх розв'язків T операторного рівняння

$$T\triangle^m = \triangle^n T, \tag{1}$$

де m і n – фіксовані натуральні числа. Подібні рівняння при $m \ne n$ та з замінами $\triangle$ на оператор D звичайного диференціювання, оператор J звичайного інтегрування та оператор U множення на незалежну змінну розв'язувались раніше в роботах [2–4] (щодо цих рівнянь при $m = n$ див. монографію [5]).

Отже, нехай $T \in \mathcal{L}(A_{R_1})$ або $T \in \mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$ і $T\triangle^m = \triangle^n T$, а $[t_{i,k}]$ – його матриця в степеневому базисі відповідного простору (тобто $Tz^k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} t_{i,k} z^i$, $k = 0, 1, \dots$). Нагадаємо (див. [6]), що матриця $[t_{i,k}]$ визначає оператор $T \in \mathcal{L}(A_{R_1})$ тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \rho_1 < R_1 \ \exists r_1 < R_1 \text{ та } \exists C_1 \ge 0 : |t_{i,k}| \le C_1 \frac{r_1^k}{\rho_1^i},$$
$$i, k = 0, 1, \dots .$$

Аналогічно, оператор T належить до множини $\mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$ лише в тому випадку, коли елементи його матриці задовольняють умову:

$$\forall r_2 > R_2 \ \exists \rho > R_2 \text{ та } \exists C_2 \ge 0 : |t_{i,k}| \le C_2 \frac{r_2^k}{\rho_2^i},$$
$$i, k = 0, 1, \dots .$$

Враховуючи рівняння (1), отримуємо, що при $0 \le k \le m-1$

$$\triangle^n T z^k = \sum_{i=n}^{\infty} t_{i,k} z^{i-n} \equiv 0,$$

тобто $t_{i,k} = 0$ $(\forall i \ge n)$, а при $k \ge m$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t_{i,k-m} z^i \equiv T z^{k-m} = \sum_{i=n}^{\infty} t_{i,k} z^{i-n}.$$

Тому елементи матриці шуканого розв'язку рівняння (1) необхідно задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} t_{i,k} = 0, & i \geq n; 0 \leq k \leq m-1, \\ t_{i+n,k+m} = t_{i,k}, & i, k \geq 0. \end{cases}$$

Замінюючи тут i на $in+q$, $i \geq 0$; $0 \leq q \leq n-1$, а k – на $km+l$, $k \geq 0$; $0 \leq l \leq m-1$, легко дістаємо, що

$$t_{in+q,km+l} = \begin{cases} 0, & i > k, \\ t_{q,(k-i)m+l}, & i \leq k, \end{cases} \tag{2}$$

$$0 \leq q \leq n-1; \; 0 \leq l \leq m-1.$$

Крім того, елементи $t_{q,sm+l}$, $0 \leq q \leq n-1$; $s \geq 0$; $0 \leq l \leq m-1$, перших n рядків (їх, звичайно, можна вибирати довільно) повинні задовольняти умову

$$\begin{gathered} \forall \rho_1 < R_1 \quad \exists r_1 < R_1 \text{ та } \exists C_1 \geq 0 : \\ |t_{q,(k-i)m+l}| \leq C_1 \frac{r_1^{km+l}}{\rho_1^{in+q}}, \\ i \leq k; \; 0 \leq q \leq n-1; \; 0 \leq l \leq m-1, \end{gathered} \tag{3}$$

для простору A_{R_1}, і умову

$$\begin{gathered} \forall r_2 > R_2 \quad \exists \rho_2 > R_2 \text{ та } \exists C_2 \geq 0 : \\ |t_{q,(k-i)m+l}| \leq C_2 \frac{r_2^{km+l}}{\rho_2^{in+q}}, \\ i \leq k; \; 0 \leq q \leq n-1; \; 0 \leq l \leq m-1, \end{gathered} \tag{4}$$

для простору $\overline{A}_{R_2}$.

При $i = 0$ з (3) і (4) легко отримуємо, що для всіх q, $0 \leq q \leq n-1$, та l, $0 \leq l \leq m-1$

$$\varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[km]{|t_{q,km+l}|} \leq r, \tag{5}$$

де r – деяке число, причому $r < R_1$ (для просторів A_{R_1}) або r – довільне число й $r > R_2$ (у випадку $\overline{A}_{R_2}$). Тому з урахуванням цього з (5) випливає, що відповідно

$$\begin{gathered} \varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[km]{|t_{q,km+l}|} < R_1, \\ 0 \leq q \leq n-1; \; 0 \leq l \leq m-1, \end{gathered} \tag{6}$$

або

$$\begin{gathered} \varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[km]{|t_{q,km+l}|} < R_2, \\ 0 \leq q \leq n-1; \; 0 \leq l \leq m-1. \end{gathered} \tag{7}$$

Це означає, що характеристичні функції $\psi_{q,l}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{q,km+l}\lambda^{km}$, $0 \le q \le n-1$; $0 \le l \le m-1$, оператора T належать відповідно до простору $\overline{A}_{1/R_1}$ або до A_{1/R_2}.

Зауваження 1. З умов (3) і (4) при $0 < R_1 < \infty$ та $0 < R_2 < \infty$ випливає також, що коли серед елементів перших n рядків матриці оператора T є відмінні від нуля, то відповідно

$$1 \le R_1^{m-n} \quad \text{або} \quad 1 \le R_2^{m-n}. \tag{8}$$

Справді, якщо $t_{q_0,s_0m+l_0} \ne 0$, то при $k = s_0 + i$ після добування з обох частин відповідних нерівностей (3) і (4) кореня i-го степеня і переходу до границі при $i \to +\infty$ отримуємо:

$$1 \le \frac{r_1^m}{\rho_1^n} \le \frac{R_1^m}{\rho_1^n} \quad \text{і} \quad 1 \le \frac{r_2^m}{\rho_2^n} \le \frac{r_2^m}{R_2^n}.$$

Залишається тільки скористатися тепер довільністю ρ_1 ($\rho_1 < R_1$) та r_2 ($r_2 > R_2$).

Відомо [5], що при $m = n$ умови (3) і (6) та відповідно (4) і (7) рівносильні. Рівносильними вони є в деяких випадках і при $m \ne n$. Покажемо це (тобто що з умови (6) випливає (3), а з (7) – умова (4)). Зауважимо, що виконання оцінок (3) і (4) досить перевірити тільки для тих $\rho_1 < R_1$ та $r_2 > R_2$, які достатньо близькі відповідно до R_1 і R_2.

Розглянемо спочатку простір A_{R_1}, де $0 < R_1 \le \infty$, і нехай ρ_1, $0 < \rho_1 < R_1$, – задане число.

а) Якщо $R_1 = +\infty$, то, зважаючи на (6), для достатньо великих r_1, $r_1 < +\infty$,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[km]{|t_{q,km+l}|} < r_1,$$

тобто для деякого $C_0 \ge 0$ та для всіх k, $k \ge 0$, q, $0 \le q \le n-1$, та l, $0 \le l \le m-1$,

$$|t_{q,km+l}| = C_0 r_1^{km+l}.$$

Вибираючи r_1 так, щоб виконувалась нерівність $r_1^m \ge \rho_1^n$, отримуємо, що

$$|t_{q,(k-i)m+l}| \le C_1 \frac{r_1^{km+l}}{\rho_1^{in+q}},$$
$$k \ge i;\ 0 \le q \le n-1;\ 0 \le l \le m-1,$$

де C_1 – деяка стала. А це і є умова (3).

б) Нехай $R_1 = 1$. Тоді для заданого $\rho_1 < 1$ виберемо ρ_0 і r_1 так, щоб одночасно виконувались нерівності

$$0 < \rho_1 \le \rho_0 < 1, \quad \rho_0^{n/m} \le r_1 < 1$$

і

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[km]{|t_{q,km+l}|} < \rho_0.$$

Такий вибір вказаних чисел, очевидно, вже гарантує виконання умови (3).

в) Нехай тепер $0 < R_1 < 1$. Враховуючи зауваження 1, робимо висновок, що при $m > n$ рівняння (1) має тільки тривіальний розв'язок (тобто $t_{q,km+l} = 0$ $\forall k \geq 0$, $0 \leq q \leq n-1$ та $0 \leq l \leq m-1$).

Тому розглянемо умову (6) при $m < n$. З неї для вибраного ρ_1, $\rho_1 < R_1$, випливає, що для тих r_1, які задовольняють одночасно нерівності

$$\rho_1^{n/m} \leq r_1 < R_1 \quad \text{i} \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[km]{|t_{q,km+l}|} < r_1,$$

буде також

$$|t_{q,(k-i)m+l}| \leq C_0 \frac{r_1^{km+l}}{r_1^{im+q}} \leq C_1 \frac{r_1^{km+l}}{\rho_1^{in+q}},$$
$$C_1 \geq 0;\ k \geq 0;\ 0 \leq q \leq n-1;\ 0 \leq l \leq m-1.$$

Це – умова (3).

г) Якщо, нарешті, $1 < R_1 < \infty$, то згідно з умовою (8) рівняння (1) має лише тривіальний розв'язок вже при $m < n$.

Тому нехай $m > n$, а ρ_1 – задане число, $1 < \rho_1 < R_1$. Тоді, як і в попередньому випадку, для тих r_1, для яких

$$\rho_1^{n/m} \leq r_1 < R_1 \quad \text{i} \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[km]{|t_{q,km+l}|} < r_1,$$

умова (3) також виконується.

Отже, справджуються такі твердження.

Теорема 1. *Для того щоб рівняння (1) при $m \neq n$ мало в класі $\mathcal{L}(A_{R_1})$ тільки тривіальний розв'язок, необхідно й досить, щоб виконувалась одна з умов:*
1) $0 < R_1 < 1$ *та* $m > n$*;*
2) $1 < R_1 < \infty$ *та* $m < n$*.*

Лема 1. *Для того щоб рівняння (1) при $m \neq n$ мало в $\mathcal{L}(A_{R_1})$, де $0 < R_1 \leq \infty$, нетривіальні розв'язки, необхідно й досить, щоб виконувалась одна з умов:*
1) $R_1 = 1$ *або* $R_1 = +\infty$*;*
2) $0 < R_1 < 1$ *та* $m < n$*;*
3) $1 < R_1 < +\infty$ *та* $m > n$*.*
При цьому елементи матриці будь-якого розв'язку T цього рівняння пов'язані співвідношеннями (2) і

$$\psi_{q,l}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{q,km+l}\lambda^{km} \in \overline{A}_{1/R_1}, \tag{9}$$
$$0 \leq q \leq n-1;\ 0 \leq l \leq m-1.$$

Наголосимо ще раз, що при виконанні однієї з умов леми 1 умова (9) є необхідньою й достатньою для того, щоб відповідний оператор був неперервним відображенням простору A_{R_1} у себе.

Цілком аналогічні до наведених вище твердження дістаємо й у випадку просторів $\overline{A}_{R_2}$, $0 \leq R_2 < \infty$.

Теорема 2. *Рівняння (1) при $m \neq n$ має в класі $\mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$ лише тривіальний розв'язок тоді й тільки тоді, коли*
1) $0 < R_2 < 1$ *та* $m > n$*;*
2) $1 < R_2 < \infty$ *та* $m < n$*.*

Це твердження є наслідком відповідної нерівності з (8).

Лема 2. *Рівняння (1) при $m \neq n$ має в класі $\mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$, де $0 \leq R_2 < \infty$, нетривіальні розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується одна з умов:*
1) $R_2 = 1$ *або* $R_2 = 0$*;*
2) $0 < R_2 < 1$ *та* $m < n$*;*
3) $1 < R_2 < \infty$ *та* $m > n$*.*
При цьому елементи матриці будь-якого розв'язку T вказаного рівняння пов'язані співвідношеннями (2) і

$$\psi_{q,l}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{q,km+l}\lambda^{km} \in A_{1/R_2},$$
$$0 \leq q \leq n-1;\ 0 \leq l \leq m-1.$$

При виконанні умов лем 1 і 2 знайдемо, нарешті, вигляд відповідного оператора T. А з цією метою означимо спочатку такі оператори в A_{R_1} та $\overline{A}_{R_2}$:

$$(P_l^{(m)}f)(z) = P_l^{(m)}(\sum_{s=0}^{\infty} f_s z^s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{km+l}z^{km+l},$$
$$0 \leq l \leq m-1,$$

$$\Pi_m^n z^{km+l} = z^{kn+l}, \quad k \geq 0;\ 0 \leq l \leq m-1.$$

Легко переконатись, що в тій ситуації, яка розглядається, всі вони належать до $\mathcal{L}(A_{R_1})$ або відповідно до $\mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$.

Тоді, якщо вважати, що $\triangle^{-s} = U^s$, $s \geq 0$, де $(Uf)(z) = zf(z)$, отримуємо:

$$(Tf)(z) = T\big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m-1} f_{km+l}z^{km+l}\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m-1} f_{km+l}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1} t_{in+q,km+l}z^{in+q} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m-1} f_{km+l}\sum_{i=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-1} t_{q,(k-i)m+l}z^{in+q} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m-1} f_{km+l}\sum_{i=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-1} t_{q,im+l}z^{(k-i)n+q} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} t_{q,im+l}\big(\sum_{k=i}^{\infty} f_{km+l}z^{(k-i)n+q}\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} t_{q,im+l}\big(\triangle^{in+l-q}\Pi_m^n P_l^{(m)}f\big)(z).$$

Іншими словами,

$$T = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} t_{q,im+l}\triangle^{in+l-q}\Pi_m^n P_l^{(m)}. \tag{10}$$

Теорема 3. *При виконанні умов лем 1 і 2 кожний розв'язок рівняння (1) при* $m \neq n$ *у класі* $\mathcal{L}(A_{R_1})$ *або* $\mathcal{L}(\overline{A}_{R_2})$ *зображається у вигляді (10), а його характеристичні функції* $\psi_{q,l}(\lambda)$, $0 \leq q \leq n-1$; $0 \leq l \leq m-1$, *належать до простору* $\overline{A}_{1/R_1}$ *або відповідно до* A_{1/R_2}.

Зазначимо (див. [5]), що у вигляді (10) зображаються розв'язки рівняння (1) і при $m = n$.

Зауваження 2. Відомо (див. [5]), що деяка нескінченна матриця визначає неперервний оператор у просторі A_{R_1} (або $\overline{A}_{R_2}$) тоді й тільки тоді, коли транспонована до неї матриця відповідає такому ж оператору в просторі $\overline{A}_{1/R_1}$ (або A_{1/R_2}). Оскільки матриці операторів $\triangle$ і U є взаємно транспонованими, то всі наведені вище твердження можна відповідно сформулювати і для рівнянь $U^m T = TU^n$.

Зауваження 3. Як і в [5] (для простору A_{R_1}), при $m = n$ можна повністю охарактеризувати всі ізоморфізми простору $\overline{A}_{R_2}$, переставні з $\triangle^p$, $p \in \mathbb{N}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Линчук С.С. О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций. – Черновцы, 1982. 37с. Деп. в ВИНИТИ 13 апреля 1982, № 1798-82.
2. Нагнибіда М.І. *Про неперервні розв'язки деяких операторних рівнянь в аналітичних просторах* // Доповіді АН УРСР, сер.А. 1972. № 12. С.1082–1085.
3. Нагнибида Н.И. *Об условиях тривиальности одного класса операторов в аналитическом пространстве* // Укр. матем. журн. 1983. Т.35. № 2. С.241–245.
4. Ковдрыш В.Ф., Нагнибида Н.И. *О некоторых операторных уравнениях в классе непрерывных отображений аналитических пространств* // Укр. матем. журн. 1982. Т.34. № 2. С.208–211.
5. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. Проблема еквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. – Новосибирск: Наука. 1987. 280с.
6. Хапланов М.Г. *Линейные преобразования апналитических пространств* // Доклады АН СССР. 1951. Т.80. № 1. С.21–24.

274 022 м.Чернівці,

Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

Надійшло 12.10.94.