Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 517.5

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ПЕЛІ-ВІНЕРА

Б.В. Винницький

Abstract. B. Vinnitsky. *An extention of Paley-Wiener theorem* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.37–44.

Necessary and sufficient conditions are founded, under which values of the function f_1, $f_1(y)\exp(-\sigma|y|) \in L^p(-\infty,\infty)$, $1<p\leq 2$, $0\leq\sigma<+\infty$, can almost everywhere coincide with angular boundary values in image axis of any analytic in the right half plane function f such that

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2}\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\exp(-pr\sigma|\sin(\varphi)|)dr\}<+\infty.$$

In fact, a more general statement is proved.

Нехай $\mathbb{C}(\alpha,\beta)=\{z\in\mathbb{C}:\alpha<\arg z<\beta\}$, $0<\beta-\alpha<2\pi$, $\mathbb{C}_+=\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ і $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ – простір функцій, аналітичних у $\mathbb{C}(\alpha,\beta)$, для яких

$$||f||^p:=\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\Big\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p dr\Big\}<+\infty,\quad p\geq 1. \tag{1}$$

Якщо $\alpha=-\pi/2$ і $\beta=\pi/2$, то $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ співпадає з простором Харді $H^p(\mathbb{C}_+)$ в правій півплощині [1] (випадок $p=2$ див. в [2]). Добре відомо ([3, с.20], [4, с.69, 93], [5, с.162]), що значення функції $f_1\in L^p(-\infty,+\infty)$, $1\leq p\leq 2$, можуть майже всюди (м.в.) співпадати з кутовими граничними значеннями деякої функції $f\in H^p(\mathbb{C}_+)$ на уявній осі тоді й тільки тоді, коли її обернене перетворення Фур'є

$$\widehat{f_1}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)e^{i\tau y}dy$$

дорівнює нулю для м.в. $\tau\leq 0$. При вивченні деяких рівнянь згортки виникає потреба узагальнити це твердження на такі функції f_1, для яких $f_1(y)\exp(-\sigma|y|)$ $\in L^p(-\infty,+\infty)$, $0\leq\sigma<+\infty$. Сформулюємо відповідний результат в асиметричній формі, домноживши f_1 на цілу функцію $e^{i\sigma z}$. Нехай h – неперевна функція на $[-\pi/2,\pi/2]$ та $H^p(\mathbb{C}_+,h)$ – простір функцій, аналітичних у $\mathbb{C}_+$, для яких

$$||f||^p:=\sup_{|\varphi|<\pi/2}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\exp(-prh(\varphi))\right\}<+\infty. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D55.

Далі, нехай

$$h_1(\varphi) = \begin{cases} 0, & 0 \le \varphi \le \pi/2, \\ 2\sigma|\sin\varphi|, & -\pi/2 \le \varphi < 0, \end{cases} \qquad h_2(\varphi) = 2\sigma|\sin\varphi|,$$

а $L^p(h; -\infty, +\infty)$ – простір функцій f, для яких

$$||f||^p := \int_{-\infty}^{0} I f(y)|^p e^{pyh(-\pi/2)} dy + \int_0^{+\infty} |f(y)|^p e^{-pyh(\pi/2)} dy < +\infty.$$

Теорема 1. *Для того щоб значення функції $f_1 \in L^p(h_1, -\infty, +\infty)$, $1 < p \le 2$, м.в. співпадали з кутовими граничними значеннями деякої функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+, h_1)$ на уявній осі, необхідно і досить, щоб існувала така функція $f_2 \in H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$, що $f_3(y) := f_1(y) + f_2(iy) \in L^p(-\infty, 0)$ і*

$$F_1(\tau) + F_2(\tau) + F_3(\tau) = 0 \tag{3}$$

для м.в. $t \le 0$, де $f_2(iy)$ – кутові граничні значення f_2 на уявній осі (вони існують м.в.),

$$F_2(\tau) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{\tau u} du,$$

$$F_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f_1(v) e^{i\tau v} dv, \quad F_3(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f_3(v) e^{iv\tau} dv.$$

Зауваження 1. Із доведеної нижче леми 4 випливає, що у випадку $\sigma = 0$ і $1 < p \le 2$ теорема 1 рівносильна сформульованому вище результатові для $H^p(\mathbb{C}_+)$. Для $p = 1$ ми доведемо тільки необхідність і покажемо, що при виконанні умов теореми 1 існує аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція f, кутові граничні значення якої м.в. на уявній осі співпадають з $f_1(y)$, але не вміємо показати, що ця функція належить $H^1(\mathbb{C}_+, h_1)$ (для $\sigma = 0$ доведення цього факту є досить елементарним [5, с.15]).

1. Теорему 1 доведемо в п.2, а тут наведемо деякі властивості розглядуваних просторів. Простори $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$ для $p = 2$ вивчались в [2,6], а для інших $p \ge 1$ – в роботах [7–9], в яких показано, що ці простори є повними, функції f із $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$ мають м.в. на $\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta)$ кутові граничні значення, $f \in L^p(\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta))$ (вважаємо, що f природно визначена м.в. на $\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta)$), і введена раніше норма (1) на $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$ еквівалентна нормі:

$$||f||^p = \int_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)} |f(z)|^p |dz|,$$

а також справедлива наступна

Лема 1. *Якщо $f \in E_0^p[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$, $1 \le p < +\infty$, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)} \frac{f(w)}{z - w} dw = \begin{cases} f(z), & z \in \mathbb{C}(\alpha, \beta), \\ 0, & z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{C}}(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Лема 2. *Якщо* $f \in E_0^1[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, *то*

$$\int_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)} f(w)dw = 0.$$

Це твердження можна довести на основі леми 1, як і в [5, с.151] (завдяки [1] воно випливає також безпосередньо з відповідного результату для $H^p(\mathbb{C}_+)$).

Лема 3. *Якщо* $f \in E_0^1[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $-\pi/2 \le \alpha < \beta < \pi/2$, *то для всіх* $\tau \le 0$ *виконується*

$$\int_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)} f(w)e^{\tau w}dw = 0. \tag{4}$$

Справді, $f(w)e^{\tau w} \in E_0^1[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ для $\tau \le 0$.

Лема 4. *Якщо* $f \in E_0^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $1 < p \le 2$, $-\pi/2 \le \alpha < \beta \le \pi/2$, *то (4) виконується для м.в.* $\tau \le 0$ *(ліву частину (4) слід розуміти як суму двох інтегралів, взятих по сторонах кута, які для відповідних* α *та* β *існують у звичайному або в* L^q*-сенсі,* $1/p + 1/q = 1$*).*

Доведення. Будемо вважати, що $\alpha = 0$ і $\beta = \pi/2$. Нехай $\nu_k(z) = f(z)k/(k+z)$, $k \in \mathbb{N}$. З нерівності Гельдера випливає, що $\nu_k \in E_0^1[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$. Значить, за лемою 3

$$i\int_0^{+\infty} \nu_k(iv)e^{iv\tau}dv = \int_0^{+\infty} \nu_k(u)e^{\tau u}du, \quad \tau \le 0. \tag{5}$$

З іншого боку, $|k/(k+z)| \le 1$ для $z \in \mathbb{C}_+$. Тому $\nu_k \in E_0^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$. Таким чином, враховуючи вказану вище еквівалентність норм у $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ і теорему Лебега, для деякої сталої $c_1 > 0$ маємо

$$\lim_{k\to+\infty} ||\nu_k - f||^p \le c_1 \lim_{k\to+\infty} \max_{\varphi\in\{0,\pi/2\}} \left\{\int_0^{+\infty} \frac{|f(re^{i\varphi})|^p}{|re^{i\varphi}+k|^p}dr\right\} = 0.$$

Отже, $\nu_k \to f$ у $E_0^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ і, тим більше, в $L^p(0,+\infty)$ та $L^p(0,+i\infty)$. За теоремою Гаусдорфа-Юнг,

$$\int_0^{+\infty} \nu_k(iv)e^{iv\tau}dv \to \int_0^{+\infty} f(iv)e^{iv\tau}dv$$

(збіжність у $L^q(-\infty,0)$). Перетворення Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \nu_k(u)e^{\tau u}du$$

також є неперервним відображенням із $L^p(0,+\infty)$ у $L^q(-\infty,0)$ (це випливає, наприклад, із результатів робіт [1,10], а також [11]). Тому

$$\int_0^{+\infty} \nu_k(u)e^{\tau u}du \to \int_0^{+\infty} f(u)e^{\tau u}du$$

(збіжність у $L^q(-\infty,0)$ і поточкова) і, отже, потрібний висновок отримуємо з (5).

Розглянемо тепер простір $H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$. Якщо $f \in H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$, то, як і при доведенні леми 13 із [12], одержує-мо, що при $z \in \mathbb{C}_+$ виконується $|f(z)| \le c_1||f||\exp(c_1|z|)/\ (Re\, z)^{1/p}$, де стала $c_1 > 0$ від f і $z \in \mathbb{C}_+$ не залежить. Звідси випливає, що кожна фундаментальна в $H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$ послідовність (F_n) збігається рівномірно на компактах із $\mathbb{C}_+$. Крім цього, $f \in H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$ тоді й тільки тоді, коли f аналітична в $\mathbb{C}_+$, $f(z)\exp(2i\sigma z) \in E_0^p[\mathbb{C}(0, \pi/2)]$ та $f(z)\exp(-2i\sigma z) \in E_0^p[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}, 0)]$. На основі цього робимо висновок, що $H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$ – повний простір, функції f із $H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$ мають м.в. на уявній осі кутові граничні значення, $f(iy) \in L^p(h_2; -\infty, +\infty)$, і раніше визначена на ньому норма еквівалентна (насправді рівна [7, с.666, 670]) нормі:

$$||f||^p = \max_{\varphi \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-prh(\varphi)} dr \right\}. \tag{2'}$$

Аналогічно, простір $H^p(\mathbb{C}_+, h_1)$ також є повним, функції f із цього простору мають м.в. на уявній осі кутові граничні значення, $f(iy) \in L^p(h_1; -\infty, +\infty)$, і раніше визначена на ньому норма еквівалентна нормі, визначеній рівністю $(2')$, в якій слід h_2 замінити на h_1.

2. *Доведення теореми 1. Необхідність.* Оскільки $f \in E_0^p[\mathbb{C}(0, \pi/2)]$, $f(z)\exp(-2i\sigma z)$ належить $E_0^p[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}, 0)]$, то за лемою 4 для м.в. $\tau \le 0$ маємо

$$\int_{\partial\mathbb{C}(0,\pi/2)} f(w)e^{\tau w}dw + \int_{\partial\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2},0)} f(w)e^{-2i\sigma w}e^{\tau w} = 0,$$

звідки

$$-i\int_0^{+\infty} f(iv)\exp(iv\tau)dv + \int_0^{+\infty} f(u)\exp(\tau u)du -$$
$$i\int_{-\infty}^0 e^{2\sigma v} f(iv)e^{iv\tau}dv - \int_0^{+\infty} f(u)e^{-2i\sigma u}e^{\tau u}du = 0.$$

Взявши $f_2(w) = f(w)(e^{-2i\sigma w} - 1)$, одержуємо $f_2 \in H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$, $f(iy) + f_2(iy) \in L^p(-\infty, 0)$ і

$$i\int_0^{+\infty} f(iv)e^{iv\tau}dv + \int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du + i\int_{-\infty}^0 (f(iv) + f_2(iv))e^{iv\tau}dv = 0,$$

що завершує доведення необхідності (нагадаємо, що за умовою $f(iv) = f_1(v)$ для м.в. $v \in \mathbb{R}$).

Для доведення достатності покажемо, що

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f_1(v)dv}{iv - z} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{f_1(v) + f_2(iv)}{iv - z}dv - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{f_2(u)}{u - z}du - f_4(z), \tag{6}$$

де

$$f_4(z) = \begin{cases} 0, & z \in \mathbb{C}(0, \pi/2), \\ f_2(z), & z \in \mathbb{C}(-\pi/2, 0), \end{cases}$$

задовольняє потрібні вимоги. За лемою 1

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_2(iv)e^{2\sigma v}}{iv-z}dv-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)e^{-2i\sigma u}}{u-z}du=\begin{cases} e^{-2i\sigma z}f_2(z), & z\in\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2},0),\\ 0, & z\in\mathbb{C}(0,\frac{\pi}{2}).\end{cases}$$

Тому із (6) одержуємо, що

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_1(v)dv}{iv-z}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_1(v)+f_2(iv)}{iv-z}dv+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-2i\sigma(iv-z)}f_2(iv)}{iv-z}dv+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{(e^{-2i\sigma(u-z)}-1)f_2(u)du}{u-z}. \tag{7}$$

Звідси видно, що f аналітична в $\mathbb{C}_+$. Оскільки $f_1\in L^p(0,+\infty)$, $f_2\in L^p(0,+\infty)$, $f_1(v)+f_2(iv)\in L^p(-\infty,0)$ та $p>1$, то (див. [5, с.161], [7, с.668]) перший та другий інтеграли з правої частини (6) зображають функції, які належать $H^p(\mathbb{C}_+)$, а третій – функцію, яка належить класам Харді H^p у верхній і нижній півплощинах. Тому, використовуючи вже згадані результати з [1], легко переконуємось, що функція (6) належить $H_p(\mathbb{C}_+,h_1)$. Залишилось показати, що кутові граничні значення f на уявній осі м.в. співпадають з $f_1(y)$. Із умови (3) одержуємо

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-\tau z}(F_1(\tau)+F_2(\tau)+F_3(\tau))d\tau=0,\quad \operatorname{Re}z<0. \tag{8}$$

Але за теоремою Фубіні,

$$\int_{-\infty}^{0}F_2(\tau)e^{-\tau z}d\tau=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}f_2(u)du\int_{-\infty}^{0}e^{\tau(u-z)}d\tau=$$
$$=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u-z}du,\quad \operatorname{Re}z<0. \tag{9}$$

Справедливими також є наступні рівності:

$$\int_{-\infty}^{0}F_1(\tau)e^{-\tau z}d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_1(v)}{iv-z}dv,\quad \operatorname{Re}z<0, \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{0}F_3(\tau)e^{-\tau z}d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv-z}dv,\quad \operatorname{Re}z<0. \tag{11}$$

Для доведення (10) скористатись зразу теоремою Фубіні не можна. Але в правій частині (10) стоїть функція, аналітична поза проміжком $[0,+\infty)$, а в лівій – аналітична в лівій півплощині. Тому (10) досить довести для $z=x<0$. Оскільки $f_1\in L^p(0,+\infty)$ то [10] $F_1\in E_0^q[\mathbb{C}(0,\pi)]$, $1/p+1/q=1$, і тому $F_1\in E_0^q[\mathbb{C}(\frac{3\pi}{4},\pi)]$. Отже, $F_1(\tau)e^{-\tau x}\in E_0^q[\mathbb{C}(0,\pi)]$. Тому за лемою 2

$$\int_{\partial\mathbb{C}(3\pi/4,\pi)}F_1(\tau)e^{-\tau x}d\tau=0,\quad x<0.$$

Значить, за теоремою Фубіні

$$\int_{-\infty}^{0} F_1(\tau)e^{-\tau x}d\tau = -\int_{0}^{+\infty\exp(i3\pi/4)} F_1(\tau)e^{-\tau x}d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{f_1(v)}{iv-x}dv,$$

звідки випливає (10), а (11) доводиться аналогічно. Із (8)–(11) одержуємо, що для $z \in \mathbb{C}_+$ виконується

$$0 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f_1(v)}{iv+\overline{z}}dv - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_1(v)+f_2(iv)}{iv+\overline{z}}dv - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{f_2(u)du}{u+\overline{z}}.$$

Віднявши почленно цю рівність від рівності (6) для $z \in \mathbb{C}_+$, отримуємо

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{xf_1(v)dv}{(y-v)^2+x^2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x(f_1(v)+f_2(iv))}{(y-v)^2+x^2}dv - \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{f_2(u)xdu}{(u-z)(u+\overline{z})} - f_4(z). \tag{12}$$

Третій інтеграл із правої частини (12) дорівнює нулю всюди на уявній осі за винятком, можливо, точки $z = 0$. Кутові граничні значення першого інтеграла на додатному промені уявної осі м.в. рівні [5, с.136] $f_1(y)$, а на від'ємному – 0. Аналогічно, кутові граничні значення другого інтеграла на додатному промені уявної осі м.в. рівні 0, а на від'ємному – $f_1(y) + f_2(iy)$. Тому кутові граничні значення f на уявній осі м.в. рівні $f_1(y)$ і теорему 1 доведено.

Зауваження 2. Із леми 3 випливає, що необхідна частина теореми 1 справедлива і, коли $p = 1$. Тоді функція f, визначена рівністю (6), також є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і її кутові граничні значення на уявній осі м.в. рівні $f_1(y)$, проте нам не вдається показати, що $f \in H^1(\mathbb{C}_+, h_1)$. Справа в тому, що тепер інтеграли із правої частини (6) не обов'язково належать класам Харді H^1 у відповідних півплощинах. Не допомагає і формула (12), оскільки виникають труднощі, пов'язані з оцінкою третього інтегралу. Можна також переконатись, що для $z \in \mathbb{C}_+$ виконується

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f_1(v)xdv}{(y-v)^2+x^2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{(f_1(v)+f_2(iv))xdv}{(y-v)^2+x^2} -$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{xf_2(iv)e^{-2i\sigma(iv-z)}}{(y-v)^2+x^2}dv + \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{xf_2(u)(e^{-2i\sigma(u-z)}-1)}{(u-z)(u+\overline{z})}du,$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f_1(v)xdv}{(y-v)^2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{(f_1(v)+f_2(iv))x}{(y-v)^2+x^2}dv+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} f_2(iv)\Big(\frac{e^{-2i\sigma(iv-z)}}{iv-z} - \frac{e^{-2i\sigma(iv+z)}}{iv+\overline{z}}\Big)dv + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} f_2(u)\Big(\frac{e^{-2i\sigma(u-z)}}{u-z} - \frac{e^{-2i\sigma(u+\overline{z})}}{u+\overline{z}}\Big)du,$$

але і цими формулами нам також не вдається скористатись.

Зазначимо також, що при доведенні достатньої частини теореми 1 ніде не використовувалась аналітичність f_2 в $\mathbb{C}(0, \pi/2)$, а використовувалось тільки те, що якщо $f_2 \in H^p(\mathbb{C}_+, h_2)$, то $f_2(z)e^{-2i\sigma z} \in E_0^p[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}, 0)]$. Тому справедлива наступна

Теорема 2. *Для того щоб значення функції $f_1 \in L^p(h_1; -\infty, +\infty)$, $1 < p \leq 2$, м.в. співпадали з кутовими граничними значеннями деякої функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+, h_1)$ на уявній осі, необхідно й досить, щоб існувала така функція f_2, для якої $f_2(z)e^{-2i\sigma z} \in E_0^p[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}, 0)]$, $f_1(y) + f_2(iy) \in L^p(-\infty, 0)$ і виконується (3) для м.в. $\tau \leq 0$.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Седлецкий А.М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. 1975. Т.96/138/. № 1. С.75–82.
2. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления в комплексной области. – М.:Наука. 1966. 671с.
3. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. – М.:Наука. 1964. 267с.
4. Гарнет Дж. Ограниченные аналитичесие функции. – М.:Мир. 1984. 470с.
5. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М.:Мир. 1984. 368с.
6. Држбашян М.М., Мартиросян В.М. *Теоремы типа Винера-Пэли и Мюнца-Саса* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т.44. № 1. С.868–894.
7. Левин Я.Б., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных класов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т.39. № 3. С.657–702.
8. Григорян Ш.А. *О базисности неполных систем рациональных функций в угловой области* // Изв. АН Армянской ССР. матем. 1978. Т.12. № 5–6. С.460–487.
9. Мартиросян В.М. *Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловой области* // Изв. АН Армянской ССР. матем. 1978. Т.12. № 5–6. С.460–487.
10. Doetsch G. *Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Function als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation* // Math. Zeit. 1937. V.42. P.263–286.
11. Benedetto J.J., Heinig H.P. *Weighted Hardy spaces and the Laplace transform* // Lect. Notes. Math. 1983. V.992. P.240-277.
12. Винницький Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. 1994. Т.46. № 5. С.484–500.

Department of Mathematics and Physics,
Drohobych Pedagogical Institute, Streyska 3,
Drohobych, 293720, Ukraine.

Надійшло 5.05.94.