Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 517.524

ПАРАБОЛІЧНА ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Д.І. Боднар, Х.Й. Кучмінська

Abstract. D.I.Bodnar, Kh.Yo.Kuchmins'ka. *Parabolic convergence region for two-dimensional continued fractions* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.29–36.

Using the element region and value region techniques and the stability property of branched continued fractions the analogy of the parabolic convergence region for two-dimensional continued fractions is established.

Найбільш загальний алгоритм, що використовується для розкладу функцій у неперервні дроби, базується на принципі відповідності степеневих рядів і неперервних дробів. Двовимірні неперервні дроби (ДНД), які досліджуються в запропонованій роботі, виникли в результаті розв'язання проблеми відповідності для подвійних степеневих рядів [5,7]. У статті [3] запропоновано конкретний огляд результатів, що стосуються, зокрема, двовимірних узагальнень неперервних дробів.

Дослідження параболічних областей збіжності для неперервних дробів започатковані в середині XX століття. Найповніше огляд отриманих результатів наведено в монографіях [4,6]. В цій роботі доводиться двовимірний аналог параболічної теореми для неперервних дробів (див. [8, Теор. 14.2; 14.3]).

Розглянемо двовимірний неперервний дріб (ДНД) вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = b_{ii} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \tag{1}$$

з комплексними елементами a_{ij}, b_{ij}, $i,j = 0,1,\dots$ [4].

Означення. Послідовності непорожніх множин $\Omega_{ij} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ та $V_{ij} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $i,j = 0,1,\dots$, називаються послідовностями областей елементів і послідовностями областей значень для ДНД (1), якщо

$$\begin{aligned} t_{ij}(v_{i+1,j}) &= \frac{a_{ij}}{b_{ij} + v_{i+1,j}} \subset V_{ij} \qquad, i > j, \\ t_{ij}(v_{i,j+1}) &= \frac{a_{ij}}{b_{ij} + v_{i,j+1}} \subset V_{ij} \qquad, i < j, \\ t_{ii}(v_{i+1,i}, v_{i,i+1}, v_{i+1,i+1}) &= \frac{a_{ii}}{b_{ii} + v_{i+1,i} + v_{i,i+1} + v_{i+1,i+1}} \subset V_{ii} \end{aligned} \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B70, 40A15.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX для довільних $< a_{ij}, b_{ij} > \in \Omega_{ij}$, $v_{ij} \in V_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots$.

Використовуючи апарат областей елементів і областей значень та деякі результати з теорії неперервних дробів і теорії функцій, встановимо аналог теореми про параболічну область збіжності для ДНД (1) [2,4,8].

Лема 1. *Нехай $\{V_{nm}\}$ - послідовність півплощин*

$$V_{nm} = \{w : \mathrm{Re}(w \exp(-i\psi_{nm})) \geq -p_{nm}\} \tag{3}$$

і

$$\begin{aligned}\Omega_{nm} = \{< a_{nm}, b_{nm} >: |a_{nm}| - \mathrm{Re}(a_{nm} \exp(-i\psi^*_{nm})) \leq \\ 2p_{nm}[\mathrm{Re}(b_{nm} \exp(-i\varphi^*_{nm})) - p^*_{nm}]\},\end{aligned} \tag{4}$$

де $n, m = 0, 1, \ldots$; $p_{nm} > 0$; $\psi_{nn} = \psi_{n-1,n} = \psi_{n,n-1}$; $-\pi < \psi_{nm} \leq \pi$;

$$p^*_{nm} = \begin{cases} p_{n+1,m}, & \textit{якщо } n > m, \\ p_{n,m+1}, & \textit{якщо } n < m, \\ p_{n+1,n} + p_{n,n+1} + p_{n+1,n+1}, & \textit{якщо } n = m; \end{cases}$$

$$\psi^*_{nm} = \begin{cases} \psi_{nm} + \psi_{n+1,m}, & \textit{якщо } n > m, \\ \psi_{nm} + \psi_{n,m+1}, & \textit{якщо } n < m, \\ \psi_{nm} + \psi_{n+1,n+1}, & \textit{якщо } n = m; \end{cases}$$

$$\varphi^*_{nm} = \begin{cases} \psi_{n+1,m}, & \textit{якщо } n > m, \\ \psi_{n,m+1}, & \textit{якщо } n < m, \\ \psi_{n+1,n+1}, & \textit{якщо } n = m. \end{cases}$$

Тоді $\{V_{nm}\}$ є послідовністю областей значень, що відповідають послідовності областей елементів $\{\Omega_{nm}\}$.

Доведення. Умови

$$\mathrm{Re}(b_{nm} \exp(-i\varphi^*_{nm})) \geq p^*_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

необхідні для того, щоб $\Omega_{nm} \neq \varnothing$. Якщо справджується умова (5), то нерівності (4) виконуються, коли $a_{nm} = 0$ і тому $\Omega_{nm} \neq \varnothing$.

Нехай

$$\mathrm{Re}(b_{nm} \exp(-i\varphi^*_{nm})) = p^*_{nm}. \tag{6}$$

Тоді

$$t_{nm}(V^*_{nm}) = \{w : \mathrm{Re}(w \exp(i(\varphi^*_{nm} - \arg a_{nm}))) \geq 0\},$$

де

$$V^*_{nm} = \begin{cases} V_{n+1,m}, & \text{якщо } n > m, \\ V_{n,m+1}, & \text{якщо } n < m, \\ V_{n+1,n} + V_{n,n+1} + V_{n+1,n+1}, & \text{якщо } n = m. \end{cases}$$

Якщо виконуються рівності (6), область (4) буде непорожньою множиною лише в тому випадку, коли $\arg a_{nm} = \varphi^*_{nm} + \psi_{nm}$. Це забезпечує необхідні включення для областей значень (2).

Нехай

$$\operatorname{Re}(b_{nm}\exp(-i\varphi_{nm}^*)) > p_{nm}^*.$$

Тоді

$$t_{nm}(V_{nm}^*) = \{w \in \mathbb{C} : |w - c_{nm}| < \rho_{nm}\},$$

де

$$\rho_{nm} = \frac{|a_{nm}|}{2[\operatorname{Re}(b_{nm}\exp(-i\varphi_{nm}^*)) - p_{nm}^*]}, \quad c_{nm} = \rho_{nm}\exp(i(\arg a_{nm} - \varphi_{nm}^*)).$$

Тому умова (2) виконуватиметься, якщо $c_{nm} \in V_{nm}$ і для відстані від точки c_{nm} до границі області V_{nm} виконується нерівність

$$\operatorname{dist}(c_{nm}, \partial V_{nm}) \geq \rho_{nm}.$$

Підставляючи значення c_{nm} у (3), отримуємо нерівність

$$-\operatorname{Re}(a_{nm}\exp(-i\psi_{nm}^*)) \leq 2p_{nm}[\operatorname{Re}(b_{nm}\exp(-i\varphi_{nm}^*)) - p_{nm}^*],$$

яка випливає з (4). Позначивши через d_{nm} точку з границі ∂V_{nm}, для якої

$$|d_{nm} - c_{nm}| = \operatorname{dist}(c_{nm}, \partial V_{nm}),$$

неважко перевірити, що

$$d_{nm} = \exp(-i\psi_{nm})[-p_{nm} + i\operatorname{Im}(c_{nm}\exp(-i\psi_{nm}))]$$

і

$$|d_{nm} - c_{nm}| = \rho_{nm}\cos(\arg a_{nm} - \psi_{nm}^*) + p_{nm}.$$

Нерівність $|d_{nm} - c_{nm}| \geq \rho_{nm}$ еквівалентна (4). Лему доведено.

Області елементів для ДНД

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{1}, \tag{7}$$

наберуть вигляду $\Omega_{nm} = E_{nm} \times \{1\}$, де непорожні множини $E_{nm} \subset \mathbb{C}$.

Наслідок. *Множини*

$$V_{nm} = \begin{cases} \{w : \operatorname{Re} w \geq -\frac{2-\sqrt{2}}{4}\}, & \text{якщо } n \neq m, \\ \{w : \operatorname{Re} w \geq -\frac{\sqrt{2}}{4}\}, & \text{якщо } n = m, \end{cases}$$

$$E_{nm} = \{w : |w| - \operatorname{Re} w \leq \frac{1}{4}\}$$

є відповідними областями значень і областями елементів ДНД (7).

Зауважимо, що E_{nm} – це параболічні області.

Для доведення теореми про параболічну область збіжності для двовимірних неперервних дробів скористаємось властивістю стійкості неперервних дробів [1]:

Лема 2. *Нехай*

$$h_k = \overset{k-1}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \frac{1}{b_i} \tag{8}$$

– неперервний дріб з додатними елементами. При обчисленні елементів b_i допущені відносні похибки δ_i. Якщо $\widehat{b_i} > 0$ – наближені значення b_i відповідно, то абсолютна величина відносної похибки при обчисленні дробу (8) не перевищує

$$|\delta(h_k)| \leq \max\{|\delta_{2r}/(1+\delta_{2r})|, |\delta_{2r+1}| : 0 \leq r \leq [(k-1)/2]\},$$

причому $\delta_{2n+1} = 0$, якщо $k = 2n$.

Використовуючи методику доведення леми 2 [1] для ДНД, отримаємо лему.

Лема 3. *Нехай*

$$f_{2k} = \overset{k-1}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\Phi_i^{(2k-2i-1)}}, \quad \Phi_i^{(m)} = \alpha_{ii} + \overset{m}{\underset{j=1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\alpha_{i+j,i}} + \overset{m}{\underset{j=1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\alpha_{i,i+j}} \tag{9}$$

– двовимірний неперервний дріб з додатними елементами. При обчисленні елементів α_{ij}, $i,j = 0,1,\ldots$, допущені відносні похибки δ_{ij}. Якщо $\widehat{\alpha}_{ij} > 0$ – наближені значення α_{ij}, то абсолютна величина відносної похибки при обчисленні дробу (9) не перевищує величини

$$|\delta(f_{2k})| \leq \max\{|\delta^*_{ij}| : 0 \leq i,j \leq 2k-1,\ i+j = 2k-1\},$$

де

$$\delta^*_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{якщо } \max(i,j) \text{ є непарним,} \\ \delta_{ij}/(1+\delta_{ij}), & \text{якщо } \max(i,j) \text{ є парним.} \end{cases}$$

Лема 4. *Двовимірний неперервний дріб з додатними елементами*

$$\overset{\infty}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = \alpha_{ii} + \overset{\infty}{\underset{j=1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\alpha_{i+j,i}} + \overset{\infty}{\underset{j=1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\alpha_{i,i+j}}, \tag{10}$$

збіжний, якщо ряди $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ij}$, $j = 1,2,\ldots$, $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij}$, $i = 1,2,\ldots$, $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ii}$ розбіжні.

Доведення. Неперервні дроби, з яких складаються Φ_i, згідно з критерієм Зейделя збіжні. Розглянемо неперервний дріб

$$\overset{\infty}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\Phi_i}, \tag{11}$$

де Φ_i – сума значень неперервних дробів, що входять у (10). Дріб (11) буде збіжним згідно з умовами леми.

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне як завгодно мале число, тоді існує такий номер k, що $|g_{k-1} - g_k| < \varepsilon/2$ (g_k – k-й підхідний дріб неперервного дробу (11)). Отже, для довільних $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ виконується нерівність

$$\left| \frac{1}{\Phi_0 + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-2} + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \alpha}}} - \frac{1}{\Phi_0 + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-2} + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \beta}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Позначимо n-й підхідний дріб ДНД (9) через f_n, а через $f_{k,n}$ – фігурний підхідний дріб ДНД (10) вигляду

$$f_{k,n} = \cfrac{1}{\Phi_0 + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{k-1} + \cfrac{1}{\Phi_k^{(n-2k-1)} + \ddots + \cfrac{1}{\Phi_{[(n-1)/2]}^{(n-2[(n-1)/2]-1)}}}}}.$$

Виберемо номер n, $n > k$, настільки великим, щоб виконувались нерівності

$$\left|\frac{\Phi_{2r}^{(n-4r-1)} - \Phi_{2r}}{\Phi_{2r}^{(n-4r-1)}}\right| < \frac{\varepsilon}{2f_{k,n}}, \quad \left|\frac{\Phi_{2r+1}^{(n-4r+1)} - \Phi_{2r+1}}{\Phi_{2r+1}^{(n-4r+1)}}\right| < \frac{\varepsilon}{2f_{k,n}}, \tag{13}$$

де $0 \le r \le [(k-1)/2]$. Оцінимо зверху

$$|f_n - g_n| \le |f_n - f_{k,n}| + |f_{k,n} - g_n|.$$

Згідно з (12) маємо $|f_{k,n} - g_n| < \varepsilon/2$. Використовуючи лему 2 і нерівності (13), де $f_{k,n}$ – точний, а f_n – наближений дроби, отримуємо $|f_n - f_{k,n}| < \varepsilon/2$. Лема доведена.

ТЕОРЕМА. *Нехай елементи a_{nm} ДНД (7) належать області*

$$P_\varepsilon = \{w : |w| - \operatorname{Re} w \le \frac{1-\varepsilon}{4}\}, \tag{14}$$

де ε – як завгодно мале дійсне число, $0 < \varepsilon < 1$, $a_{00} = 1$.

Тоді

1. *ДНД (7) збіжний, якщо є розбіжними ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{p+i,i}|^{-1/2}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} |a_{i,r+i}|^{-1/2}, i = 0, 1, \dots,$$

для всіх індексів p і r таких, що $a_{p+i,i} \ne 0$, $i = 0, 1, \dots$, $a_{i,r+i} \ne 0$, $i = 0, 1, \dots$, і є розбіжним ряд $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pp}|^{-1/2}$, якщо всі $a_{pp} \ne 0$.

2. *Область значень ДНД (7) належить кругу*

$$|z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}. \tag{15}$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо теорему Стілтьєса-Віталі [4]:

Нехай $F = \{f_m(z), z \in D, m = 1, 2, \dots\}$ – послідовність голоморфних функцій в області $D \subset \mathbb{C}$ таких, що $f_m(z) \ne a$, $f_m(z) \ne b$ для всіх $z \in D$, $m = 1, 2, \dots$, де a, b – комплексні числа ($a \ne b$). Нехай $\Delta \subset D$ – нескінченна множина точок, що має хоча б одну граничну точку, що належить D. Якщо послідовність F збігається до скінченного значення при всіх $z \in \Delta$, то вона рівномірно збіжна до голоморфної функції в D на кожному компакті області D.

У нашому випадку функції $f_m(z)$ – підхідні дроби деякого функціонального двовимірного неперервного дробу з частинними знаменниками, що дорівнюють одиниці, та частинними чисельниками, які отримуємо з елементів ДНД (7) наступним чином. Кожний відмінний від нуля елемент a_{nm} ДНД (7) запишемо у вигляді $a_{nm} = |a_{nm}| \exp(i\alpha_{nm})$, де $-\pi < \alpha_{nm} \le \pi$. В області

$$\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \delta, \quad |\operatorname{Re} z| < 1 + \delta\},$$

де δ – довільне дійсне додатнє число, таке, що

$$(1+\delta)^2 \exp(\pi\delta) < (1-\varepsilon)^{-1}, \tag{16}$$

розглянемо функції

$$a_{nm}(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_{nm} = 0, \\ |a_{nm}| \exp(i\alpha_{nm} z), & \text{якщо } a_{nm} \ne 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що $a_{mn}(z) \in P_0$, якщо $z \in \Omega_\delta$. Нехай $a_{mn} \in P_\varepsilon$, $\alpha_{nm} \ne 0$, $z = x + iy$, тоді

$$|a_{nm}(z)| - \operatorname{Re} c_{nm}(z) = |a_{nm}| \exp(-\alpha_{nm} y)(1 - \cos \alpha_{nm} x) \le \frac{1-\varepsilon}{2} \exp(\pi\delta) \frac{1 - \cos \alpha_{nm} x}{1 - \cos \alpha_{nm}}.$$

Дослідивши на екстремум функцію

$$M(\alpha_{nm}, x) = \frac{1 - \cos \alpha_{nm} x}{1 - \cos \alpha_{nm}}$$

в області $-\pi < \alpha_{nm} \le \pi$, $\alpha_{nm} \ne 0$, $|x| \le 1 + \delta$, отримаємо [2]

$$M(\alpha_{nm}, x) \le (1+\delta)^2.$$

Враховуючи (16), маємо

$$|a_{nm}(z)| - \operatorname{Re} a_{nm}(z) < \frac{1}{4}.$$

Розглянемо ДНД

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}(z)}{\Phi_i(z)}, \quad \Phi_i(z) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}(z)}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}(z)}{1}. \tag{17}$$

З наслідку леми 1 отримаємо, що область значень ДНД

$$a_{11}(z) \left(\Phi_1(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=2}^{\infty} \frac{a_{ii}(z)}{\Phi_i(z)} \right)^{-1}$$

належить півплощині $\operatorname{Re} z > -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Оскільки областю значень $\Phi_0(z)$ є півплощина $\operatorname{Re} z > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то значення оберненого дробу до ДНД (17) належать півплощині $\operatorname{Re} z > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тому значення підхідних дробів ДНД (17) належать кругу $|z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}$. Позначимо n-ий підхідний дріб ДНД (17) через f_n, очевидно,

$f_n(z)$ – голоморфні функції в області Ω_δ. Для цієї послідовності виконуються умови теореми Стілтьєса-Віталі, де $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, |\operatorname{Im} z| < \delta\}$ і, наприклад, $a = -1$, $b = -2$.

Нехай $z \in \Delta$. Тоді ДНД (17) запишеться у вигляді

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{\widehat{a}_{ii}}{\widehat{\Phi}_i}, \quad \Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{\widehat{a}_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{\widehat{a}_{i,i+j}}{1}, \tag{18}$$

де

$$\widehat{a}_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_{nm} = 0, \\ |a_{nm}| \exp(-\alpha_{nm} y), & \text{якщо } a_{nm} \neq 0. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки: а) всі $a_{nm} \neq 0$; б) загальний випадок: $a_{nm} \in P_\varepsilon$.

Для $a_{nm} \neq 0$ також і всі $\widehat{a}_{nm} \neq 0$. Щоб дослідити збіжність ДНД (18), застосуємо Лему 4, тому, використовуючи еквівалентні перетворення [3], ДНД (18) приведемо до вигляду (10), де

$$\widehat{\alpha}_{nm} = \prod_{j=1}^{\min(m,n)} \widehat{a}_{jj}^{(-1)^{\max(m,n)+1-j}} \prod_{j=1}^{|n-m|} \widehat{a}_{\min(m,n)+(1-\delta)j, \min(m,n)+\delta j}^{(-1)^{|n-m|+1-j}},$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n > m, \\ 1, & \text{якщо } n < m. \end{cases}$$

З умови теореми випливає розбіжність рядів

$$\sum_{p=1}^{\infty} |\widehat{a}_{p+i,i}|^{-1/2}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} |\widehat{a}_{i,r+i}|^{-1/2}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |\widehat{a}_{pp}|^{-1/2}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Враховуючи нерівності між середнім геометричним і середнім арифметичним для сусідніх частинних знаменників і те, що $\widehat{\alpha}_{nm}\widehat{\alpha}_{n+1,m} = \widehat{a}_{n+1,m}^{-1}$, $\widehat{\alpha}_{nm}\widehat{\alpha}_{n,m+1} = \widehat{a}_{n,m+1}^{-1}$, $\widehat{\alpha}_{nn}\widehat{\alpha}_{n+1,n+1} = \widehat{a}_{n+1,n+1}^{-1}$, отримуємо умови Леми 4. Отже, ДНД (18) збіжний.

У загальному випадку деякі $a_{nm} = 0$, а отже і $\widehat{a}_{nm} = 0$. Розглянемо відношення $\widehat{a}_{nm}/Q_{nm}^{(s)}$, де

$$Q_{nm}^{(s)} = \begin{cases} 1 + \widehat{a}_{n+1,m}/Q_{n+1,m}^{(s-1)}, & \text{якщо } n > m, \\ 1 + \widehat{a}_{n,m+1}/Q_{n,m+1}^{(s-1)}, & \text{якщо } n < m, \\ \widehat{\Phi}_{nn}^{(s)} + \widehat{a}_{n+1,n+1}/Q_{n+1,n+1}^{(s-1)}, & \text{якщо } n = m, \end{cases}$$

для довільного $s \geq 1$, причому $Q_{nm}^{(0)} = 1$. Якщо $\widehat{a}_{nm} = 0$ для деяких n і m, то це відношення стає нулем, бо згідно з наслідком $Q_{nm}^{(s)} \neq 0$ і ДНД (18) перетворюється в дріб з прорідженими ланками з відмінними від нуля частинними чисельниками, для якого застосовна методика доведення збіжності попереднього випадку.

З теореми Стілтьєса-Віталі випливає, що ДНД (17) збіжний на кожному компакті області Ω_δ, зокрема в точці $z = 1$, що рівносильно збіжності ДНД (7). Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боднар Д.И. *Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей* // Цепные дроби и их применения. – Киев: Институт математики АН УССР. 1976. С.41–44.
2. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби, – Киев: Наукова думка, 1986. 176с.
3. Bodnar D., Kuchmins'ka Kh., Sus' O. *A survey of analytic theory of branched continued fractions* // Communications in the analytic theory of continued fractions. 1993. V.2. P.4–23.
4. Джоунс У. Трон В. Непрерывные дроби: аналитическая теория и приложения, – М.: Мир, 1985. 414с.
5. Кучмінська Х.Й. *Відповідний і приеднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду* // Доповіді АН УРСР. Сер.А. 1978. № 7. С.614–617.
6. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications, – Amsterdam: Elsevier Publishers B.V., 1992. 606p.
7. Murphy J.A., O'Donohoe M. *A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction* // Journ. Comp. and Appl. Math. 1978. V.4. № 3. P.181–190.
8. Wall H.S. Analytic theory of Continued Fractions, – New York: Van Nostrand, 1948. 433p.

Інститут прикладних проблем механіки і математики,
НАН України, 290601, Львів, Наукова 3-Б

Надійшло 10.12.93.