Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 513.88

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Ю.Ф. Коробейник

Abstract. Yu.F. Korobeinik. *On analytic continuation of Dirichlet series* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.19–28.

One-dimensional and then many-dimensional Dirichlet series is investigated. It is supposed that this series converges uniformly on each compact of some convex domain D and its sum f admits an analytic continuation into the neighbourhood V of some point on ∂D. It is proved that f has an analytical continuation into convex domain $D_1 \supset D \cup V$. The methods of effective continuation of the function f are indicated.

В работе [1] довольно сложным путем с использованием операторов свертки, действующих на определенных классах гиперфункций, доказываются две теоремы об аналитическом продолжении ряда Дирихле. Пусть $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. Положим $\Omega_0(\delta) = \mathbb{C}$, $\Omega_0 = \Omega_0(0) = \mathbb{C}$; $\Omega_j(\delta) = \{z \in \mathbb{C} : \alpha_j \operatorname{Im} z - \beta_j \operatorname{Re} z > \delta\}$, $\Omega_{l,k}(\delta) = \Omega_l(\delta) \cap \Omega_k(\delta)$; $\Omega_j = \Omega_j(0)$; $\Omega_{l,k} = \Omega_l \cap \Omega_k$; $k, l = 0, 1, 2$. Главным результатом [1] является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательности комплексных чисел с такими свойствами:*
1) $(\forall n \geq 1)$, $\lambda_n \neq 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$;
2) $(\exists c > 0)$ $(\forall n, m \geq 1)$ $\quad |\lambda_n - \lambda_m| \geq c|n - m|$;
3) имеется конечное число векторов e_k, $1 \leq k \leq p$, на единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта K из $S^1 \backslash (e_k)_{k=1}^p$ найдется номер $n(\varepsilon, K)$, для которого

$$\inf \left\{ \left| \frac{(\operatorname{Re} \lambda_n, \operatorname{Im} \lambda_n)}{|\lambda_n|} - e \right| : n \geq n(\varepsilon, K), e \in K \right\} > \varepsilon.$$

Предположим, что для некоторых l и k, $0 \leq l$, $k \leq 2$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\{i\lambda_n z\} \tag{1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B40, 30B50.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного Научного Фонда Сороса и Российской Академии Естественных наук,

сходится равномерно на каждом компакте из $\Omega_{l,k}$, *и пусть* $f(z)$ – *сумма ряда (1). Допустим, что функцию* f *можно продолжить аналитически в область* $\Omega_{l,k} \cup K_r$, *где* $r > 0$, $K_r = \{z : |z| < r\}$. *Тогда существует* $\mu > 0$ *такое, что* f *аналитически продолжается в область* $\Omega_{l,k}(-\mu)$.

В данной работе получен результат более сильный, чем теорема 1, и притом при менее ограничительных предположениях. То же относится и к многомерному результату [1] – теореме 2, которая также существенно усиливается. Метод, примененный в настоящей статье, отличен от использованного в [1] и основан на хорошо ивестных свойствах рядов Дирихле.

Если выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$, то (см., например, [2, с.196]) область сходимости ряда (1) совпадает с областью абсолютной сходимости и является выпуклой, причем внутри этой области ряд (1) сходится равномерно. Далее, справедлива

Теорема Полиа ([2, с.206; 3]). *Пусть ряд (1) сходится в некоторой окрестности точки* $z_0 \in \mathbb{C}$ *к функции* $f(z)$ *и пусть выполнено условие 1). Тогда функция* f *всюду однозначна и ее полная (вейерштрассова) область существования* W_f *выпукла.*

Применим теорему Полиа к ситуации, рассмотренной в [1].

Предложение 1. *Пусть числа* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условию 1) и пусть при некоторых* l, k, *где* $0 \le l,\ k \le 2$ *ряд (1) сходится в* $\Omega_{l,k}$ *к функции* f, *допускающей при некоторых* $r > 0$ *аналитическое продолжение в область* $\Omega_{l,k} \cap K_r$. *Тогда* $(\exists \mu > 0)$: f *аналитически продолжается в* $\Omega_{l,k}(-\mu)$.

Доказательство. По теореме Полиа функция f продолжается аналитически в выпуклую область $\mathrm{conv}(\Omega_{l,k} \cup K_r)$. Непосредственное геометрическое рассмотрение показывает, что $\mathrm{conv}(\Omega_{0,k} \cup K_r) = \Omega_k(-r)$; $\mathrm{conv}(\Omega_{l,l} \cup K_r) = \Omega_l(-r)$.

Наконец, если $l \ne k$ и $1 \le l,\ k \le 2$, то $\Omega_{l,k}(-r\cos\alpha) \subset \mathrm{conv}(\Omega_{l,k} \cup K_r)$, где 2α – величина угла между прямыми $\alpha_j \operatorname{Im} z - \beta_j \operatorname{Re} z = 0$, $j = l, k$, ограничивающими угловую область $\Omega_{l,k}$.

Предложение 1 показывает, что довольно обременительные и громоздкие условия 2), 3) теоремы 1 из [1] на самом деле излишни.

И в теореме 1, и в предложении 1 не указан метод эффективного продолжения f в более широкую область $\Omega_{l,k}(-\delta)$. Это можно сделать, воспользовавшись одним результатом А.Ф. Леонтьева [4]. Положим

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left\{\frac{\lambda}{\lambda_k}\right\}^2\right), \quad L_n(\lambda) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 + \left\{\frac{\lambda}{\lambda_k}\right\}^2\right).$$

При условии 1) функции L и L_n принадлежат классу $[0,1]$ целых функций минимального типа при порядке 1 (см., напр., [2]). Согласно [4] (см. также [2, теор. 3.15]), если выполнены предложения теоремы Полиа, то равномерно внутри области W_f

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} c_k L_n(i\lambda_k) \exp\{i\lambda_k z\}. \tag{2}$$

В частности, в условиях предложения 1 эффективное аналитическое продолжение f в область $\Omega_{l,k}(-\mu)$ осуществляется с помощью соотношения (2).

Наконец, интересно выяснить, когда в предположениях предложения 1 продолжение f осуществляется с помощью самого исходного ряда.

Назовем последовательность $(i\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ регулярной, если любой ряд (1) сходится равномерно внутри полной области голоморфности W_f его суммы f. Очевидно, что если $(i\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ – регулярная последовательность и если сумма f любого ряда вида (1) аналитически продолжается в какую-либо область, более широкую, чем первоначально известная область сходимости ряда, то ряд на самом деле сходится и в этой, более широкой, области.

Введем следующие пространства:

1) пространство $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ Фреше всех аналитических в области $\mathcal{G}$ функций, с топологией равномерной сходимости на компактах $\mathcal{G}$;
2) пространство $[1,\sigma)$ всех целых функций экспоненциального типа, у которых степень (тип) $< \delta$, где $0 < \delta \leq \infty$;
3) пространство $\mathcal{E}_\sigma$ числовых последовательностей $(d_k)_{k=1}^{\infty}$ таких, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |d_k|^{1/k} < \sigma.$$

Предложение 2. *Пусть числа λ_k попарно различны и*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k} = 0. \tag{3}$$

Тогда следующие утверждения равносильны:

А) последовательность $(i\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ регулярна;

Б) интерполяционная задача (ин. з.)

$$\mathcal{G}(i\lambda_k) = d_k, \quad k = 1, 2\ldots \tag{4}$$

разрешима в $[1,r)$ для любой последовательности $(d_k)_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{E}_r$, каково бы ни было $r \in (0,+\infty)$.

Доказательство. Условимся говорить в случае, когда ин.з. (4) разрешима в $[1,r)$ для любой последовательности из $\mathcal{E}_r$, что ин.з. $([1,r);\mathcal{E}_r)$ разрешима.

А)$\Rightarrow$Б). Возьмем любое $R < \infty$ и, положив $K_R = \{z : |z| < R\}$, рассмотрим множество T_R всех функций $v(z)$, представимых в виде сходящегося в $\mathcal{H}(K_r)$ ряда

$$v(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp\{i\lambda_m z\}. \tag{5}$$

Заметим, прежде всего, что из условия (3) следует (см. [2, с.222–227]) существование последовательности функций $(\psi_m(z))_{m=1}^{\infty}$, аналитических в области $|z| > 0$, исчезающих на бесконечности и таких, что $(\forall j, k \geq 1)$

$$\int\limits_{\Gamma} \exp\{i\lambda_k z\} \cdot \psi_j(z) dz = \delta_{k,j},$$

где $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера и Γ – любая спрямляемая жорданова кривая, содержащая внутри себя начало координат. Ясно, что если $\mathcal{G}$ – любая односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат, то система $(\psi_j(z))_{j=1}^{\infty}$

биортогональна с $\mathcal{E}x_\lambda = (\exp\{i\lambda_k z\})_{k=1}^\infty$ в $\mathcal{H}(\mathcal{G})$. Следовательно, если функция $v(z)$ является суммой ряда (5), сходящегося в $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, где $\mathcal{G}$ – любая область, содержащая начало координат, то такое представление единственно. Более того, так как включения $0 \in \mathcal{G}$ можно всегда добиться линейной заменой $z = w + z_0$, не изменяющей вида ряда (5), то единственность представления имеет место для любой области $\mathcal{G}$.

Очевидно, что T_R является подпространством $\mathcal{H}(K_R)$, инвариантным относительно дифференциирования. Покажем, что T_R имеет простой спектр, совпадающий с $(i\lambda_m : m = 1, 2, \dots)$. Допустим, что $\exp\{\lambda z\} \in T_R$ при некотором $\lambda \neq i\lambda_m$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\exp\{\lambda z\} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \exp\{i\lambda_m z\}.$$

Дифференцируя, получим

$$\lambda \exp\{\lambda z\} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m i\lambda_m \exp\{i\lambda_m z\}.$$

Кроме того,

$$\lambda \exp\{\lambda z\} = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} b_m \exp\{\lambda_m z\},$$

откуда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m(\lambda - \lambda_m i) \exp\{i\lambda_m z\} = 0$ и $b_m = 0$, $m = 1, 2, \dots$, что невозможно.

Так как T_R – инвариантное относительно дифференцирования подпространство $\mathcal{H}(K_R)$ с простым спектром $(\lambda_m)_{m=1}^\infty$, то применима теорема 26 из [5, с.18], согласно которой ин.з. (4) разрешима в $([1, R); \mathcal{E}_R)$.

Б)⇒А). Пусть ряд (5) сходится в каком-либо круге $|z - z_0| < r$, $0 < r < \infty$. Произведя, если нужно, замену $z = w + z_0$, всегда можно добиться того, чтобы $z_0 = 0$. Тогда $v \in T_r$. Так как, по предположению, ин.з. (4) разрешима в $([1, r); \mathcal{E}_r)$, то по той же теореме 26 из [5] ряд (5) сходится равномерно внутри полной области существовании W_v функции v. Таким образом, $(i\lambda_m)_{m=1}^\infty$ – регулярная последовательность.

Приведем теперь условия разрешимости ин.з. (4) в $([1, r); \mathcal{E}_r)$. Положим

$$\Phi_n(z) = \prod_{|\lambda_s - \lambda_n| < \delta|\lambda_n|} (1 - \frac{z}{\lambda_s}), \quad 0 < \delta < 1.$$

Согласно [6], ин.з. (4) разрешима в $([1, r); \mathcal{E}_r)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |\Phi'_n(\lambda_n)| = 0. \tag{6}$$

Из более поздних результатов А.В. Братищева [7] следует, что при выполнении (3) условие разрешимости ин.з. (4) в $([1, r); \mathcal{E}_r)$, равносильное (6), можно представить в таком виде:

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{N_{i\lambda_n}(h|\lambda_n|)}{|\lambda_n|} = 0. \tag{7}$$

Здесь $0 < h < 1$; $N_z(\delta) = \int\limits_0^\delta \frac{n_z(x)-n_z(0)}{x}dx$; $n_z(x)$ – число элементов множества $\Lambda = \{i\lambda_k : k = 1, 2, \dots\}$, лежащих в круге $|w - z| \le x$.

Укажем одно простое условие, обеспечивающие (7). Пусть последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Оценим сверху величину $n_{i\lambda_n}(t)$ при $n \ge 1$, $t \ge 0$. Пусть $|i\lambda_s - i\lambda_n| \le t$. Тогда $c|n - s| \le t$ и $n_{i\lambda_n}(t) \le \dfrac{2t}{c}$. Кроме того, из 2) следует, что $\gamma := \inf\{|i\lambda_m - i\lambda_n| : m \ne n\} > 0$, и $\forall h > 0$ $\forall n \ge 1$

$$N_{i\lambda_n}(h|]l_n|) = \int_\gamma^{h|\lambda_n|} \frac{n_{i\lambda_n}(t) - 1}{t}dt < \int_\gamma^{h|\lambda_n|} \frac{n_{i\lambda_n}(t)}{t}dt \le \frac{2h}{c}|\lambda_n|.$$

Таким образом, условие (7) выполнено, и последовательность $(i\lambda_n)_{n=1}^\infty$ регулярна. Мы получили такое дополнение к теореме Полиа и предложению 1:

Предложение 3. *Пусть последовательность $(i\lambda_n)_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1. Тогда ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри*

а) области W_f в предположениях теоремы Полиа;

б) области $\Omega_{l,k}(-\delta)$ в предположениях предложения 1.

Таким образом из выполнения условий 1) – 2) теоремы 1 следует справедливость более сильного утверждения, чем в этой теореме, а именно, абсолютная и равномерная сходимость исходного ряда (1) в области $\Omega_{l,k}(-\delta)$; при этом, довольно трудно проверяемое условие 3) оказывается излишним.

Остановимся еще на одном специальном случае, который нам понадобится далее при переходе к многомерной ситуации. Рассмотрим ряд (1) в случае, когда $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$. Из результатов старых работ [8], [9] (см. также, [2, с.197, теор. 3.1.3]) следует, что ряд (1) при условии 1) сходится абсолютно и равномерно внутри некоторой полосы $M_{\tau,\beta} : -\infty \le \tau < \operatorname{Im} z < \beta \le +\infty$ и расходится всюду вне замыкания этой полосы.

Положим $N_1 = \{n \ge 1 : \lambda_n \ge 0\}$, $N_2 = \{n \ge 1 : \lambda_n < 0\}$. Тогда, как легко проверить, ряд $\sum\limits_{n\in N_1} c_n \exp\{i\lambda_n z\}$ сходится абсолютно и равномерно внутри полуплоскости $\operatorname{Im} z > \tau$, а ряд $\sum\limits_{n\in N_2} c_n \exp i\lambda_n z$ – полуплоскости $\operatorname{Im} z < \beta$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau = 0$. Итак, пусть ряд (1), где $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и выполнены условия 1), сходится в полосе $M_{0,\beta}$ к фунцкии f. Тогда $\forall z \in M_{0,\beta}$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z); \quad f_j(z) = \sum_{n\in N_j} c_n \exp\{i\lambda_n z\}, \quad j = 1, 2.$$

Ясно, что при исследовании сходимости ряда (1) и аналитической продолжаемости его суммы вблизи линии $\operatorname{Im} z = 0$ достаточно рассмотреть только ряд $\sum\limits_{n\in N_1} c_n \exp\{i\lambda_n z\}$ и его сумму $f_1(z)$. Такие ряды изучались довольно давно. Приведем один из известных результатов. Предварительно перенумеруем числа λ_n, где $n \in N_1$, в виде последовательности $(\mu_m)_{m=1}^\infty$ и положим

$$L(\lambda) = \prod_{m=1}^\infty \left(1 + \left\{\frac{\lambda}{\mu_m}\right\}^2\right); \quad \delta = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{|\mu_m|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_m)|}.$$

Теорема В. Бернштейна ([10; 2, с.174]). *Если $\delta = 0$, то последовательность $(i\mu_m)_{m=1}^{\infty}$ регулярна.*

Как показано в [10], $\delta = 0$, если, в частности, $\inf\{\mu_{m+1} - \mu_m : m \geq 0\} > 0$ (последовательность $\mu_m = \lambda_{n_m}$ занумерована в порядке возрастания λ_{n_m}). Сформулируем теперь некоторые следствия предложения 3.

Следствие 1. *Пусть ряд (1), в котором $\lambda_m \in \mathbb{R}$ и выполнено условие 1), сходится к $f(z)$ в полосе $M_{0,\beta}$, $0 < \beta \leq +\infty$, и пусть последовательность $(i\mu_m)_{m=1}^{\infty} = \{i\lambda_{n_m} : n_m \in N_1\}$ регулярна. Тогда ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри максимальной полосы голоморфности функции $f(z)$:*

$$\gamma < \operatorname{Im} z < \delta, \quad \text{где} \ \gamma \leq 0, \quad \delta \geq \beta.$$

Следствие 2. *Пусть ряд (1), в котором $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и выполнено условие 1), сходится в полосе $M_{0,\beta}$, $0 < \beta \leq +\infty$, к функции $f(z)$, допускающей аналитическое продолжение в круг $|z| < r$. Предположим, что последовательность $(i\mu_m)_{m=1}^{\infty} = \{i\lambda_{n_m} : n_m \in N_1\}$ регулярна. Тогда ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри полуполосы $-r < \operatorname{Im} z < \beta$.*

Напомним, что если

$$\inf\{|\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m}| : n_m, n_{m+1} \in N_1\} > 0$$

и, подавно, если

$$\inf\{|\lambda_n - \lambda_m| : n, m \geq 1, n \neq m\} > 0, \tag{8}$$

то последовательность $(i\mu_m)_{m=1}^{\infty}$ регулярна.

Очевидно, что ограничение (8) слабее условия 2) теоремы 1.

Следствие 3. *Пусть ряд (1) сходится к $f(z)$ в полосе $0 < \operatorname{Im} z < \beta$, и пусть $f(z)$ допускает аналитическое продолжение в круг $|z| < r$. Пусть, далее, числа λ_m таковы, что*

a) $(\forall n \geq 1) \quad \lambda_n \in \mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\lambda_n} = 0$;

c) $\inf\{|\lambda_n - \lambda_m| : n, m \geq 1, n \neq m\} > 0$.

Тогда ряд (1) сходится абсолютно и равномерно внутри полосы $-r < \operatorname{Im} z < \beta$.

Переходя к многомерным рядам Дирихле, отметим вначале, что они по ряду своих свойств схожи с одномерными рядами. В частности, справедлив такой, по-видимому, известный результат, который является аналогом давней теоремы E. Hille для одномерного ряда Дирихле [8] и доказывается точно так же (для одномерного случая доказательство приведено в [2, с.194]).

Лемма 1. *Множество точек абсолютной сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\bigl(i \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} z_k\bigr), \quad \lambda_{n,k} \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

выпукло.

Для упрощения формулировок ограничимся случаем двумерного ряда Дирихле ($n = 2$) с комплексными показателями

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(i\lambda_k z_1 + \sigma_k z_2), \quad \lambda_k, \sigma_k \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Для любой области G из $\mathbb{C}$ положим $G^c = \operatorname{conv} G$.

Предложение 4. *Пусть для ряда (10) выполнены условия*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sigma_n} = 0. \tag{11}$$

Пусть, далее, последовательности $(i\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(i\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ регулярны. Предположим еще, что ряд (10) сходится в области $G_1 \times G_2$ к функции $f(z_1, z_2)$, допускающей аналитическое продолжение в $G_3 \times G_4$, где $G_k \subset G_{k+2}$, $k = 1, 2$, и G_j – области в $\mathbb{C}$, $1 \le j \le 4$. Пусть, наконец, области G_1 и G_2 выпуклы. Тогда ряд (10) сходится абсолютно в области $D = \operatorname{conv}\big((G_3^c \times G_2) \cup (G_1 \times G_4^c)\big)$ и функция $f(z_1, z_2)$ аналитически продолжается в эту область.

При доказательстве используется лемма 1, теорема 3.2.1 из [2], теорема Гартогса, а также следуещее утверждение.

Лемма 2. *Пусть ряд (10) при условиях (11) сходится в $G_1 \times G_2$, где G_j – произвольная область в $\mathbb{C}$, $j = 1, 2$. Тогда этот ряд сходится абсолютно в области*

$$\operatorname{conv}\big((G_1^c \times G_2) \cup (G_1 \times G_2^c)\big).$$

Доказательство. При любом фиксированном z_2 из G_2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k \exp\{i\lambda_k z_1\}$, где $d_k = c_k \exp\{i\sigma_k z_2\}$, сходится в G_1. По теореме 3.1.2 из [2] этот ряд сходится в G_1 абсолютно. По теореме E. Hille он сходится абсолютно в G_1^c. Точно так же устанавливается, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \exp\{i\sigma_k z_2\}$, где $b_k = c_k \exp\{i\lambda_k z_1\}$ $\forall k \ge 1$, и z_1 – произвольная зафиксированння точка из G_1, сходится абсолютно в G_2^c. Следовательно, ряд (10) сходится абсолютно на множестве $\operatorname{conv}\big((G_1^c \times G_2) \cup (G_1 \times G_2^c)\big)$, и остается применить лемму 1.

Доказательство предложения 4. Для любого фиксированного $z_1 \in G_1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \times \exp\{i\sigma_k z_2\}$, где $b_k = c_k \exp\{i\lambda_k z_1\}$, $k = 1, 2, \ldots$, согласно предположению сходится в области G_2 к функции $f(z_1, z_2)$, допускающей аналитическое продолжение в G_4. В силу регулярности $(i\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно внутри G_4. По лемме 2 ряд (10) сходится абсолютно в $G_1 \times G_4^c$. Точно так же этот ряд сходится абсолютно в $G_3^c \times G_2$, а следовательно, по лемме 2 и в области D. Таким образом, его сумма $f(z_1, z_2)$ определена в D.

Пусть теперь $(z_1^0, z_2^0) \in D$, $T = \{(z_1, z_2) : |z_1 - z_1^0| < r_1, |z_2 - z_2^0| < r_2\}$ – бикруг, лежащий в D, $K_1 = \{z_1 : |z_1 - z_1^0| < r_1\}$, $h_k = c_k \exp\{i\lambda_k z_1^1\}$, $k = 1, 2, \ldots$, где z_1^1 – произвольно зафиксированная точка из K_1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \exp\{i\sigma_k z_2\}$ сходится абсолютно в $K_2 = \{z_2 : |z_2 - z_2^0| < r_2\}$. В силу (11) применима теорема 3.2.1

из [2], согласно которой этот ряд сходится равномерно внутри K_2. Поэтому функция $f(z_1^1, z_2)$ при любом z_1^1 из K_1 аналитична по z_2 в K_2. Точно так же $f(z_1, z_2^1)$ аналитична по z_1 в K_1 при любом фиксированном z_2^1 из K_2. По теореме Гарторгса $f(z_1, z_2)$ голоморфна в области D.

Рассмотрим в качестве примера ряд Дирихле с чисто мнимыми показателями (только такая модельная ситуация и была рассмотрена в [1]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(i\lambda_k z_1 + \sigma_k z_2), \quad \lambda_k, \sigma_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Положим

$$\begin{gathered} K_{r,j} = \{z_j : |z_j| < r\}, \quad K_r = K_{r,1} \times K_{r,2}; \\ G_j(r) = \{z_j : r < \operatorname{Im} z_j < \beta\} : \quad G_j = G_j(0); \\ G(r) = G_1(r) \times G_2(r); \quad G = G_1 \times G_2 \end{gathered}$$

при $j = 1, 2$; $r \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0, +\infty)$.

Предложение 5. *Пусть для ряда (12) выполнены следующие условия:*
1)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\sigma_k} = 0; \tag{13}$$

2) последовательности $(i\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(i\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ регулярны;

3) ряд (12) сходится равномерно внутри G к функции $f(z_1, z_2)$, допускающей аналитическое продолжение в область $G \cup K_r$. Тогда функция f аналитически продолжается в область $T = \bigcup_{0\le\alpha\le1} G_1(-\alpha r) \times G_2(-(1-\alpha)r)$ посредством ряда (12), который сходится абсолютно в этой области.

Доказательство. Так как $G \cup K_r \supset (G_1 \cup K_{r,1}) \times G_2$, то по предложению 4 функция $f(z_1, z_2)$ аналитически продлолжается в область $T_1 := \operatorname{conv}\big(((G_1 \cup K_{r,1})^c \times G_2) \cup G_1 \times G_2\big) = G_1(-r) \times G_2$; причем ряд (12) сходится абсолютно в T_1. Аналогично из соотношения $G \cup K_r \supset G_1 \times (G_2 \cup K_{r,2})$ получаем, что $f(z_1, z_2)$ аналитически продолжается в область $T_2 := G_1 \times G_2(-r)$ посредством ряда (12), абсолютно сходящегося в этой области. По лемме 1 ряд (12) сходится абсолютно в области

$$\operatorname{conv}(T_1 \cup T_2) = \bigcup_{o\le\alpha\le1} G_1(-\alpha r) \times G_2(-(1-\alpha)r) = T.$$

Используя те же рассуждения, что и в конце доказательства предложения 4, с помощью теоремы Гартогса получаем, что $f(z_1, z_2)$ аналитична в области T.

Следствие. *Пусть для ряда (12) выполнены условие (13) и следующие условия:*

$$\inf_{n\ne m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0, \quad \inf_{n\ne m} |\sigma_n - \sigma_m| > 0.$$

Пусть, далее, выполнено условие 3) предложения 5. Тогда функция $f(z_1, z_2)$ аналитически продолжается в область T, причем ряд (12) сходится абсолютно в этой области.

Таким образом, мы получили (для двумерной ситуации) усиление теоремы 2 из [1]. Именно, предположение 2) этой теоремы

$$\inf\left\{\frac{|\lambda_m - \lambda_n|}{|m-n|} : m \neq n\right\} > 0; \quad \inf\left\{\frac{|\sigma_m - \sigma_n|}{|m-n|} : m \neq n\right\} > 0$$

заменено более "мягким" условием (14); аналитическое продолжение $f(z_1, z_2)$ гарантируется не в область $G_1(-\frac{r}{2}) \times G_2(-\frac{r}{2})$, а в более широкую область T. Кроме того, получено утверждение об абсолютной сходимости исходного ряда (12) в области T (и, тем более, в $G_1(-\frac{r}{2}) \times G_2(-\frac{r}{2})$), отсутствующее в теореме 2 из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kawai T. *The Fabry-Ehreenpreis gap theorem and linear differential equations of infinite order* // Journal of Mathematics. 1987. V.109. P.57–64.

2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976.

3. Polya G. *Eine Verallegemeinerung des Fabryschen Lückensatzes* // Nachr. Gessell. Wiss. Göttingen. 1927. P.187–195.

4. Леонтьев А.Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения. – М.: Труды Матем. ин-та им.В.А. Стеклова. 1951. Т.39.

5. Коробейник Ю.Ф. *Об одной двойственной задаче. II. Приложения к LN^*-пространствам и другие вопросы* // Матем. сборн. 1975. Т.98. № 1. С.3–26.

6. Братищев А.В. Кратная интерполяционная задача в пространствах целых функций и ее приложене в теории базиса. – Дисс. канд. физ.-мат. наук, Ростов-на-Дону, 1976. 102с.

7. Братищев А.В. *Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т.48. № 3. С.451–475.

8. Hille E. *Note on Dirichet series with complex exponents* // Ann. of Mathem. 1924. V.25. P.261–278.

9. Лунц Г.Л. *Об одном классе обобщенных рядов Дирихле* // Успехи матем. наук. 1957. Т.12. вып.3. С.173–179.

10. Bernstein V. Lecons sur les progres récents de la theorie series de Dirichlet. – Paris, 1933.

Ростовский госуниверситет.

Получено 7.02.94.