Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 512.745

ФІНІТАРНА ГРУПА БІРАЦІОНАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ НЕСКІНЧЕННО-ВИМІРНОГО АФІННОГО ПРОСТОРУ НАД ЛОКАЛЬНО СКІНЧЕННИМ ПОЛЕМ

В.İ. Сущанський, Н.В. Крошко

Abstract. V. Sushchansky, N. Kroshko. *Finitary group of birational authomorphisms of infinite dimensional affine space over locally finite field* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.5–12.

It was proved, that finitary group of birational authomorphisms of infinite-dimensional affine space over a locally finite field is isomorphic to the limit group of a direct spectrum of symmetric groups Sp^k, $k \in \mathbb{N}$, with diagonal embeddings, and its subgroups of triangular or unitriangular transformations can be factorized to the wreath product of infinite series of symmetric or cyclic groups of degree p respectively.

1. Останнім часом значне число робіт різних авторів (див. напр. [1–3]) присвячено дослідженню фінітарних груп перетворень: фінітарної симетричної групи та фінітарних лінійних груп над різними полями. Поняття фінітарності перетворення може бути природно введене й у багатьох інших ситуаціях: для груп автоматних підстановок, груп ізометрій деяких типів метричних просторів, груп автоморфізмів дерев і т.п. Безпосереднім узагальненням цього поняття є його перенесення на випадок груп бірацiональних автоморфізмів. Воно здійснюється таким способом. Нехай F – довільне поле, $A(F)$ – простір всіх нескінченних послідовностей над F. Перетворення $\varphi : A(F) \to A(F)$ раціональне, якщо існує нескінченний набір многочленів $< f_i(x_1, \dots, x_{n_i} >_{i\in\mathbb{N}}$ такий, що для довільної послідовності $t = (t_1, t_2, \dots) \in A(F)$ координати послідовності t^φ визначаються рівностями:

$$[t^\varphi]_i = f_i(t_1, \dots, t_{n_i}), \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Раціональне перетворення є бірацiональним автоморфізмом, якщо воно бі-є-ктивне й обернене до нього перетворення також є раціональним. Кожне перетворення є бірацiональним одночасно з оберненим, добуток бірацiональних перетворень знову буде бірацiональним, тобто всі бірацiональні автоморфізми простору $A(F)$ утворюють групу, яку позначатимемо $Bir\,A(F)$.

Перетворення $\varphi \in Bir\,A(F)$ називатимемо фінітарним, якщо існує натуральне число $k = k(\varphi)$ таке, що при будь-якому виборі $x \in A(F)$ послідовності x і x^φ відрізняються не більше ніж k своїми першими координатами.

Всі фінітарні перетворення утворюють підгрупу в групі $Bir\,A(F)$, яку позначатимемо $\overline{Bir}\,A(F)$. Метою роботи є дослідження будови групи $\overline{Bir}\,A(F)$,

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20B99, 20E99.

коли F є локально скінченним полем. А саме, встановлено, що незалежно від локально скінченного поля F група $\overline{Bir}\, A(F)$ ізоморфна $\varkappa$-однорідно симетричній групі в розумінні [4], де $\varkappa =< p, p, \cdots >$, а p – характеристика поля F. Звідси дістаємо, що $\overline{Bir}\, A(F)$ при $p = 2$ є простою, а при $p \neq 2$ має лише один нетривіальний нормальний дільник індекса 2, який є простою групою.

Показано, що підгрупи трикутних та так званих унітрикутних перетворень групи $\overline{Bir}\, A(F_p)$ є вінцевими добутками спеціального типу, побудованими з симетричних груп степеня p чи відповідно регулярних циклічних груп степеня p, причому друга з цих підгруп є силовською p-підгрупою як в першій з них, так і в самій групі $\overline{Bir}\, A(F_p)$.

2. Нехай F_q – скінченне поле з q елементів, $q = p^m$. Довільна функція від n змінних над $F(q)$ може бути завдана деяким многочленом. Два многочлени $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ і $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ завдають ту ж функцію, якщо вони є конгруентними за модулем ідеала $\mathcal{I}_n$, породженого многочленами $x_1^q - x_1,\ x_2^q - x_2, \ldots, x_n^q - x_n$. Фактор-кільце $F_q^r[x_1, \ldots, x_n] = F_q[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}_n$ кільця многочленів $F_q[x_1, \ldots, x_n]$ за модулем ідеала $\mathcal{I}_n$ називається (див., напр. [5]) кільцем редукованих многочленів від n змінних над F_q. Отже, кожна функція над F_q завдається деяким редукованим многочленом із відповідною кількістю невідомих, причому цей многочлен визначається за даною функцією однозначно. Звідси дістаємо лему.

Лема 1. *Кожне перетворення $y \in Bir\, A(F)$ однозначно завдається набором $< f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) >_{i \in \mathbb{N}}$ редукованих над полем F_q многочленів. Перетворення φ буде фінітарним у тому й лише в тому разі, коли існує таке число k, що для всіх $l \geq k$ виконуються рівності $f_l(x_1, \ldots, x_{n_l}) = x_l$.*

Символом $A^n(F_q)$ позначимо n-вимірний афінний простір над F_q. Біраціональні автоморфізми цього простору завдаються наборами $< f_1, f_2 \ldots, f_n >$ редукованих многочленів із $F_q^r[x_1, \ldots, x_q]$ над F_q.

Лема 2. *Група $Bir\, A^n(F_q)$ біраціональних автоморфізмів простору $A^n(F_q)$ ізоморфна (як група підстановок) симетричній групі на множині $A^n(F_q)$.*

Доведення. Довільне перетворення простору $A^n(F_q)$ завдається набором n функцій від n змінних над полем F_q. Оскільки кожна така функція однозначно завдається деяким редукованим многочленом із $F_q^r[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, то будь-яке перетворення множини $A^n(F_q)$ завдається набором редукованих многочленів із $F_q^r[x_1, \ldots, x_n]$. А тому в даному разі біраціональність перетворення рівнозначна його бієктивності. Звідси й дістаємо потрібне.

Завдамо ін'єкцію ψ_n групи $Bir\, A^n(F_q)$ у групу $Bir\, A^{n+1}(F_q)$:

$$\psi_n(< f_1, \ldots, f_n >) =< f_1, \ldots, f_n, x_{n+1} > . \tag{2}$$

Для довільного n завдане рівністю (2) відображення ψ_n є ізоморфним зануренням групи $Bir\, A^n(F_q)$ у групу $Bir\, A^{n+1}(F_q)$, тобто отримуємо прямий спектр груп

$$< Bir\, A^n(F_q), \psi_n >_{n \in \mathbb{N}} . \tag{3}$$

Лема 3. *Виконується ізоморфізм груп підстановок*

$$\varinjlim_{n} < Bir\, A^n(F_q), \psi_n > \simeq \overline{Bir}\, A(F_q). \tag{4}$$

Доведення. За кожною ниткою з граничної групи прямого спектру (3) однозначно визначається нескінченний набір редукованих многочленів майже всі координати якого збігаються з відповідними невідомими. Тим самим завдано відображення цієї групи на групу $\overline{Bir}\,A(F_q)$, яке є ізоморфізмом. Отже, виконується співвiддношення (4).

Тому група $\overline{Bir}\,A(F_q)$ є об'єднанням зростаючого ланцюга підгруп, кожна з яких ізоморфна симетричній групі на q^n символах для певного $n \in \mathbb{N}$.

3. Для фіксованого натурального числа r, $r > 1$, гомоморфізм

$$d^r : S_n \to S_{nr} \tag{5}$$

симетричної групи степеня n (яка діє на множині $\{1, 2, \dots, n\}$) в симетричну групу степеня nr (яка діє на множині $\{1, 2, \dots, nr\}$) назвемо дублюванням кратності r, якщо образом довільної підстановки $\pi \in S_n$ при цьому гомоморфізмі буде підстановка $d^r\pi$, яка діє на числа $l = kn + i$, $0 \le k \le r - 1$, $1 \le i \le n$, із інтервалу $\{1, 2, \dots, nr\}$ за формулою:

$$(d^r\pi)(l) = kn + \pi(i). \tag{6}$$

Відображення (5) є діагональним зануренням групи S_n у пряму суму $S_n^{(1)} \oplus \dots \oplus S_n^{(r)}$ симетричних груп S_n, які діють відповідно на множинах $\{ni+1, \dots, ni+n\}$, $0 \le i \le r-1$. Нехай $\chi =< k_0, k_1, \cdots >$ – нескінченна послідовність натуральних чисел, $k_i > 1$ при $i > 0$, $\widetilde{k}_i = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Означення. χ-спектром симетричних груп назвемо прямий спектр

$$< S_{\tilde{k}_i}, d^{k_{i+1}} >_{i \in \mathbb{N}} . \tag{7}$$

Граничну групу спектру (7) називатимемо χ-однорідно симетричною групою та позначатимемо $S(\chi)$.

Гранична група не змінюється при вилученні початкового відрізка χ-спектру. Далі, для зручності розглядатимемо лише ті χ-спектри, для яких $k_0 = 1$, і характеризуватимемо їх послідовностями $< k_1, k_2, \cdots >$.

Лема 4. [4]. *Для довільної послідовності $\chi =< k_1, k_2, \cdots >$ відмінних від одиниці натуральних чисел існує така послідовність $\Delta =< p_1, p_2, \cdots >$ простих чисел, що справджується рівність $S(\chi) = S(\Delta)$.*

З цієї леми випливає, що χ-однорідно симетричні групи досить розглядати лише для послідовностей простих чисел. Для того щоб за даною послідовністю $\chi =< k_1, k_2, \cdots >$ побудувати відповідну їй послідовність простих чисел, треба кожне число k_i розкласти на добуток простих множників і замінити i-й член послідовності χ кортежем, координати якого є простими множниками k_i (з урахуванням їх кратностей), що розташовані в деякому порядку. В результаті такої заміни дістаємо послідовність $\varkappa$ простих чисел, компоненти якої розбиваються на окремі частини так, що добуток простих чисел із i-ї частини дорівнює k_i.

Теорема 1. *Для довільного q, $q = p^m$, група фінітарних бірацiональних автоморфізмів $\overline{Bir}\,A(F_q)$ ізоморфна (як група підстановок) $\varkappa$-однорідно симетричній групі $S(\varkappa)$, де $\varkappa =< p, p, \cdots >$.*

Доведення. Як встановлено вище, група $\overline{Bir}\,A(F_q)$ є об'єднанням зростаючого ланцюга підгруп $Bir\,A^n(F_q)$, причому $Bir\,A^n(F_q) \simeq S_{q^n}$. Пересвідчимось, що занурення $\psi_n : Bir\,A^n(F_q) \to Bir\,A^{n+1}(F_q)$ для довільного $n \in \mathbb{N}$ є не що інше, як дублювання кратності q. Нехай $\varphi =< f_1, f_2, \dots, f_n >$ – деяке перетворення з

$Bir\,A^n(F_q)$. Тоді $\psi_n(\varphi) =< f_1, f_2, \ldots, f_n, x_{n+1} >$ не змінює $(n+1)$-у координату довільного кортежа із $A^{n+1}(F_q)$. Для довільного $t \in F_q$ покладемо

$$U^{n+1}(t) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in A^{n+1}(F_q) | x_{n+1} = t\}.$$

Родина підмножин $U^{n+1}(t)$, $t \in F_q$, утворює розбиття множини $A^{n+1}(F_q)$, яке інваріатне щодо дії підстановки $\psi_n(\varphi)$. На кожній компоненті цього розбиття підстановка $\psi_n(\varphi)$ діє однаково. Більш точно, зафіксуємо деяке впорядкування $t_1, t_2, \ldots, t_q$ елементів поля F_q і певний перелік $x_1, x_2, \ldots, x_{q^n}$ елементів $A^n(F_q)$. Тоді елементи множини $A^{n+1}(F_q)$ можна впорядкувати так:

$$(x_1, t_1), (x_2, t_1), \ldots, (x_{q^n}, t_1), \ldots, (x_1, t_q), \ldots, (x_{q^n}, t_q).$$

Перенумеруємо тепер елементи множин F_q, $A^n(F_q)$ та $A^{n+1}(F_q)$ згідно з вибраними впорядкуваннями. Дістанемо, що φ діє на множині $\{1, 2, \ldots, q^n\}$, $\psi_n(\varphi)$ – на множині $\{1, 2, \ldots, q^{n+1}\}$, розбиттю $A^{n+1}(F_q)$ на підмножини $U^{n+1}(t)$, $t \in F_q$, відповідає розбиття $\{kq^n + i | 1 \le i \le n\}$, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, множини $\{1, 2, \ldots, q^{n+1}\}$. Дія $\psi_n(\varphi)$ на елементи цієї множини визначається рівністю $\psi_n(\varphi)(l) = rq^n + \varphi(i)$, де $l = kq^n + i$, $0 \le k \le q-1$. Оскільки $\varphi \in Bir\,A^n(F_q)$ – довільне перетворення, то це означає, що занурення ψ_n є дублюванням кратності q групи $S(A^n(F_q))$ у групу $S(A^{n+1}(F_q))$. Тим самим, група $\overline{Bir}\,A(F_q)$ є об'єднанням зростаючого ланцюга симетричних груп, занурення яких є дублюваннями кратності q, тобто $\overline{Bir}\,A(F_q) \simeq S(\varkappa')$, де $\varkappa' =< q, q, \cdots >$. Замінюючи $\varkappa'$ на послідовність, складену з простих множників компонент $\varkappa'$, тобто на послідовність $\varkappa =< p, p, \cdots >$, за лемою 4 дістаємо співвідношення $S(\varkappa') \simeq S(\varkappa)$. Отже, $\overline{Bir}\,A(F_q) \simeq S(\varkappa)$, що й треба було довести.

Наслідок 1. *Для довільних q_1, q_2, де $q_1 = p^{m_1}$, $q_2 = p^{m_2}$, виконується співвідношення*

$$\overline{Bir}\,A(F_{q_1}) \simeq \overline{Bir}\,A(F_{q_2}). \tag{8}$$

Доведення. За теоремою 1 для довільного $q = p^m$ групи $\overline{Bir}\,A(F_q)$ та $\overline{Bir}\,A(F_p)$ є ізоморфними. Звідси і дістаємо співвідношення (8).

Наслідок 2. *При $p = 2$ група $\overline{Bir}\,A(F_q)$ є простою. Якщо ж $p \neq 2$, то група $\overline{Bir}\,A(F_q)$ містить єдиний нормальний дільник індекса 2, який збігається з її комутантом і є простою групою.*

Доведення. За наслідком 6.10 із [6] група $S(\varkappa)$, $\varkappa =< p, p, \cdots >$ є простою, коли $p = 2$, і містить єдиний нетривіальний нормальний дільник, який має індекс 2 в усій групі і сам є простою групою, коли $p \neq 2$. Зрозуміло, що цей нормальний дільник збігається з комутантом усієї групи. Враховуючи теорему 1, дістаємо потрібне твердження.

Теорема 2. *Нехай F – довільне локально скінченне поле характеристики p. Тоді група $\overline{Bir}\,A(F)$ ізоморфна групі $S(\chi)$.*

Доведення. Поле F є об'єднанням зростаючого ланцюга $F_{p^{n_1}} \subset F_{p^{n_2}} \subset \ldots$ скінченних полів:

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{p^{n_i}}.$$

А тому група $\overline{Bir}\,A(F)$ є об'єднанням зростаючого ланцюга груп $\overline{Bir}\,A(F_{p^{n_1}}) \subset \overline{Bir}\,A(F_{p^{n_2}}) \subset \ldots$:

$$\overline{Bir}\,A(F) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{Bir}\,A(F_{p^{n_i}}).$$

Кожна з груп $\overline{Bir}\,A(F_{p^{n_i}})$, в свою чергу, за лемою 3 є об'єднанням груп $\overline{Bir}\,A^n\times$ $\times(F_{p^{n_i}})$. Побудуємо новий зростаючий ланцюг груп:

$$\overline{Bir}\,A^1(F_{p^{n_1}})\subset\overline{Bir}\,A^2(F_{p^{n_2}})\subset\ldots.$$

Оскільки $\overline{Bir}\,A^k(F_{p^{n_l}})\subset\overline{Bir}\,A^s(F_{p^{n_s}})$, де $s=\max(k,l)$, для довільних натуральних k,l, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{Bir}\,A^i(F_{p^{n_i}})=\overline{Bir}\,A(F).$$

Але об'єднання з правої частини цієї рівності, як легко зрозуміти, ізоморфне групі $S(\chi)$. Теорему доведено.

З теореми 2 випливає, що вивчаючи групи $\overline{Bir}\,A(F)$ у класі локально скінченних полів, досить обмежитись випадком, коли $F=F_p$ є простим полем.

4. У загальному випадку досі не знайдено умов, які потрібно накласти на набір многочленів, щоб визначене ним перетворення було біраціональним. Проте для деяких типів перетворень такі умови вказати можна. Цим визначаються спеціальні підгрупи групи $\overline{Bir}\,A(F)$, дослідження будови яких відіграє важливу роль у теорії груп біраціональних перетворень.

Перетворення $\varphi\in Bir\,A(F)$ назвемо трикутним, якщо воно визначається "трикутним" набором многочленів, тобто при будь-якому $i\in\mathbb{N}$ многочлен f_i – i-та координата набору, що завдає φ згідно з рівністю (1), – залежить явно лише від i перших невідомих $x_1,x_2,\ldots,x_i$. Трикутне перетворення називатимемо унітрикутним, якщо воно завдається набором многочленів вигляду $<x_i+a_i(x_1,\ldots,x_{i-1})>_{i\in\mathbb{N}}$, де $a_1(x_0)=a_1\in F$, $a_i(x_{i-1})\in F[x_1,\ldots,x_{i-1}]$ (якщо F скінченне поле, то $a_i(x_{i-1})\in F^r[x_1,\ldots,x_{i-1}]$).

Лема 5. *Фінітарне трикутне перетворення над F_p, що завдається набором редукованих многочленів $<f_1(x_1),f_2(x_1,x_2),\cdots>$ є біраціональним тоді й тільки тоді, коли для довільного $i\geq 1$ при будь-якому виборі кортежа $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1})$ многочлен $f_i(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i)$ завдає підстановку над полем F_p. Кожне фінітарне унітрикутне перетворення біраціональне.*

Доведення. Фінітарне перетворення простору $A(F_p)$, яке завдається набором многочленів $<f_i>_{i\in\mathbb{N}}$ буде біраціональним у тому й лише в тому разі, коли його значимий початок $<f_1,f_2,\ldots,f_n>$ (такий, що n – найменше число, для якого $f_i=x_i$ при $i>n$) є біраціональним перетворенням $A^n(F_p)$. Біраціональність перетворення $<f_1,f_2,\ldots,f_n>$ рівносильна його бієктивності. А тому досить переконатися, що трикутне перетворення буде бієктивним тоді й лише тоді, коли воно задовольняє вимоги леми. Нехай $<f_1(x_1),f_2(x_1,x_2),\ldots,f_n(x_n)>$ – значимий початок заданого перетворення. Припустимо протилежне: для кожного з многочленів f_i, $1\leq i\leq n$, виконуються умови леми, але перетворення, яке завдається набором $<f_1,\ldots,f_n>$, не є бієктивним. Тоді воно не буде ні ін'єктивним, ні сюр'єктивним. Отже, існують різні кортежі $(a_1,\ldots,a_n)$ та $(b_1,\ldots,b_n)$ із $A^n(F_p)$ такі, що $(f_1(a_1),f_2(a_1,a_2),\ldots,f_n(a_1,\ldots,a_n))=(f_1(b_1),f_2(b_1,b_2),\ldots,f_n(b_1,\ldots,b_n))$. Це означає, що виконуються рівності

$$\begin{gathered}f_1(a_1)=f_1(b_1),\\ f_2(a_1,a_2)=f_2(b_1,b_2),\\ \ldots\ldots\\ f_n(a_1,\ldots,a_n)=f_n(b_1,\ldots,b_n).\end{gathered}$$

Нехай j – таке найменше число, що $a_j\neq b_j$. Тоді $f_j(a_1,\ldots,a_j)=f_j(a_1,\ldots,a_{j-1},b_j)$ і $f_j(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j)$ не завдає підстановку над F_p, що суперечить умові леми.

Отже, наше припущення було неправильним, і перетворення $< f_i >_{i\in\mathbb{N}}$ є бієктивним. З іншого боку, якщо це перетворення бієктивне, то бієктивним є і його значимий початок. А тому образи різних кортежів із $A^n(F_p)$ завжди будуть різними. Це означає, що для довільного j, $1 \leq j \leq n$, при будь-якому наборі кортежа $(a_1, \ldots, a_{j-1})$ і елементів $b, c \in F_p$ рівність $f_j(a_1, \ldots, a_{j-1}, b) = f_j(a_1, \ldots, a_{j-1}, c)$ є неможливою, тобто $f_j(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j)$ завдає підстановку над F_p; першу частину леми доведено. Для доведення другої частини досить переконатися, що для кожного унітрикутного перетворення існує обернене. Безпосередньо перевіряємо, що оберненим до перетворення $< x_1 + a_1, x_2 + a_2(x_1), x_3 + a_3(x_1, x_2), \cdots >$ буде перетворення $< x_1 - a_1, x_2 - a_2(x_1 - a_1), x_3 - a_3(x_1 - a_1, x_2 - a_2(x_1 - a_1)), \cdots >$. Лема доведена.

Добуток і обернене до трикутних чи унітрикутних перетворень знову будуть трикутними чи відповідно унітрикутними перетвореннями. А тому всі біраціональні трикутні (унітрикутні) перетворення простору $A(F_p)$ утворюють групу. Позначатимемо ці групи відповідно символами $Tbi\, A(F_p)$, $Ubi\, A(F_p)$. Зрозумілий зміст мають також позначень $Tbi\, A^n(F_p)$, $Ubi\, A^n(F_p)$. Підгрупи фінітарних перетворень у групах $Tbi\, A(F_p)$ та $Ubi\, A(F_p)$ позначатимемо як $\overline{Tbi}\, A(F_p)$ та $\overline{Ubi}\, A(F_p)$ відповідно. Ці групи допускають досить простий опис за допомогою загальної конструкції, яка є одним із варіантів вінцевого добутку цілком упорядкованої множини груп підстановок [7].

А саме, зрізаним вінцевим добутком за послідовністю груп підстановок (G_1, M_1), $(G_2, M_2), \ldots$ (коротко fl-вінцевим добутком) назвемо групу найможливіших нескінченних наборів (таблиць) вигляду

$$u = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \ldots], \tag{9}$$

де $g_1 \in G_1$, $g_i(\bar{x}_{i-1}) = g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in G_i^{M_1 \times \ldots \times M_{i-1}}$, $i = 2, 3, \ldots$, причому лише скінченне число координат набору (9) відмінне від тотожно рівних одиничній підстановці функцій. Таблиця (9) діє на елемент $(m_1, m_2, \ldots) \in M = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ за правилом

$$(m_1, m_2, m_3, \ldots)^u = (m_1^{g_1}, m_2^{g_2(m_1)}, m_3^{g_3(m_1, m_2)}, \ldots). \tag{10}$$

Звідси дістаємо, що добутком таблиць з координатами $g_i(\overline{x}_{i-1})$ та $h_i(\overline{x}_{i-1})$ буде таблиця з координатами

$$g_i(\overline{x}_{i-1}) \cdot h_i(x_1^{g_1}, x_2^{g_2(x_1)}, \ldots, x_{i-1}^{g_{i-1}(\overline{x}_{i-2})}), \tag{11}$$

а оберненою до таблиці з координатами $g_i(\bar{x}_{i-1})$ – таблиця з координатами

$$g_i^{-1}(x_1^{g_1^{-1}}, x_2^{g_2^{-1}(x_1^{g_1^{-1}})}, \ldots), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Таким чином, fl-вінцевий добуток – це група таблиць вигляду (9) з умовою обмеженості числа неодиничних координат, які діють на множині M за правилом (10), а дія множення і дія взяття оберненого елемента для них завдаються згідно з (11) і (12). fl-вінцевий добуток груп (G_1, M_1), $(G_2, M_2), \ldots$ можна визначити як підгрупу їх l-вінцевого добутку $\mathop{\S}\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i$ у розумінні [8]. Враховуючи це, позначатимемо цю конструкцію $\mathop{\overline{\S}}\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i$.

Теорема 3. *Група $\overline{Tbi}\,A(F_p)$ ізоморфна як група підстановок зрізаному вінцевому добутку $\overline{\underset{i\in\mathbb{N}}{\S}}\, S_p^{(i)}$ за послідовністю $S_p^{(1)},\ S_p^{(2)},\ldots$ симетричних груп степеня p, а її підгрупа $\overline{Ubi}\,A(F_p)$ – fl-вінцевому добутку $\overline{\underset{i\in\mathbb{N}}{\S}}\, C_p^{(i)}$ за послідовністю $C_p^{(1)},\ C_p^{(2)},\ldots$ регулярних циклічних груп. Підгрупа $\overline{Ubi}\,A(F_p)$ є силовською p-підгрупою в групах $\overline{Tbi}\,A(F_p)$ та $\overline{Bir}\,A(F_p)$.*

Доведення. За лемою 5 кожне перетворення $< f_1(x_1),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n) >$ із $Tbi\,A^n\times\times(F_p)$ визначає:
а) підстановку на множині F_p, що завдається многочленом $f_1(x_1)$;
б) функції, що визначені на множинах $F_p\times\ldots\times F_p$ (j разів), із значеннями в симетричній групі $S(F_p)$, $1\le j\le n-1$.

А тому таке перетворення є елементом n-кратного вінцевого добутку $\overset{n}{\underset{i=1}{\S}}\, S_p^{(i)}$ груп підстановок, кожна з яких ізоморфна (як група підстановок) симетричній групі $S(F_p)$. Сама ж група трикутних перетворень простору $A^n(F_p)$ збігається з цим вінцевим добутком. Зануренню (2) групи $Tbi\,A^n(F_p)$ в групу $Tbi\,A^{n+1}(F_p)$ відповідає природне занурення $\overset{n}{\underset{i=1}{\S}}\, S_p^{(i)}$ в $\overset{n+1}{\underset{i=1}{\S}}\, S_p^{(i)}$. Оскільки fl-вінцевий добуток є об'єднанням послідовності n-кратних вінцевих добутків із такими зануреннями, то звідси й дістаємо, що $\overline{Tbi}\,A(F_p)$ ізоморфна (як група підстановок) fl-вінцевому добутку $\overline{\underset{i\in\mathbb{N}}{\S}}\, S_p^{(i)}$.

Аналогічно, кожне унітрикутне перетворення $< x_1+a_1,\ldots,x_m+a_m(x_1,\ldots, x_{n-1}) >$ простору $A^n(F_p)$ однозначно характеризується таблицею$[a_1,a_2(x_1),\ldots, a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})]$, координати якої є редукованими многочленами над F_p з відповідним числом невідомих. Згідно з результатами [9] група таких таблиць є n-кратним вінцевим добутком $\overset{n}{\underset{i=1}{\S}}\, C_p^{(i)}$ регулярних циклічних груп. Об'єднання зростаючої послідовності таких вінцевих добутків є fl-вінцевим добутком $\overline{\underset{i\in\mathbb{N}}{\S}}\, C_p^{(i)}$. Враховуючи, що занурення $Ubi\,A^n(F_p)$ в $Ubi\,A^{n+1}(F_p)$ є природним зануренням $\overset{n}{\underset{i=1}{\S}}\, C_p^{(i)}$ в $\overset{n+1}{\underset{i=1}{\S}}\, C_p^{(i)}$, дістаємо, що $\overline{Ubi}\,A(F_p)$ ізоморфна (як група підстановок) $\overline{\underset{i\in\mathbb{N}}{\S}}\, C_p^{(i)}$.

При будь-якому n згідно з [9] вінцевий добуток $\overset{n}{\underset{i=1}{\S}}\, C_p^{(i)}$ є силовською p-підгрупою в симетричній групі S_{p^n}. За лемою 2 дістаємо, що $Ubi\,A^n(F_p)$ буде силовською p-підгрупою групи $Bir\,A^n(F_p)$ при кожному $n\in\mathbb{N}$, причому занурення $Ubi\,A^n(F_p)$ в $Ubi\,A^{n+1}(F_p)$ як вінцевих добутків індукується зануренням (2) $Bir\,A^n(F_p)$ в $Bir\times\times A^{n+1}(F_p)$. А тому підгрупа $\overline{Ubi}\,A(F_p)$ буде, як об'єднання зростаючого ланцюга силовських p-підгруп, силовською p-підгрупою в групі $\overline{Bir}\,A(F_p)$. Звідси, автоматично, вона буде силовською p-підгрупою в групі $\overline{Tbi}\,A(F_p)$ і теорему повністю доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Neuman P.M. *The structure of finitary permutation groups* // Arch. Math. 1976. V.27. No 1. P.3–17.
2. Phillips R.E. *The structure of groups of finitary transformations* // F. Algebra. 1988. V.119. No 2. P.400–448.
3. Беляев В.В. *Строение p-подгрупп конечных преобразований* // Алгебра и логика. 1992. Т.31. № .5. С.453–478.
4. Крошко Н.В., Сущанський В.І. *Однорідно симетричні групи* // Доповіді АН України. 1993. № 12.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.:Наука. 1977. 495с.
6. Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F. Locally Finite Groups. – Amsterdam-London: North-Holland. 1973. 210p.
7. Сущанський В.І. *Стандартні підгрупи групи ізометрій простору цілих p-адичних чисел* // Вісник КДУ. Сер. матем. та мех. 1988. Т.30. С.100–107.
8. Сущанський В.І. *Вінцеві добутки за послідовностями груп підстановок та фінітно апроксимовні групи* // Доповіді АН України. 1984. № 2. С.19–22.
9. Kaloujnine L.A. *La structure des p-groups de Sylow des groupes symetriques finis* // Ann. Ec. Normale. 1948. 3(65). P.239–276.

Національний університет ім. Т. Шевченка,

кафедра алгебри і математичної логіки,

252163, м. Київ, пр-кт Глушкова, 6.

Надійшло 4.05.94.