Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 515.12

QUELQUES PROBLÈMES SUR LES GROUPES CONTRACTILES ET LA THÉORIE DES RÉTRACTES

Robert Cauty

Abstract. R. Cauty, *Some problems on contractible groups and theory of retracts* // Matematychni Studii. **3** (1994) 111–116.

1. Introduction.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit UC s'il existe une fonction continue $\lambda : X \times X \times I \to X$ ($I = [0,1]$) vérifiant $\lambda(x,y,0) = x$, $\lambda(x,y,1) = y$ et $\lambda(x,x,t) = x$ quels que soient x, y dans X et t dans I. Les exemples classiques d'espaces UC sont les sous-ensembles convexes des espaces vectoriels topologiques, les groupes contractiles, et les rétractes de tels espaces. Considérons les classes suivantes d'espaces métrisables:
$\mathcal{R}_1$ = espaces UC,
$\mathcal{R}_2$ = rétractes des groupes métrisables contractiles,
$\mathcal{R}_3$ = rétractes des espaces métriques linéaires,
$\mathcal{R}_4$ = rétractes des espaces métriques linéaires localement convexes = rétractes absolus.

Chacune de ces classes contient la suivante, et le problème de leur coïncidence se pose naturellement. L'exemple construit dans [5] montre que $\mathcal{R}_3 \neq \mathcal{R}_4$. Pour ce qui est des trois premières, notre hypothèse fondamentale est la suivante:

Conjecture. $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}_3$.

Nous nous proposons ici de discuter cette conjecture ainsi que quelques problèmes soulevés par les méthodes utilisées dans [5].

2. Au sujet de l'hypothèse $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Commençons par remarquer qu'il est facile de déduire d'un résultat de Sipatcheva [7] que tout espace métrique compact UC est un rétracte d'un groupe métrizable contractile. Pour cela, rappelons qu'une opération de Maltsev sur un espace topologique X est une fonction continue $f : X^3 \to X$ vérifiant $f(x,y,y) = f(y,y,x) = x$ quels que soient x et y. Tout groupe topologique admet une opération de Maltsev, définie par $f(x,y,z) = xy^{-1}z$. Par conséquent, tout rétracte d'un groupe topologique admet aussi une opération de Maltsev. Dans [7], Sipatcheva prouve

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C55.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

inversement que, si un compact X admet une opération de Maltsev, alors X est un rétracte de son groupe topologique libre (au sens de Markov) $G(X)$. L'observation élémentaire suivante fait le lien entre ce résultat et notre conjecture:

Lemma 1. *Tout espace métrique UC admet une opération de Maltsev.*

Démonstration. Soient X un espace métrique UC, $\lambda : X^2 \times I \to X$ comme dans l'introduction, et Δ la diagonale de X^3. Posons $A = \{(x,y,y) \in X^3 \mid x \neq y\}$, $B = \{(y,y,x) \in X^3 \mid x \neq y\}$. A et B sont disjoints et fermés dans $X^3 \backslash \Delta$, donc il existe une fonction continue $\alpha : X^3 \backslash \Delta \to I$ vérifiant $\alpha(A) = \{0\}$ et $\alpha(B) = \{1\}$. On vérifie facilement que la fonction $f : X^3 \to X$ définie par

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{si } (x,y,z) \in \Delta \\ \lambda(x,z,\alpha(x,y,z)) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une opération de Maltsev continue sur X.

Soit donc X un espace métrique compact UC. D'après ce qui précède, X est un rétracte de $G(X)$. Etant UC, X est contractile. Si nous fixons une contraction $\varphi : X \times I \to X$ de cet espace, elle se prolonge en une homotopie $\varphi_G : G(X) \times I \to G(X)$ qui contracte chacune des composantes de $G(X)$ en un point. Cela entraîne que X est homéomorphe à un rétracte d'un groupe contractile (la composante de l'unité de $G(X)$). Le groupe $G(X)$ n'est pas métrisable. Pour remédier à cela, considérons l'ensemble $\mathcal{T}(X)$ des topologies de groupe métrizable sur $G(X)$ qui sont moins fines que la topologie libre. Le lemme suivant implique que X est un rétracte d'un groupe métrisable contractile.

Lemme 2. *Soit X un espace métrique compact UC. Fixons une rétraction r de $G(X)$ sur X et une homotopie $\Phi : G(X) \times I \to G(X)$. Il existe alors $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $r : (G(X), \tau) \to X$ et $\Phi : (G(X), \tau) \times I \to (G(X), \tau)$ soient continues.*

Démonstration. Nous utiliserons le fait suivant, dont la démonstration sera omise, car elle est analogue à celle du lemme 2.2 de [5].

Affirmation. *Soient Y un espace métrique et $F : G(X) \times I \to Y$ une fonction continue. Il existe $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $F : (G(X), \tau) \times I \to Y$ soit continue.*

Cela nous permet de trouver $\tau_0 \in \mathcal{T}(X)$ telle que $r : (G(X), \tau_0) \to X$ soit continue, puis, inductivement, $\tau_i \in \mathcal{T}(X)$, $i = 0, 1, \ldots$, telles que $\Phi : (G(X), \tau_{i+1}) \times I \to (G(X), \tau_i)$ soit continue pour tout $i \geq 0$. Alors, la borne supérieure τ de la suite $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ est un élément de $\mathcal{T}(X)$ vérifiant la conclusion du lemme.

Ainsi, la conjecture $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ n'est ouverte que pour les espaces non compacts. Remarquons que la construction de Sipatcheva [7] est entièrement formelle: à une opération de Maltsev f, elle associe une "rétraction" r_f de $G(X)$ sur X, et la compacité de X n'est utilisée que pour vérifier la continuité de r_f. De même, toute contraction $\varphi : X \times I \to X$ d'un espace X se prolonge formellement en une "homotopie" $\varphi_G : G(X) \times I \to G(X)$ du groupe libre sur X contractant chaque composante de $G(X)$ en un point. Prenons maintenant un espace métrisable UC quelconque X. Fixons une opération de Maltsev f sur X et une contraction φ de X.

Problème 1. *Peut-on trouver une topologie de groupe métrizable τ sur $G(X)$, induisant sur X sa topologie de départ, et telle que $r_f : (G(X), \tau) \to X$ et $\varphi_G : (G(X), \tau) \times I \to (G(X), \tau)$ soient continues?*

3. Au sujet de l'hypothèse $\mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}_3$.

Soit n un entier ≥ 2. Une n-moyenne sur un espace topologique X est une fonction continue $m : X^n \to X$ vérifiant $m(x, \ldots, x) = x$ pour tout x et $m(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = m(x_1, \ldots, x_n)$ pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Evidemment, tout rétracte d'un espace métrique linéaire admet, $\forall n \geq 2$, une n-moyenne, donc une réponse affirmative au problème suivant prouverait que $\mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}_3$.

Problème 2. *Soit $n \geq 2$. Existe-t-il un groupe métrisable contractile n'admettant pas de n-moyenne?*

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, l'existence d'un tel groupe résulterait d'une réponse positive au problème suivant.

Problème 3. *Soit $n \geq 2$. Existe-t-il un espace métrique compact UC n'admettant pas de n-moyenne?*

Remarquons que, pour un espace *UC*, l'existence d'une 2-moyenne équivaut à l'existence d'une fonction λ vérifiant $\lambda(x, y, 0) = x$, $\lambda(x, y, 1) = y$ et $\lambda(x, x, t) = x$ qui soit en outre symétrique au sens que $\lambda(x, y, t) = \lambda(y, x, 1-t)$ quels que soient x, y et t. En effet, si λ est symétrique, la fonction $m(x, y) = \lambda(x, y, \frac{1}{2})$ est une 2-moyenne. Inversement, si m est une 2-moyenne et si μ vérifie $\mu(x, y, 0) = x$, $\mu(x, y, 1) = y$ et $\mu(x, x, t) = x$, on peut définir une fonction λ symétrique par les formules

$$\lambda(x, y, t) = \begin{cases} \mu(x, m(x, y), 2t) & \text{si } \ 0 \leq t \leq 1/2; \\ \mu(y, m(x, y), 2-2t) & \text{si } \ 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La construction habituelle de la fonction λ pour un groupe contractile ne fournit pas une fonction symétrique (elle est définie par $\lambda(x, y, t) = h(e, t)^{-1} \cdot h(xy^{-1}, t) \cdot y$, où h est une déformation du groupe en son élément neutre e).

4. Sur la construction utilisée dans [5].

Jusqu'à la fin de cet article, nous noterons, pour tout espace métrique compact X, $E(X)$ l'espace vectoriel topologique libre engendré par X (décrit en détails dans [5]) et $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble des topologies d'espace métrique linéaire sur $E(X)$ qui sont moins fines que la topologie libre. La stratégie utilisée dans [5] pour construire un espace métrique linéaire qui ne soit pas un rétracte absolu fut de chercher un compact X pour lequel existait une topologie $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $(E(X), \tau)$ ne soit pas un rétracte absolu. L'existence d'une telle topologie impose des restrictions à X: il ne peut pas être un rétracte absolu de voisinage, ni de dimension finie; plus généralement, il ne peut avoir la propriété C (X a la propriété C si, pour toute suite $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de recouvrements ouverts de X, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ de X tel que, $\forall n \geq 1$, $\mathcal{U}_n$ soit formée d'ensembles deux à deux disjoints qui sont contenus dans des ensembles appartenant à $\mathcal{C}_n$). Mais ces deux classes d'espaces sont les seules pour lesquelles on sache démontrer qu'une telle topologie τ ne peut exister, et il semble raisonnable de penser que, si X est un compact fortement de dimension infinie dont la structure locale est suffisamment compliquée, alors il existe toujours $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $(E(X), \tau)$ ne soit pas un rétracte absolu. Malheureusement, les méthodes pour le démontrer manquent, ce qui nous a obligé à utiliser dans [5] un exemple très complexe.

Problème 4. *Soit $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, où chaque X_i est un pseudo-arc. Existe-t-il $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $(E(X), \tau)$ ne soit pas un rétracte absolu?*

L'intérêt de cette question n'est pas dans sa réponse, mais dans le fait que, pour pouvoir y répondre, il est nécessaire de développer de nouvelle méthodes permettant de décider quand un espace localement contractile est un rétracte absolu de voisinage.

5. Rétractes absolus pour les espaces stratifiables.

Pour tout espace métrique compact X et tout entier $n \geq 1$, soit $G_n(X)$ l'ensemble des éléments de $E(X)$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où les x_i sont des points de X (pas nécessairement distincts) et les λ_i des réels. $G_n(X)$ est fermé dans $E(X)$, et $E(X)$ est la limite inductive de la suite croissante des $G_n(X)$. Considérons la propriété suivante:

($\mathcal{E}_n$) Pour tout espace métrique Y, tout fermé A de Y et toute fonction continue $f : A \to X$, il existe une fonction continue $g : Y \to G_n(X)$ qui prolonge f.

Comme l'a remarqué T. Banakh, s'il existe $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $(E(X), \tau)$ ne soit pas un rétracte absolu, alors, quel que soit $n \geq 1$, X ne peut avoir la propriété $\mathcal{E}_n$.

Problème 5. *Existe-t-il un compact métrisable X vérifiant*
(i) $\forall \tau \in \mathcal{T}(X)$, *$(E(X), \tau)$ est un rétracte absolu,*
(ii) $\forall n \geq 1$, *X n'a pas la propriété $\mathcal{E}_n$.*

L'existence d'un tel compact fournirait un contre-exemple intéressant concernant les rétractes absolus de voisinage pour les espaces stratifiables. Rappelons qu'un espace topologique Y est dit stratifiable s'il est séparé et s'il existe une fonction faisant correspondre à tout ouvert U de Y une suite $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts de Y vérifiant (a) $\bar{U}_n \subset U$ pour tout n, (b) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ et (c) $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$ pour tout n. Un espace stratifiable Y est appelé un rétracte absolu (de voisinage) pour la classe des espaces stratifiables (noté RA(V)(stratifiable)) si, pour tout espace stratifiable Z, tout fermé A de Z, toute fonction continue de A dans Y peut se prolonger à Z (resp. à un voisinage de A dans Z). Une part importante de la théorie des rétractes pour les espaces métrisables peut se généraliser aux espaces stratifiables (voir [1], [2] et [3]), et cela a de l'intérêt pour l'étude des espaces métrisables eux-mêmes, comme le lecteur pourra s'en convaincre en lisant [4]. Il est donc naturel de chercher jusqu'où cette généralisation peut être poussée. Pour les espaces métrisables, chacune des trois conditions suivantes caractérise les rétractes absolus de voisinage:

(I) Tout ouvert de Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

(II) Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, Y est $\mathcal{U}$-dominé par un complexe simplicial.

(III) Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de Y tel que toute réalisation partielle d'un complexe simplicial K dans Y relativement à $\mathcal{V}$ se prolonge en une réalisation complète de K dans Y relativement à $\mathcal{U}$.

(Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de Y, deux applications $f, g : Z \to Y$ sont $\mathcal{U}$-proches si, $\forall z \in Z$, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant $\{f(z), g(z)\}$; elles sont $\mathcal{U}$-homotopes s'il existe une homotopie $h : Z \times I \to Y$ entre f et g telle que, $\forall z \in Z$, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant $h(\{z\} \times I)$. Y est $\mathcal{U}$-dominé par K s'il existe des fonctions $f : Y \to K$ et $g : K \to Y$ telles que $g \circ f$ soit $\mathcal{U}$-homotope à id_Y. Une réalisation partielle d'un complexe simplicial K dans Y relativement à $\mathcal{U}$ est un couple (L, f) où L est un sous-complexe de K contenant tous les sommets de K et f une fonction continue de L dans Y telle que, pour tout simplexe σ de K, $f(\sigma \cap L)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{U}$; cette réalisation est complète si $L = K$).

Lemme 3. *Si le compact métrisable X vérifie les conditions (i) et (ii) du problème 5, alors $E(X)$ est un espace stratifiable possédant les propriétés (I) à (III), mais n'est pas un RAV(stratifiable).*

Démonstration. Etant limite inductive d'une suite de compacts métrisables, $E(X)$ est stratifiable. Supposons que ce soit un RAV(stratifiable); étant contractile, c'est donc un RA(stratifiable). Plongeant X dans le cube de Hilbert Q, il existe une fonction continue $f : Q \to E(X)$ prolongeant l'identité de X. Puisque $E(X)$ est limite inductive de la suite de fermés $\{G_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$, il existe un n_0 tel que $G_{n_0}(X)$ contienne le compact $f(Q)$. Mais il est facile de voir que cela implique que X a la propriété $\mathcal{E}_{n_0}$, ce qui est contradictoire.

Pour vérifier les conditions (I)—(III), nous utiliserons le fait que si E est un espace métrique linéaire avec une distance d, K un complexe simplicial, $f : K \to E$ et $\varepsilon : K \to \,]0, 1]$ sont des fonctions continues, il existe une subdivision K' de K et une fonction continue $g : K' \to E$ qui est linéaire sur chaque simplexe de K' et vérifie $d(f(x), g(x)) < \varepsilon(x)\ \forall x \in K$; en outre, si L est un sous-complexe de K tel que f soit linéaire sur chaque simplexe de L, on peut supposer qu'aucun simplexe de L n'est subdivisé et que $g|L = f|L$. Cela se démontre par récurrence sur la dimension lorsque K est un complexe fini, et le cas général s'en déduit.

VÉRIFICATION DE (I): Soit U un ouvert de X. Pour tout $x \in U$, prenons un ouvert W_x tel que, quels que soient y, z dans W_x, le segment $[y, z]$ d'extrémités y et z soit contenu dans U. Puisque $E(X)$ est héréditairement de Lindelöf, nous pouvons extraire un sous-recouvrement dénombrable $\mathcal{W}$ du recouvrement ouvert $\{W_x \mid x \in U\}$. Le lemme 2.1 de [5] garantit l'existence de $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que U et tous les éléments de $\mathcal{W}$ soient τ-ouverts; soit $i : U \to (U, \tau)$ l'identité. Puisque (U, τ) est un rétracte absolu de voisinage, nous pouvons trouver un complexe simplicial K et des fonctions continues $f : (U, \tau) \to K$ et $g : K \to (U, \tau)$ telles que $g \circ f$ soit $\mathcal{W}$-proche de id_U. La remarque précédente nous permet de supposer que g est linéaire sur chaque simplexe de K, ce qui garantit que $g : K \to U$ est encore continue. Mais alors, $g \circ f \circ i$ est $\mathcal{W}$-proche de id_U, donc, d'après le choix de $\mathcal{W}$, lui est homotope, ce qui montre que K domine U; d'après un théorème classique de J.H.C.Whitehead, U a donc le type d'homotopie d'un CW-complexe.

VÉRIFICATION DE (II): Pour tout $x \in E(X)$, choisissons $U_x \in \mathcal{U}$ contenant x, puis un ouvert W_x contenant x et tel que, quels que soient y, z dans W_x, $[y, z]$ soit contenu dans U_x. Le reste de la démonstration est identique à celle de (I).

VÉRIFICATION DE (III): Puisque $E(X)$ est paracompact, nous pouvons supposer $\mathcal{U}$ localement fini. Prenons $\mathcal{W}$ comme dans (II). Soit $\mathcal{W}_1$ un recouvrement ouvert dénombrable de $E(X)$ tel que $\mathcal{S}t(\mathcal{W}_1)$ soit plus fin que $\mathcal{W}$ $(\mathcal{S}t(\mathcal{W}_1) = \{\mathcal{S}t(W, \mathcal{W}_1) \mid W \in \mathcal{W}_1\}$ où $\mathcal{S}t(W, \mathcal{W}_1) = \bigcup\{W' \in \mathcal{W}_1 \mid W \cap W' \neq \emptyset\})$. Prenons $\tau \in \mathcal{E}(X)$ telle que tous les éléments de $\mathcal{W}_1$ soient τ-ouverts. Comme $(E(X), \tau)$ est un rétracte absolu, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de $(E(X), \tau)$ tel que toute réalisation partielle d'un complexe simplicial K dans $(E(X), \tau)$ relativement à $\mathcal{V}$ se prolonge en une réalisation complète de K dans $(E(X), \tau)$ relativement à $\mathcal{W}_1$. Soient K un complexe simplicial, L un sous-complexe de K contenant son

0-squelette K^0 et $f : L \to E(X)$ une réalisation partielle de K relativement à $\mathcal{V}$. Nous pouvons trouver une réalisation complète g_0 de K dans $(E(X), \tau)$ relativement à $\mathcal{W}$, telle que $g_0|K^0 = f|K^0$. Nous pouvons supposer que g est linéaire sur chaque simplexe d'une certaine subdivision de K; alors $g : K \to E(X)$ est encore continue. Soit σ un simplexe de K. Il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $f(\sigma \cap L) \subset V$ et $W \in \mathcal{W}_1$ tel que $g_0(\sigma) \subset W$. Puisque $g|K^0 = f|K^0$, $V \cap W \neq \emptyset$; comme $\mathcal{S}t(\mathcal{W}_1)$ est plus fin que $\mathcal{W}$, $V \cup W$ est contenu dans un élément de $\mathcal{W}$. Le choix de $\mathcal{W}$ garantit alors l'existence d'une homotopie h entre $g_0|L$ et f telle que, pur tout simplexe σ de K, il existe un $U \in \mathcal{U}$ contenant $g_0(\sigma) \cup h((\sigma \cap L) \times I)$. En utilisant soigneusement la propriété d'extension des homotopies, nous pouvons alors construire une homotopie $k : K \times I \to E(X)$ telle que $k_0 = g_0$, $k|L \times I = h$ et que, pour tout simplexe σ de K, $k(\sigma \times I)$ soit contenu dans l'intersection des éléments de $\mathcal{U}$ contenant $g_0(\sigma) \cup h((\sigma \cap L) \times I)$ (cette intersection est ouverte d'après la finitude locale de $\mathcal{U}$). Alors, k_1 est une réalisation complète de K dans $E(X)$ relativement à $\mathcal{U}$ qui prolonge f.

Problème 6. *Existe-t-il, pour tout $n \geq 1$, un compact de dimension finie qui n'a pas la propriété $\mathcal{E}_n$?*

Une réponse affirmantive à ce problème résoudrait aussi le problème 5 car si, $\forall n$, X_n est un compact de dimension finie n'ayant pas la propriété $\mathcal{E}_n$, alors le compactifié d'Alexandroff de la somme topologique des X_n vérifie les conditions du problème 5. Remarquons qu'un compact de dimension n a la propriété $\mathcal{E}_{n+2}$. Un compact a la propriété $\mathcal{E}_1$ si, et seulement si, c'est un rétracte absolu de voisinage. Le pseudo-arc est un exemple de compact de dimension un n'ayant pas le propriéte $\mathcal{E}_2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Borges C.J. *On stratifiable spaces* // Pacific J. Math. 1966. V.17. P.1–16.
2. Cauty R. *Convexité topologique et prolongement des fonctions continues* // Compositio Math. 1973. V.27. P.233–271.
3. Cauty R. Rétractions dans les espaces stratifiables // Bull. Soc. Math. France. 1974. V.102. P.129–149.
4. Cauty R. *Une caractérisation des rétractes absolus de voisinage* // Fund. Math. 1994. V.144. P.11–22.
5. Cauty R. *Un espace métrique linéaire qui n'est pas un rétracte absolu*, Fund. Math., à paraître.
6. Hu S.-T. Theory of Retracts. – Detroit: Wayne State University, 1965.
7. Сипачева О.В. *Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп* // Вестник МГУ. Сер. 1. 1991, № 1. С.33–36.

Reçu le 19.06.1994