Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 519.21

АСИМПТОТИКА ФУНКЦІЇ ВІДНОВЛЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НАПІВМАРКІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Я.І. ЄЛЕЙКО

Abstract. Ya.I. Yeleĭko. *Asymptotic of the renewal functions for one class of semi-Markov processes*// Matematychni Studii. **3** (1994) 107–110.

We find an asymptotics of the renewal function for semi-Markov process with finite or countable state space without finitness condition of mean stay time in states under the condition that the tail of the the stagin state distribution function is a regularly varying function with parameter $\alpha = 1$.

Нехай x_t – напівмарківський процес із скінченною множиною станів 1, 2, $\dots$, m та неперервним часом.

Позначимо

$$\tau = \inf\{t : x_t \neq x_0\};\ \tau_1 = \tau; \dots, \quad \tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : x_t = x_{\tau_{k-1}}\},$$
$$F_{ij}(t) = P\{\tau < t, x_\tau = j \mid x_0 = i\}, \quad F_i(t) = P\{\tau < t \mid x_0 = i\}.$$

Тоді очевидно, що

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}(t). \tag{1}$$

Послідовність випадкових величин $x_0, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_k} \dots$ утворює так званий вкладений ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями $p_{ij} = P\{x_\tau = j \mid x_0 = i\}$.

Вважатимемо, що матриця, складена з перехідних ймовірностей нерозкладна, і, отже, для неї існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1, \dots, p_m$, для якого

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_j p_{ji};\ \sum_{j=1}^{m} p_i = 1.$$

Нехай

$$F_{ij}(\infty) - F_{ij}(t) \sim a_{ij}\frac{1}{t}L(t),\ t \to \infty, \tag{2}$$

де $L(t)$ — повільно змінна функція на нескінченності. Функцію $\frac{1}{t}L(t)$ називають правильно змінною на нескінченності з параметром $\alpha = 1$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60K15.

Keywords:renewal function, asymptotics, semi-Markov process, state space, mean stay time

doi:10.30970/ms.3.1.107-110

Побудуємо функцію відновлення

$$U_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, x_{\tau_n} = j\},$$

де P_i – умовна ймовірність при умові $x_0 = i, \tau_0 = 0$.

Наша мета полягає в знаходженні асимптотики функції відновлення без умови скінченності середніх часів перебування в станах, при умовах (2). Слід відзначити, що асимптотика функції відновлення без умови скінченності середніх часів перебування в станах досліджена лише в тому випадку, коли $1 - F_i(t)$ є правильно змінною з параметром $\alpha \in [0, 1)$ [3]. У випадку $\alpha = 1$ асимптотика функції відновлення досліджена лише для послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин [2] без умови скінченності середніх цих величин. Нехай ν – момент першого повернення в початковий стан вкладеного ланцюга Маркова

$$\nu = \min\{n > 1 : x_{\tau_1} \neq x_0, \dots, x_{\tau_{n-1}} \neq x_0, x_{\tau_n} = x_0\}.$$

Має місце теорема.

Теорема 1. *Якщо* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, x_{\tau_n} = j \mid \tau_\nu > t\} < \infty$*;* $p_{ij} < 1\ \forall i, j$*, тоді*

$$U_{ij}(t) \sim \frac{1}{m_i(t)} \int\limits_0^{\infty} c_{ij}(u)du,\ t \to \infty, \quad \text{де}$$

$$c_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, \tau_\nu > t, x_{\tau_n} = j\}, \quad m_i(t) = \int_0^{\infty} P_i\{\tau_\nu > u\}du.$$

Доведення. Із (1), (2) випливає, що $1 - F_i(t) \sim a_i \frac{1}{t} L(t)$, $t \to \infty$, де $a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$. Позначимо $\hat{F}_i(t) = P_i\{\tau_\nu < t\}$. За формулою повної ймовірності отримаємо

$$1 - \hat{F}_i(t) = \sum_{\substack{i_1 \neq i, \dots, i_{n-1} \neq i \\ i_n = i}} P_i\{x_{\tau_1} = i_1, \dots, x_{\tau_{n-1}} = i_{n-1}, x_{\tau_n} = i, \tau_1 + \dots + \tau_n > t\} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 \neq i, \dots, i_{n-1} \neq i \\ i_n = i}} p_{ii_1} \dots p_{i_{n-1}i} P\{\tau_1 + \dots + \tau_n > t \mid x_{\tau_1} = i_1, \dots, x_{\tau_{n-1}} = i_{n-1}, x_{\tau_n} = i\}. \tag{3}$$

Із умов теореми випливає, що при $t \to \infty$ (3) буде еквівалентне

$$1 - \hat{F}_i(t) = \sum_{\substack{i_1 \neq i, \dots, i_{n-1} \neq i \\ i_n = i}} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1}i} \frac{1}{t} (a_{ii_1} + \dots + a_{i_{n-1}i}). \tag{4}$$

Оскільки $p = \max_{i,j} p_{ij} < 1$, то $a = \max_{i,j} a_{ij} < \infty$. Тоді

$$\sum_{\substack{i_1 \neq i, \dots, i_{n-1} \neq i \\ i_n = i}} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1}i} (a_{ii_1} + \dots + a_{i_{n-1}i}) < \sum_{n=1}^{\infty} p^n a\, n < \infty.$$

Отже, $1 - \hat{F}_i(t)$ є правильно змінною функцією з параметром $\alpha = 1$.

Для функції відновлення $U_{ij}(t)$ запишемо формулу повної ймовірності

$$U_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, x_{\tau_n} = j\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_\nu > t, x_{\tau_n} = j, \tau_n < t\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^t P_i\{\tau_\nu \in dy, \nu = k\} P_i\{\tau_{n-k} < t - y, x_{\tau_{n-k}} = j\} =$$

$$= c_{ij}(t) + \int_0^t P_i\{\tau_\nu \in dy\} U_{ij}(t-y), \quad (5)$$

де $c_{ij}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, \tau_\nu > t, x_{\tau_n} \neq j\}$. Рівняння (5) є одновимірним рівнянням відновлення. Його розв'язок запишемо у вигляді [1]

$$U_{ij}(t) = \int_0^t c_{ij}(t-y) \hat{U}_i(dy), \quad \text{де} \quad (6)$$

$$\hat{U}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_i^{n*}(t), \; \hat{F}_i^{n*}(t) = \int_0^t \hat{F}_i^{n-1*}(t-y) \hat{F}_i(dy),$$

$$\hat{F}_i^{0*}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Оскільки $1 - \hat{F}_i(t)$ є правильно змінною функцією з параметром $\alpha = 1$, то асимптотика [2]

$$\hat{U}_i(t) \sim \frac{t}{m_i(t)}, \quad t \to \infty,$$

де $m_i(t) = \int_0^t (1 - F_i(u)) du$. Згідно умови теореми, з $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, x_{\tau_n} = j \mid \tau_\nu > t\} < \infty$ випливає, що $c_{ij} = O(\frac{1}{t})$. Тоді згідно [2] асимпототика (6) буде $U_{ij}(t) \sim \frac{1}{m_i(t)} \int_0^\infty c_{ij}(u) du, t \to \infty$. Теорему доведено.

Нехай тепер x_t – напівмарківський процес із зліченною множиною станів $1, 2, \ldots, n, \ldots$ та неперервним часом, для якого

$$F_{ij}(\infty) - F_{ij}(t) \sim a_{ij} \frac{1}{t} L(t), \quad t \to \infty.$$

Вважатимемо також, що вкладений ланцюг Маркова є ергодичним, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} p_j$, де $p_{ij}^{(k)} = P\{x_{\tau_k} = j | x_0 = i\}$ – перехідна ймовірність за k кроків.

Послідовність чисел $p_1, \ldots, p_m, \ldots$ утворює єдиний стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова, для якого $\sum_{j=1}^{\infty} p_j p_{ji} = p_i, \; \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$ Знайдемо асимптотику функції відновлення $U_{ij}(t)$ в даному випадку. Має місце теорема 2.

Теорема 2. *Якщо*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty \quad \textit{для всіх } i, j, \tag{7}$$

$$\sup_{i,j} p_{ij} < 1, \tag{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, x_{\tau_n} = j \mid \tau_\nu > t\} < \infty, \tag{9}$$

$$\sup_{i,j} a_{ij} < \infty, \tag{10}$$

тоді

$$U_{ij}(t) \sim \frac{1}{m_i(t)} \int_0^\infty c_{ij}(u) du, \quad \textit{де} \quad c_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, \tau_\nu > t, x_{\tau_n} = j\}.$$

Доведення. Із (7) випливає, що $1 - F_i(t) \sim \frac{1}{t} L(t) \cdot a_i$, $t \to \infty$, є правильно змінна на нескінченності функція з параметром $\alpha = 1$, де $a_i = \sum_j a_{ij}$. Використовуючи (8) і (10), можна показати, що $1 - \hat{F}_i(t)$ є правильно змінною на нескінченності функцією з параметром $\alpha = 1$. Далі доведення данної теореми аналогічне доведенню теореми 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложение. Т.2. – М.: Мир, 1967. – 752с.
2. Erikson K.B. *Strong renewal theorems with infinite mean* // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V.151. No 1. P.263–291.
3. Щуренков В.М., Елейко Я.И. *Предельные распределения временных средних для полумарковского процеса с конечным числом состояний* // Укр. мат. журн. 1979. Т.31, № 5. С.598–603.

Львівський університет, механіко-математичний факультет, Університетська 1,
Львів 290602

Надійшло 02.11.1993