Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517.51; 515.12

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ І σ-МЕТРИЗОВНІ ПРОСТОРИ

В.К. Маслюченко, О.В. Собчук

Abstract. V.K. Maslyuchenko, O.V. Sobchuk, *Baire classification and σ-metrizable spaces* // Matematychni Studii. **3** (1994) 95–102.

It is considered the ascending to Lebesque problem: for what topological spaces X and Y every separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ belongs to the first Baire class. The main theorem develops one of Rudin's result: if X is σ-metrizable, Y is perfectly normal spaces such that $X \times Y$ is perfectly normal, and $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ is continuous on the first and class α on the second variable function, then f is of the class $\alpha + 1$ on joint variables. This result is applied to the investigation of separately continuous functions on the products of some strict inductive limits and locally convex spaces in the weak topology.

1. В цій статті ми розвиваємо деякі відомі результати [3,4,5] про належність нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, заданих на добутках двох топологічних просторів X і Y, до першого класу Бера $B_1(X \times Y)$. У [3] В.Рудін показала, що це вірно, коли X або Y метризовний простір. В [5] Г.Вера, розвиваючи дослідження В.Морана [4], довів це у тому випадку, коли простір X цілком регулярний і такий, що поточково компактні підмножини $C(X)$ є метризовними, а Y компакт. Як видно, у цих результатах присутня вимога метризовності або компактності одного з просторів і вона істотно використовується у доведеннях. Оскільки багато важливих просторів функціонального аналізу неметризовні і, зрозуміло, не компактні, то постає природне питання про класифікацію нарізно неперервних функцій, заданих на добутках топологічних векторних просторів, зокрема, індуктивних границь метризовних локально опуклих просторів чи нормованих просторів у їх слабкій топології. Перший крок у цьому напрямку був зроблений в [6], де показано, що кожна нарізно неперервна функція на квадраті простору $\mathbb{R}^\infty$ фінітних послідовностей є першого класу Бера.

У пропонованій роботі ми вкажемо деякі класи топологічних векторних просторів, на добутках яких кожна нарізно неперервна функція f належить $B_1(X \times Y)$. Більше того, ми доведемо, що коли X – σ-метризовний простір, Y досконало нормальний простір, такий, що добуток $X \times Y$ досконало нормальний, то кожна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, неперервна по першій змінній і класу α (за Бером) по другій змінній, є класу $\alpha + 1$ за сукупністю змінних.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C30; 26A21.

2. Простір X будемо називати σ-метризовним, якщо його можна подати як об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів. Наведемо приклади σ-метризовних просторів.

Лема 1. *Якщо гаусдорфовий векторний простір X має всюди щільний метризовний підпростір L, то і X метризовний.*

Доведення. Покажемо, що в X існує зліченна база околів нуля. З умови випливає, що в X існує послідовність відкритих околів нуля U_n, $n = 1, 2\ldots$, така, що система $\{U_n \cap L : n = 1, 2, \ldots\}$ утворює базу околів нуля в підпросторі L. Доведемо, що тоді система $\{U_n : n = 1, 2, \ldots\}$ є базою околів нуля в X. Справді, нехай U – довільний окіл нуля в X. Тоді існує такий окіл нуля $\bar{V}$ в X, що $\bar{V} \subseteq U$, і номер n, для якого $U_n \cap L \subseteq V$. Оскільки множина U_n відкрита, а L всюди щільна, то $\overline{U_n \cap L} = \bar{U}_n$. В такому разі $U_n \subseteq \bar{U}_n = \overline{U_n \cap L} \subseteq \bar{V} \subseteq U$, що й треба було довести.

Твердження 1. *Нехай X строга індуктивна границя послідовності локально опуклих метризовних просторів X_n, $n \in \mathbb{N}$. Тоді X є σ-метризовний простір.*

Доведення. Нехай $\bar{X}_n$ – замикання X_n в X, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді $\bar{X}_n$ замкнений лінійний підпростір X, який містить метризовний всюди щільний підпростір X_n. Згідно леми 1, $\bar{X}_n$ метризовний простір. Оскільки $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n$, то X є σ-метризовний простір.

Зауваження. Більше того, можна показати, що $X = \lim\operatorname{ind} \bar{X}_n$.

Твердження 2. *Нехай X гаусдорфовий локально опуклий простір із спряженим X^*, який є метризовним і сепарабельним відносно сильної топології $\beta(X^*, X)$. Тоді простір X, наділений слабкою топологією $\sigma(X, X^*)$, є σ-метризовним.*

Доведення. Оскільки X^* метризовний, то існує послідовність (B_n) слабко обмежених абсолютно опуклих і слабко замкнених множин в X, така, що система їх поляр $\{B_n^\circ : n \in \mathbb{N}\}$ утворює базу околів нуля в X^*. Нехай $\varphi : X \to X^{**}$ канонічне вкладення, що діє за правилом $\varphi(x)(f) = f(x)$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ образ $\varphi(B_n)$ є одностайно неперервною підмножиною в X^{**}. Згідно [2, c.170], простір $(\varphi(B_n), \sigma(X^{**}, X^*))$ метризовний і сепарабельний. Отже, й $(B_n, \sigma(X, X^*))$ такий самий, адже він йому гомеоморфний. Покажемо тепер, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Нехай $x \in X$. Тоді для $\varphi(x) \in X^{**}$ існує номер n, такий, що $|\varphi(x)(f)| = |f(x)| \leq 1$ для кожного $f \in B_n^\circ$. Отже, $x \in B_n^{\circ\circ}$ і, оскільки $B_n^{\circ\circ} = B_n$ ([2, c.200]), то $x \in B_n$, чим і завершується доведення твердження.

Твердження 3. *Кожний σ-метризовний простір є досконалим.*

Доведення. Справді, нехай простір X є об'єднанням послідовності своїх метризовних підпросторів X_n і G відкрита множина в X. Тоді $G_n = G \cap X_n$ відкрита множина в X_n при кожному n. Оскільки X_n метризовний, а отже, досконалий простір, то G_n множина типу F_σ в X_n, тобто $G_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$, де $F_{n,k}$ замкнені в X_n множини, $k = 1, 2, \ldots$. Тоді $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$. Оскільки X_n замкнений підпростір X, то $F_{n,k}$ замкнена в X множина. Тому G множина типу F_σ.

Зауваження. Прикладом не нормального σ-метризовного простору є площина Немицького L [1, с.48]. Покажемо, що L є σ-метризовним простором. Нехай $L_{2,n}$ підмножина звичайної площини, що визначена умовою $y \geq 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, і L_1 пряма $y = 0$. Покладемо $X_n = L_1 \cup L_{2,n}$. На множині X_n введемо метрику ρ так: $\rho(x,y) = d(x,y)/(d(x,y)+1)$, де d звичайна евклідова метрика на $\mathbb{R}^2$, коли $x, y \in L_{2,n}$; $\rho(x,y) = 1$, як тільки $x \in L_1$, а $y \in L_{2,n}$ або коли $x, y \in L_1$ і $x \neq y$; $\rho(x,y) = 0$, коли $x = y \in L_1$. Неважко перевірити, що ρ буде метрикою на X_n, яка породжує топологію X_n як підпростору L. Тоді, оскільки $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ і X_n замкнений підпростір L, то площина Немицького є σ-метризовним простором. Але [1, с.74] L не є нормальним простором.

3. У цьому пункті ми встановимо досконалу нормальність деяких просторів та їх скінченних добутків. Почнемо з простого

Твердження 4. *Якщо регулярний простір $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ є об'єднанням своїх метризовних сепарабельних підпросторів X_n, то простір X ліндедефовий.*

Доведення. Нехай $\mathcal{U}$ довільне відкрите покриття простору X. Покладемо $\mathcal{U}_n = \{U \cap X_n : U \in \mathcal{U}\}$ для $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ система $\mathcal{U}_n$ буде відкритим покриттям підпростору X_n. Оскільки X_n є ліндедефовим простором [1, с. 380], то з кожного покриття $\mathcal{U}_n$ можна виділити зліченне підпокриття $\mathcal{V}_n = \{V_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$, де $V_{n,k} = U_{n,k} \cap X_n,$. а $U_{n,k} \in \mathcal{U}$. Покладемо $\mathcal{V} = \{U_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, що $\mathcal{V}$ є зліченним підпокриттям покриття $\mathcal{U}$ простору X. Отже, X ліндедефовий.

Наслідок 1. *Строга індуктивна границя X послідовності локально опуклих метризовних сепарабельних просторів є досконало нормальним простором.*

Доведення. Оскільки, згідно твердження 1, X буде σ-метризовний простір, то, за твердженням 3, він буде також досконалим. Нормальність такої індуктивної границі є наслідком її ліндедефовості (твердження 4), адже вона гаусдорфова, а значить, регулярна.

Таким чином, такі класичні простори, як простір $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел, простір $\mathcal{K}$ фінітних неперервних функцій, а також простір $\mathcal{D}$ пробних функцій Шварца будуть досконало нормальними. Інше доведення досконалої нормальності простору $\mathbb{R}^\infty$ див. в [7]. Досконалу нормальність строгих індуктивних границь сепарабельних просторів Фреше можна було б вивести і з результатів робіт [10,12].

Наслідок 2. *Гаусдорфовий локально опуклий простір, спряжений до якого у сильній топології є метризовним і сепарабельним, буде досконало нормальним відносно своєї слабкої топології.*

Доведення. Досконалість такого простору є, як і раніше, наслідком його σ-метри-
зованості. При доведенні твердження 2 ми показали, що такий простір є об'єднан-
ням сепарабельних метризовних підпросторів. Отже, з твердження 3, випливає ліндедефовість і, як наслідок, нормальність цього простору. (Відносно ліндедефовості WCG-простору в слабкій топодогії див. також [8].)

Зауважимо, що скінченний добуток просторів, таких, як або в наслідку 1, або в наслідку 2, є таким самим простором. Тому має місце

Наслідок 3. *Довільний скінченний добуток просторів, таких, як або в наслідку 1, або в наслідку 2, є досконало нормальним.*

Зауваження. Цікаво було б знати, чи будь-яка строга індуктивна границя послідовності локально опуклих метризовних просторів є досконало нормальним простором?

4. У цьому пункті ми доведемо два твердження про продовження функцій класу α за Бером на досконало нормальних просторах. Вони будуть використовуватися при доведенні основного результату.

Твердження 5. *Нехай X досконало нормальний простір, E замкнений підпростір X, $f : E \to \mathbb{R}$ функція класу α, $\alpha > 0$. Тоді функція $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ для якої $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in E$ і $\tilde{f}(x) = 0$ при $x \in X \setminus E$, є також класу α.*

Доведення будемо проводити індукцією по α. Нехай f першого класу Бера на E. Існує послідовність неперервних функцій $f_n : E \to \mathbb{R}$, така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на E. Згідно теореми Тітце-Урисона [1, ст.75] кожну функцію f_n можна неперервно продовжити на весь простір X до функції $g_n : X \to \mathbb{R}$. Оскільки X досконало нормальний простір, то множина $X \setminus E$ є типу F_σ, тобто $X \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, де (F_n) зростаюча послідовність замкнених множин в X. Очевидно, що $E \cap F_n = \varnothing$ при $n = 1, 2, \dots$. Згідно теореми Веденісова [1, с.82], існують неперервні функції $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$, такі, що $\varphi_n^{-1}(1) = E$ і $\varphi_n^{-1}(0) = F_n$. Покладемо $h_n(x) = g_n(x) \cdot \varphi_n(x)$. Зрозуміло, що h_n неперервні на X функції. Покажемо, що $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \tilde{f}(x)$ для кожного $x \in X$. Справді, це зрозуміло для $x \in E$, бо тоді $h_n(x) = g_n(x) = f_n(x)$. Якщо ж $x \in X \setminus E$, то існує номер n_0, такий, що $x \in F_n$ для всіх $n \geq n_0$, а отже, $h_n(x) = 0$ для всіх $n \geq n_0$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = 0$.

Нехай тепер теорема справедлива для всіх $\alpha < \alpha_0$, де $\alpha_0 > 1$, і $f : E \to \mathbb{R}$ функція класу α_0. Існує послідовність функцій $f_n : E \to \mathbb{R}$, класів, нижчих α_0, більших нуля, така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ при $x \in E$. Покладемо $\tilde{f}_n(x) = f_n(x)$, якщо $x \in E$ і $\tilde{a}_n(x) = 0$, якщо $x \in X \setminus E$. Згідно індуктивного припущення, усі $\tilde{f}_n$ того ж класу, що й f_n, і крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x)$ на X. Отже, $\tilde{f}$ класу α.

Твердження 6. *Нехай X досконало нормальний простір, E замкнений підпростір X, $f : X \to \mathbb{R}$ функція класу α, $g = f|E$, $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ на E, де $g_n : E \to \mathbb{R}$ функції класів, нижчих α. Тоді існує послідовність (f_n) функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ класів, нижчих α, така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на X і $f_n|E = g_n$ для кожного n.*

Доведення. Оскільки X досконало нормальний простір, то $X \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, де (F_n) зростаюча послідовність замкнених множин. Згідно теореми Веденісова, існують неперервні функції $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$, такі, що $\varphi_n^{-1}(1) = E$ і $\varphi_n^{-1}(0) = F_n$. Оскільки f класу α, то існує послідовність функцій h_n класів, нижчих α, яка поточково збігається до f на X. Кожну функцію g_n можна продовжити на весь простір X до функції $\tilde{g}_n$, не змінючи їіі класу (при $\alpha = 0$ це можна зробити згідно теореми Тітце-Урисона, для решти α – за твердженням 5). Тоді для $x \in X$ покладемо $f_n(x) = h_n(x)(1 - \varphi_n(x)) + \tilde{g}_n(x)\varphi_n(x)$. Легко бачити, що функції f_n класів, нижчих α, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на X і $f_n|E = g_n$.

5. Нагадаємо, що сім'я $(h_i)_{i\in I}$ неперервних функцій $h_i : X \to [0,1]$ називається розбиттям одиниці на просторі X, якщо $\sum_{i\in I} h_i(x) = 1$ для всіх $x \in X$. Розбиття одиниці називається локально скінченним, якщо для кожної точки $x_0 \in X$ знайдуться їїі окіл U і скінченна множина $I_0 \subseteq I$, такі, що $h_i(x) = 0$ для всіх $i \in I \backslash I_0$ і $x \in U$. Розбиття одиниці $(h_i)_{i\in I}$ на X підпорядковане покриттю $\mathfrak{B}$ простору X, якщо покриття $\{h_i^{-1}((0,1])\}_{i\in I}$ вписане в $\mathfrak{B}$. Умова існування для кожного відкритого покриття простору X підпорядкованого йому локально скінченного розбиття одиниці є характеристичною для паракомпактності X [1, с.447].

У цьому пункті ми дещо узагальнимо один результат з [3]. А саме, має місце

Теорема 1. *Нехай X метризовний простір, Y топологічний простір, $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ функція, неперервна по першій змінній і класу α по другій змінній. Тоді $f \in B_{\alpha+1}(X \times Y)$.*

Для доведення цієі теореми нам буде потрібна наступна

Лема 2. *Нехай X паракомпакт, Y топологічний простір, $(h_n)_{i\in I}$ локально скінченне розбиття одиниці на X, $(g_i)_{i\in I}$ сім'я функцій класу α на Y, $f(x,y) = \sum\limits_{i\in I} h_i(x)g_i(y)$. Тоді $f \in B_\alpha(X \times Y)$.*

Зауважимо спочатку, що коли α граничне зліченне порядкове число, то існує послідовність (α_n) порядкових чисел $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots < \alpha$, така, що $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Якщо $f \in B_\alpha(Y)$, то існує послідовність (f_n) функцій $f_n \in B_{\alpha_n}(Y)$, така, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$ на Y. Справді, оскільки $f \in B_\alpha(Y)$, то існує послідовність (g_n) функцій $g_n \in B_{\gamma_n}(Y)$, $\gamma_n < \alpha$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(y) = f(y)$ на Y. Знайдеться номер n_1, такий, що $\gamma_1 \le \alpha_{n_1}$. Тоді покладемо $f_{n_1} = g_1$, а $f_1, f_2, \ldots, f_{n_1-1}$ візьмемо довільними з $B_{\alpha_2}(Y), \ldots, B_{\alpha_{n_1}-1}(Y)$ відповідно. Далі, існує номер $n_2 > n_1$, такий, що $\gamma_2 \le \alpha_{n_2}$. Тоді покладемо $f_{n_1+1} = f_{n_1+2} = \cdots = f_{n_2-1} = f_{n_1}$, а $f_{n_2} = g_2$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримаємо шукану послідовність функцій.

Перейдемо до доведення леми 2, яке будемо проводити індукцією по α. У випадку, коли g_i неперервні на Y функції, то неперевність f на X легко випливає з локальної скінченності розбиття одиниці. Нехай тепер лема справедлива для всіх $\alpha < \alpha_0$, де $\alpha_0 > 0$. Якщо α_0 не граничне порядкове число, то для кожного $i \in I$ існує послідовність функцій $g_{i,n} \in B_{\alpha_0-1}(Y)$, така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_{i,n}(y) = g_i(y)$ на Y. Якщо ж $\alpha_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, то, згідно попереднього зауваження, для кожного $i \in I$ існує послідовність функцій $g_{i,n} \in B_{\alpha_n}(Y)$, яка поточково збігається до g_i на Y. Тоді за індуктивним припущенням, функції $f_n(x,y) = \sum_{i\in I} h_i(x)g_{i,n}(y)$ усі будуть класу $\alpha_0 - 1$ у першому випадку і класів $\alpha_n < \alpha_0$ у другому випадку. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ на $X \times Y$. Візьмемо $(x,y) \in X \times Y$. Оскільки $(h_i)_{i\in I}$ локально скінченне розбиття одиниці на X, то існує скінченна множина $I_0 \subseteq I$, така, що $h_i(x) = 0$ для всіх $i \in I \backslash I_0$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i\in I_0} h_i(x)g_{i,n}(y) = \sum_{i\in I_0} h_i(x) \lim\limits_{n\to\infty} g_{i,n}(y) = \sum_{i\in I_0} h_i(x)g_i(y) = f(x,y)$.

Доведення теореми 1. Позначимо через d метрику на X, яка породжує його топологічну структуру. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\mathfrak{B}_n$ позначимо відкрите покриття простору X кулями $B_n(x) = \{u \in X : d(u,x) < 1/2n\}$, де x пробігає весь простір X. Згідно теореми Стоуна [1, с.414] простір X паракомпактний. Тому, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує локально скінченне покриття одиниці $(h_{i,n})_{i \in I_n}$ на X, яке підпорядковане покриттю $\mathfrak{B}_n$ і складається з ненульових функцій. Для кожної пари $(i,n) \in I_n \times \mathbb{N}$ візьмемо точку $x_{i,n} \in X$, таку, що $h_{i,n}(x_{i,n}) > 0$ і для $n \in \mathbb{N}$ і $(x,y) \in X \times Y$ покладемо

$$f_n(x,y) = \sum_{i \in I_n} h_{i,n}(x) f(x_{i,n}, y).$$

Згідно леми 2, функції $f_n \in B_\alpha(X \times Y)$. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ на $X \times Y$. Нехай $(x_0, y_0) \in X \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Маємо

$$|f_n(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)| = |\sum_{i \in I_n} h_{i,n}(x_0) f(x_{i,n}, y_0) - \sum_{i \in I_n} h_{i,n}(x_0) f(x_0, y_0)| \leq$$
$$\leq \sum_{i \in I_n} h_{i,n}(x_0) |f(x_{i,n}, y_0) - f(x_0, y_0)|.$$

Оскільки функція $f(x, y_0)$ неперервна в точці x_0, то існує номер n_0 такий, що для всіх $x \in X$, для яких $d(x, x_0) < 1/n_0$, виконується нерівність $|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$. Розбиття одиниці $(h_{i,n})_i \in I_n$ на X є локально скінченним, тому множина $I_{0,n} = \{i \in I_n : h_{i,n}(x_0) \neq 0\}$ скінченна. Крім того, для всіх $n \geq n_0$ і всіх $i \in I_{o,n}$ відстань $d(x_{i,n}, x_0) < 1/n_0$, бо точки $x_{i,n}$ і x_0 належать носієві функції $h_{i,n}$, який міститься в деякій кулі радіуса $1/2n$ з покриття $\mathfrak{B}_n$. Тому для всіх $n \geq n_0$ будемо мати

$$\sum_{i \in I_n} h_{i,n}(x_0) |f(x_{i,n}, y_0) - f(x_0, y_0)| = \sum_{i \in I_{n,0}} h_{i,n}(x_0) |f(x_{i,n}, y_0) -$$
$$- f(x_0, y_0)| < \sum_{i \in I_{n,0}} h_{i,n}(x_0) \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$.

6. Перейдемо тепер до формулювання і доведення основного результату.

Теорема 2. *Нехай X σ-метризовний простір, Y досконало нормальний простір, такий, що добуток $X \times Y$ досконало нормальний і нехай $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ функція, неперервна по першій змінній і класу α по другій змінній. Тоді $f \in B_{\alpha+1}(X \times Y)$.*

Доведення. Оскільки X σ-метризовний, то $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, де X_n замкнений метризовний підпростір X і $X_n \subseteq X_{n+1}$ при $n = 1, 2, \ldots$. Покладемо $f_n = f|X_n \times Y$. Згідно теореми 1 $f_n \in B_{\alpha+1}(X_n \times Y)$. Зауважимо, що на основі [9] $X_n \times Y$ досконало нормальний простір для кожного n.

Нехай $n = 1$. Тоді існує послідовність (g_k^1) функцій $g_k^1 : X_1 \times Y \to \mathbb{R}$ класів, нижчих $\alpha + 1$, така, що $f_1(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} g_k^1(x,y)$ на $X_1 \times Y$. Візьмемо тепер $n = 2$. Оскільки $f_2|X_1 \times Y = f_1$ і $X_1 \times Y$ замкнений підпростір $X_2 \times Y$, то згідно твердження 6 існує послідовність (g_k^2) функцій $g_k^2 : X_2 \times Y \to \mathbb{R}$ класів, нижчих $\alpha + 1$, така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_k^2(x,y) = f_2(x,y)$ на $X_2 \times Y$ і $g_k^2|X_1 \times Y = g_k^1$, $k = 1, 2, \ldots$. Продовжуючи цей процес до нескіченності, отримаємо послідовності

(g_k^n), $n = 1, 2, \ldots$, функцій $g_k^n : X_n \times Y \to \mathbb{R}$ класів, нижчих $\alpha + 1$, такі, що $\lim_{k\to\infty} g_k^n(x, y) = f_n(x, y)$ при $(x, y) \in X_n \times Y$ і $g_k^{n+1}|X_n \times Y = g_k^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Кожну функцію g_m^m, $m = 1, 2, \ldots$, можна продовжити на весь добуток $X \times Y$ до функції $\tilde{g}_m$, не змінюючи класу (при $\alpha = 0$ це можна зробити згідно теореми Тітце-Урисона, для решти α згідно твердження 5; саме тут використовується досконала нормальність добутку $X \times Y$). Покажемо, що $\lim\limits_{m\to\infty} \tilde{g}_m(x, y) = f(x, y)$ на $X \times Y$. Для $(x, y) \in X \times Y$ існує номер m_0, такий, що $(x, y) \in X_{m_0} \times Y$. Тоді для всіх $m \geq m_0$ точка $(x, y) \in X_m \times Y$, $\tilde{g}_m(x, y) = g_m^m(x, y)$ і g_m^m є продовженням $g_m^{m_0}$. Тому $f(x, y) = f_{m_0}(x, y) = \lim\limits_{m\to\infty} g_m^{m_0}(x, y) = \lim\limits_{m\to\infty} \tilde{g}_m(x, y)$. Отже, $f \in B_{\alpha+1}(X \times Y)$.

7. З результатів пунктів 2 та 3 випливають такі наслідки цієї теореми:

Наслідок 4. *Нехай X і Y строгі індуктивні границі сепарабельних метризовних локально опуклих просторів, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ функція, неперервна по першій змінній і класу α по другій змінній. Тоді $f \in B_{\alpha+1}(X \times Y)$.*

Наслідок 5. *Нехай X і Y гаусдорфові локально опуклі простори, спряжені до яких у сильній топології є метризовними і сепарабельними, що наділені своїми слабкими топологіями, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, така, як і в наслідку 4. Тоді $f \in B_{\alpha+1}(X \times Y)$.*

Наслідок 6. *Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ простори, такі ж як простір X або в наслідку 4, або в наслідку 5, $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to \mathbb{R}$ нарізно неперервна функція по кожній змінній зокрема. Тоді $f \in B_{n-1}(X_1 \times \ldots \times X_n)$.*

Доведення. При $n = 2$ твердження вірне (як наслідок 4 або наслідок 5 з $\alpha = 0$). Припустимо, що воно вірне для $n \leq k$ і покажемо, що воно має місце при $n = k + 1$. Покладемо $Y = X_2 \times \ldots \times X_{k+1}$. Згідно пункту 3 простір Y буде такий самий, як і кожний з просторів X_i. Тоді згідно індуктивного припущення функція $f : X_1 \times Y \to \mathbb{R}$ буде класу $k - 1$ по другій змінній. Отже, на основі наслідку 4 або 5 функція $f \in B_k(X_1 \times Y) = B_k(X_1 \times \ldots \times X_n)$.

На завершення, автори висловлюють подяку Т. Банаху і В. Михайлюку за корисні вказівки, які дозволили істотно покращити первісний варіант роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Энгелькинг Р. Общая топология.– М.: Мир, 1986.– 751с.
2. Бурбаки Н. Топологические векторные постранства.– М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 410 с.
3. Rudin W. *Lebesque first theorem* // Math. Analysis and applications, Part B. Edited by L. Nachbin. Adv. in Math. supplem. studies 7B. Academic Press. – 1981. – P.741–747.
4. Moran W. *Separate continuity and support of measures*// J. London. Math. Soc. – 1969. – 44. – P.320–324.
5. Vera G. *Baire measurability of separately continuous functions*// Quart. J. Math. Oxford. (2). – 1988. – 39. – P.109–116.
6. Собчук О.В. *Нарізно неперервні функції на просторі фінітних послідовностей.* – Чернівці, 1993. – 5 с. – Деп. в ДНТБ України, N1701–Ук93.
7. Маслюченко В.К., Собчук О.В. *Досконала нормальність простору фінітних послідовностей.* – Чернівці, 1991. – 6 с. – Деп. в УкрНДІНТІ, N1610–Ук91.
8. Talagrand M. *Sur une conjecture de H.H. Corson*// Bull. Soc. Math. – 1975. – 99, N4 – P.211-212.
9. Morita K. *On the product of a normal space with a metric space*// Proc. Japan Acad. – 1963. – 39. – P.148–150.
10. Banakh T. *Topology of inductive limits of locally convex spaces,* preprint, 1993.
11. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. л-ры, 1962. – 895 с.
12. Mankiewicz P. *On topological Lipschitz and uniform classification of LF-spaces*// Studia Math. – 1974. – 52. – P.109–142.

Department of Mathematics, Chernivtsi University, Katsyubynskyĭ 2, Chernivtsi, 274000, Ukraine

Надійшло 21.12.1993