Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517, 515.12

ДО ПИТАННЯ ПРО МНОЖИНУ ТОЧОК РОЗРИВУ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

В.В. Михайлюк

Abstract. V.V. Mykhaĭlyuk, *Concerning the set of discontinuity of a separately continuous map* // Matematychni Studii. **3** (1994) 91–94.

One investigates the conditions on topological products $X = \prod_{s\in S} X_s$ and $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ and topological space Z for which there does not exist a separately continuous mapping $f : X \times Y \to Z$ which set of discontinuity consists of the only point. It is shown that if $|X_s| \geq 2$ for every $s \in S$, $|S| > \tau$ for a cardinal τ, $x_0, y_0) \in X\times Y$, $\xi(x_0(s), X_s) \leq \tau$ for every $s \in S$ and Z is a regular space with $\xi(Z) \leq \tau$ then there does not exist a separately continuous mapping $f : X \times Y \to Z$ with set of discontinuity is equal to $\{(x_0, y_0)\}$.

Як це випливає з теореми Наміоки [1], для довільного нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ добутку компактних просторів X і Y існують множина A першої категорії в X і множина B першої категорії в Y такі, що множина точок розриву $D(f)$ відображення f міститься в добутку $A \times B$. В огляді [2] поставлена задача: чи кожна F_σ-множина C, що міститься в добутку $A \times B$ множин першої категорії A і B відповідно в компактних просторах X і Y є множиною точок розриву деякого нарізно неперервного відображення $f : X\times Y \to \mathbb{R}$? В [3,4] показано, що в загальному випадку відповідь на це питання негативна. А саме, показується, що на добутку двох тихоновських кубів X і Y, один з яких має незліченну вагу, не існує нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, множина точок розриву якої є одноточковою. Як зауважив Т.О. Банах, цей результат може бути одержаний за допомогою одного результату Корсона про Σ-добутки [5, с.188]. У цій замітці ми покажемо, що метод, застосований у [4], може бути перенесений на значно загальніші простори, які не підпадають під дію результатів Корсона.

Розпочнемо з теоретико-множинної леми, близької до одного результату Шаніна [5, с.185], що узагальнює відповідну лему з [4]. Нагадаємо деякі поняття. Нехай $\mathcal{A}$ — деяка система множин. Множину $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ позначатимемо через $M(\mathcal{A})$ і називатимемо тілом системи $\mathcal{A}$. Зауважимо, що якщо нескінченна система $\mathcal{A}$ складається з скінченних множин, то виконується рівність $|\mathcal{A}| = |M(\mathcal{A})|$. Для будь-якої множини B систему множин $\mathcal{A}$ будемо називати віялом з ядром B або, коротше, B-віялом, якщо для довільних A_1 і A_2 з $\mathcal{A}$ з умови $A_1 \neq A_2$ випливає $A_1 \cap A_2 \subseteq B$. Якщо B-віяло $\mathcal{A}_1$ є частиною системи $\mathcal{A}$,

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C10.

то будемо говорити, що $\mathcal{A}_1$ є B-віялом в $\mathcal{A}$. Ми говоримо, що B-віяло $\mathcal{A}_1$ можна продовжити, якщо існує така множина $A \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_1$, що система $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{A\}$ також є B-віялом. Для довільної системи $\mathcal{A}$ і множини $N \subseteq M(\mathcal{A})$ через $\mathcal{A}(N)$ позначатимемо систему $\{A \in \mathcal{A} : N \subseteq A\}$.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система скінченних множин, кожна з яких має не більше ніж l елементів, і $|\mathcal{A}| > n$, де n – деяке нескінченне кардинальне число. Тоді існують така скінченна множина $B \subseteq M(\mathcal{A}) = M$, що складається не більше ніж з l елементів, і система $\tilde{\mathcal{A}}$ потужності, більшої n, яка є B-віялом в $\mathcal{A}$.*

Доведення. Покажемо спочатку, що існує така множина B, яка складається не більше ніж з l елементів, що кожне B-віяло потужності $\le n$ можна продовжити в $\mathcal{A}$. Нехай це не так. Тоді для кожної множини B, що має не більш ніж l елементів, існує B-віяло потужності $\le n$, яке не можна продовжити. Почнемо з порожньої множини $B_0 = \varnothing$. Нехай $\mathcal{A}_0$ – таке B_0-віяло потужності $\le n$, яке не можна продовжити в $\mathcal{A}$, і $M_0 = M(\mathcal{A})$. Тоді для кожної множини A із системи $\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_0$ маємо $A \cap M \ne \varnothing$, звідки $\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_0 \subseteq \cup_{x\in M_0}\mathcal{A}(x)$. Оскільки $|\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_0| > n$ і $|M_0| \le n$, то існує таке $x_1 \in M_0$, що $|\mathcal{A}(x_1)| > n$. Тепер покладемо $B_1 = \{x_1\}$, і нехай $\mathcal{A}_1$ – таке B_1-віяло потужності $\le n$, яке не можна продовжити в $\mathcal{A}$, і $M_1 = M(\mathcal{A}_1)$. Тоді для кожної множини A з системи $\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_1$ маємо $A \cap (M_1\backslash B_1) \ne \varnothing$. Тому $\mathcal{A}(x_1)\backslash\mathcal{A}_1 \subseteq \cup_{x\in M_1\backslash B_1} A(x_1, x)$. Оскільки $|\mathcal{A}(x_1)\backslash\mathcal{A}_1| > n$ і $|M_1\backslash B_1| \le |M_1| \le n$, то існує таке $x_2 \in M_1\backslash B_1$, що $|\mathcal{A}(x_1, x_2)| > n$.

Провівши аналогічні міркування $l + 1$ раз, ми одержимо набір елементів $x_1, x_2, \dots, x_{l+1}$ таких, що $|\mathcal{A}(x_1, \dots, x_{l+1}| > n$. Зауважимо, що всі x_i різні. Адже, $x_i \in M_{i-1}\backslash B_{i-1}$, де $B_{i-1} = \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Таким чином, ми прийшли до суперечності, бо за умовою всі множини з $\mathcal{A}$ складаються не більше ніж з l елементів, а значить, $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_{l+1}) = \varnothing$.

Позначимо через $\mathfrak{A}_B$ систему всіх B-віял в $\mathcal{A}$, де B – множина, існування якої щойно доведено. Впорядкуємо систему $\mathfrak{A}_B$ відношенням включення. За лемою Куратовського-Цорна в $\mathcal{A}$ існує максимальне B-віяло $\tilde{\mathcal{A}}$. Оскільки це B-віяло не можна продовжити в $\mathcal{A}$, то $|\tilde{\mathcal{A}}| > n$. Лему доведено.

Зауважимо, що індукцією за кількістю елементів в множині B можна домогтися, щоб, аналогічно як у відповідному результаті Шаніна, для довільних різних A_1 і A_2 з $\tilde{\mathcal{A}}$ виконувалось $A_1 \cap A_2 = B$.

Центральне місце в доведенні основного результату даної замітки займає наступна

Теорема 1. *Нехай $X = \prod\limits_{t\in T} X_t$ — топологічний добуток просторів X_t, $a \in X$, характери $\chi(a(t), X_t) = n_t \le n$ де n – деяке нескінченне кардинальне число, Y регулярний топологічний простір, $f : X \to Y$ і S – така підмножина T, що $|S| > n$, $|X_s| \ge 2$ для кожного $s \in S$ і для будь-якого $x \in X$ з умови $x|T\backslash S = a|T\backslash S$ випливає, що $f(x) = f(a)$. Тоді множина $D(f)$ точок розриву відображення f не дорівнює $\{a\}$.*

Доведення. Припустимо, що $D(f) = \{a\}$. Для кожного $s \in S$ виберемо таке $x^{(s)} \in X_s$, що $x^{(s)} \ne a(s)$, і покладемо

$$x_s(t) = \begin{cases} a(t), & t \in T\backslash\{s\}, \\ x^{(s)}, & t = s. \end{cases}$$

Маємо $x_s \neq a$, але $x_s|T\setminus\{s\} = a|T\setminus\{s\}$, отже, тим більше $x_s|T\setminus S = a|T\setminus S$, тому $f(x_s) = f(a) = y_0$. Оскільки $D(f) = \{a\}$, то існує такий окіл V точки y_0, що для довільного околу U точки a маємо $f(U) \not\subseteq V$. Позначимо через V_0 такий окіл точки y_0, що $\bar{V}_0 \subseteq V$ і нехай $\mathcal{U}_t = \{U(\xi, t) : \xi \in \Xi_t\}$ – така база околів точки $a(t)$ в просторі X_t, що $|\Xi_t| = n_t$. Оскільки функція f неперервна в кожній точці x_s, то для кожного s існують скінченна підмножина T_s множини T, для якої $s \in T_s$, околи $U(\xi_{s,t}, t) \in \mathcal{U}_t$ для кожного $t \in T_s\setminus\{s\}$ і окіл $U(s)$ точки $x^{(s)}$ в просторі X_s, такі, що для околу $U_s = \{x \in X : x(t) \in U(\xi_{s,t}, t), t \in T_s\setminus\{s\}, x(s) \in U(s)\}$ точки x_s матимемо $f(U_s) \subseteq V_0$. Покладемо $S_n = \{s \in S : |T_s| \leq n\}$. Оскільки всі T_s скінченні, а $|S| > n \geq \aleph_0$, то існує такий номер n_0, що $|S_{n_0}| > n$. Розглянемо систему $\mathcal{A} = \{T_s : s \in S_{n_0}\}$. Оскільки $s \in T_s$ і $|T_s| \leq n_0$ для кожного $s \in S_{n_0}$, то $|\mathcal{A}| = |M(\mathcal{A})| \geq |S_{n_0}| > n$. Тому до системи $\mathcal{A}$ можна застосувати лему. Отже, існують така скінченна множина $B \subseteq S_{n_0}$ і така множина $S_0 \subseteq S_{n_0}$ потужності $> n$, що для довільних різних елементів s_1 і s_2 із S_0 маємо $T_{s_1} \neq T_{s_2}$ і система $\{T_s : s \in S_0\}$ є B-віялом. Зазначимо, що можна вважати, що $B \cap S_0 = \varnothing$, бо інакше замість множини S_0 можна взяти множину $S_0\setminus B$.

Нехай $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ і візьмемо таке α_0, що $\alpha_0 \notin \bigcup\limits_{t\in B} \Xi_t$. Тепер кожній точці $s \in S_0$ поставимо у відповідність k-вимірний вектор $\beta_s = (\beta_1^{(s)}, \ldots, \beta_k^{(s)})$ за таким правилом:

$$\beta_i^{(s)} = \begin{cases} \alpha_0, & b_i \notin T_s \\ \xi_{s,t}, & b_i \in T_s. \end{cases}$$

Зауважимо, що оскільки $|\Xi_{b_i}| = n_{b_i} \geq n$, то різних таких векторів β_s може бути не більше ніж n. Але $|S_0| > n$, тому існує такий вектор $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, що потужність множини $\tilde{S}_0 = \{s \in S_0 : \beta_s = \beta\}$ більша n. Покладемо $B_0 = \{b_i \in B : \alpha_i \neq \alpha_0\}$. Розглянемо окіл $U_0 = \{x \in X : x(b_i) \in U(\alpha_i, b_i), b_i \in B_0\}$ точки a. Із вибору околу V випливає, що існує така точка $\tilde{x} \in U_0$, що $f(\tilde{x}) = \tilde{y} \notin V$. Виберемо окіл $\tilde{V}$ точки $\tilde{y}$ в Y, такий, що $\tilde{V} \cap V_0 = \varnothing$ і скористаємось неперервністю функції f в точці $\tilde{x}$. Розглянемо окіл $\tilde{U} = \{x \in X : x(t) \in \tilde{U}(t), t \in \tilde{T}\}$ точки $\tilde{x}$, де $\tilde{U}(t)$ – деякий окіл $\tilde{x}(t)$ в просторі X_t, а $\tilde{T}$ – скінченна підмножина множини T, такий, що $f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$. Оскільки $f(U_s) \subseteq V_0$, а $V_0 \cap \tilde{V} = \varnothing$, то $\tilde{U} \cap U_s = \varnothing$ для кожного $s \in \tilde{S}_0$. А це означає, що для кожного $s \in \tilde{S}_0$ існує така точка $t_s \in \tilde{T} \cap T_s$, що $\tilde{U}(t_s) \cap U(\xi_{s,t_s}, t_s) = \varnothing$ або $\tilde{U}(s) \cap U(s) = \varnothing$, якщо $t_s = s$. Покажемо, що $t_s \notin B$, або, що те ж саме, $t_s \notin B_0$. Якщо $t_s \in B_0$, то $\tilde{x}(t_s) \in U(\alpha_i, b_i) = U(\xi_{s,t_s}, t_s)$ для деякого i. Крім того, $\tilde{x}(t_s) \in \tilde{U}(t_s)$, бо $\tilde{U}(t_s)$ – окіл точки $\tilde{x}(t_s)$ в просторі X_{t_s}. Тому $U(\xi_{s,t_s}, t_s) \cap \tilde{U}(t_s) \neq \varnothing$. А умови $t_s = s$ і $t_s \in B_0$ не можуть виконуватись одночасно, бо $B \cap \tilde{S}_0 = \varnothing$. Отже, для кожного $s \in \tilde{S}_0$ виконується $t_s \notin B$. Оскільки система $\{T_s : s \in \tilde{S}_0\}$ є B-віялом і для різних s множини T_s різні, то точки t_s повинні бути всі різними. Але $|\tilde{S}_0| > n$, а множина $\tilde{T}$ скінченна і повинна містити множину $\{t_s : s \in \tilde{S}_0\}$, що неможливо. Таким чином, теорему доведено.

Тепер доведемо основний результат.

Теорема 2. *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$, $|X_s| \geq 2$ *для кожного* $s \in S$, $|S| > n$, *де* n *– деяке нескінченне кардинальне число,* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, $\chi(x_0(s), X_s) \leq n$ *для кожного* $s \in S$, Z *– регулярний топологічний простір,* $\chi(S) \leq n$. *Тоді не існує такої функції* $f : X \times Y \to Z$, *для якої функція* $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ *неперервна і множина* $D(f)$ *точок розриву функції* f *дорівнює* $\{(x_0, y_0)\}$.

Доведення. Припустимо, що така функція існує. Ми можемо вважати, що $T \cap S = \varnothing$. Позначимо $Q = T \cup S$ і розглянемо простір $P = \prod\limits_{q \in Q} P_q$, де $P_q = \begin{cases} X_s, & q = s \in S, \\ Y_t, & q = t \in T \end{cases}$. Відображення $j : P \to X \times Y$, $j(p) = (p|S, p|T)$ є гомеоморфізмом. Покладемо $g = f \circ j$ і $p_0 = j^{-1}(x_0, y_0)$. Зрозуміло, що множина $D(g)$ точок розриву відображення g дорівнює $\{p_0\}$.

Нехай $f(x_0, y_0) = z_0$, $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$ – така база околів точки z_0 в просторі Z, що $|A| \leq n$. Оскільки f_{y_0} – неперервне відображення в точці x_0, то для кожного $\alpha \in A$ існує такий окіл $U_\alpha = \{x \in X : x(s) \in U(\alpha, s), s \in S_\alpha\}$ точки x_0, де $U(\alpha, s)$ – окіл точки $x_0(s)$ в просторі X_s, а S_α – скінченна підмножина множини S, що $f_{y_0}(U_\alpha) \subseteq W_\alpha$. Покладемо $F = \cap_{\alpha \in A} U_\alpha$, $S' = \cup_{\alpha \in A} S_\alpha$. Зазначимо, що $f_{y_0}(F) \subseteq \cap_{\alpha \in A} W_\alpha = \{z_0\}$, і $|S'| \leq n\aleph_0 = n$. Якщо для деякого $x \in X$ виконується $x|S' = x_0|S'$, то $x \in F$, а отже, $f_{y_0}(x) = z_0$. Перейшовши тепер до відображення g, будемо мати, що якщо для деякого p з простору P виконується $P|_{S' \cup T} = p_0|_{S' \cup T}$, то $g(p) = g(p_0)$. Нагадаємо, що $|S| > n$, а тому $|Q \backslash (S' \cup T)| = |S \backslash S'| > n$. Застосувавши до функції g попередню теорему, одержимо $D(g) \neq \{p_0\}$, що приводить до суперечності.

На завершення цієї замітки я хочу висловити щиру подяку В.К. Маслюченкові за постановку задачі і постійну увагу до даної роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Namioka J. *Separate continuity and joint continuity* // Pacif. J. Math. 1974. V.51, No 2. P. 515–531.
2. Piotrowski Z. *Separate and joint continuity* // Real Anal. Exch. 1985-86. V.11, No 2. P.293–322.
3. Михайлюк В.В. *Про нарізно неперервні фунції на добутках тихоновських кубів.* – Чернівці, 1991 – 8с. – Деп. в УкрНДІНТІ, N1638–Ук91.
4. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень* // Укр. мат. журн. 1992. Т.44, № 9. С.1209–1220.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. – М:Мир, 1986. – 751с.

Department of Mathematics, Chernivtsi University, Kotsyubynska 2, Chernivtsi, 274000, Ukraine

Надійшло 21.12.1993