Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517.53

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЗБУРЕНЬ ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ НА НЕЗАЛЕЖНУ ЗМІННУ

М.І. Нагнибіда, Л.Г. Баб'юк

Abstract. M. Nahnybida, L.G. Babyuk, *On the equivalence of the integral perturbations of the multiplication operator by the independent variable* // Matematychni Studii. **3** (1994) 85–90.

Let A_R $(0 < R \le \infty)$ be the space of all single-valued functions, analytical in the disk $|z| < R$, equipped with the topology of compact convergence, and $a(z), b(z) \in A_R$ be fixed functions. Denote by U the multiplication operator by the independent variable in this space (i.e. $(Uf)(z) = zf(z),\ f \in A_R$), and let $(Af)(z) = (Uf)(z) + \int_0^z a(z-\xi)f(\xi)d\xi$ and $(Bf)(z) = (Uf)(z) + \int_0^z b(z-\xi)f(\xi)d\xi$.

In this note necessary and sufficient conditions for equivalence of operators A and B in the mentioned space are found.

Через A_R $(0 < R \le \infty)$ позначимо простір всіх однозначних аналітичних у крузі $|z| < R$ функцій з топологією компактної збіжності. Нехай $U : (Uf)(z) = zf(z)(\forall f \in A_R)$ – оператор множення на незалежну змінну в цьому просторі, $a(z)$ і $b(z)$ – фіксовані функції з A_R, а $(Af)(z) = zf(z) + \int_0^z a(z-\xi)f(\xi)d\xi$ і $(Bf)(z) = zf(z) + \int_0^z b(z-\xi)f(\xi)d\xi$ – відповідні інтегральні збурення оператора U в A_R. Мета цієї роботи – відшукання необхідних і достатніх умов еквівалентності операторів A і B у вказаному просторі, тобто умов, при виконанні яких існує таке взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення (або ж ізоморфізм) T простору A_R на себе, що $TA = BT$.

Зауважимо, що коли $a(z) \equiv 0$, а $b(0) = 0$, то відповідна задача розглянута в [1]. В цій роботі еквівалентність операторів A і B в A_R буде досліджена повністю в загальному випадку і, таким чином, результат роботи [1] буде відповідно узагальнено.

1. Насамперед будемо вважати, що $a(0) = d(0)$, і покажемо, що при зроблених припущеннях існує така функція $x(z)$ з A_R, для якої

$$\Big(E + \int_0^z x(z-\xi)\cdot d\xi\Big)\Big(U + \int_0^z a(z-\xi)\cdot d\xi\Big) = \\ = \Big(U + \int_0^z b(z-\xi)\cdot d\xi\Big)\Big(E + \int_0^z x(z-\xi)\cdot d\xi\Big) \quad (1)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A55.

(тут E – оператор тотожного перетворення простору A_R на себе). Це означатиме, що оператори A і B еквівалентні між собою, а за один з операторів перетворення A в B можна взяти ізоморфізм (див. [2]) $T = E + \int_0^z x(z-\xi)\cdot d\xi$.

Оскільки операторна рівність (1) рівносильна тому, що $\forall f \in A_R$

$$zf(z)+\int_0^z a(z-\xi)f(\xi)d\xi+\int_0^z x(z-\xi)\xi f(\xi)d\xi+\int_0^z x(z-\xi)\int_0^\xi a(\xi-t)f(t)dtd\xi=$$
$$=zf(z)+z\int_0^z x(z-\xi)f(\xi)d\xi+\int_0^z b(z-\xi)f(\xi)d\xi+\int_0^z b(z-\xi)\int_0^\xi x(\xi-t)f(t)dtd\xi,$$

то зауважимо, що

$$\int_0^z x(z-\xi)\int_0^\xi a(\xi-t)f(t)dtd\xi=\int_0^z\left(\int_t^z x(z-\xi)a(\xi-t)d\xi\right)f(t)dt=$$
$$=\int_0^z\left(\int_0^{z-t} x(\xi)a(z-\xi-t)d\xi\right)f(t)dt=\int_0^z\left(\int_0^{z-\xi} x(t)a(z-\xi-t)dt\right)f(\xi)d\xi.$$

Аналогічно

$$\int_0^z b(z-\xi)\int_0^\xi x(\xi-t)f(t)dtd\xi=\int_0^z\left(\int_0^{z-\xi} b(t)x(z-\xi-t)dt\right)f(\xi)d\xi.$$

Тому, якщо врахувати довільність f з A_R , шукана функція $x(z)$ повинна бути розв'язком рівняння

$$a(z-\xi)+\xi x(z-\xi)+\int_0^{z-\xi} x(t)a(z-\xi-t)dt=zx(z-\xi)+b(z-\xi)+\int_0^{z-\xi} b(t)x(z-\xi-t)dt,$$

або ж рівняння

$$a(z)-b(z)-zx(z)+\int_0^z x(t)a(z-t)dt-\int_0^z b(t)x(z-t)dt=0. \qquad (2)$$

Оскільки для довільних функцій $\alpha(z)=\sum_{i=0}^\infty \alpha_i z^i$ і $\beta(z)=\sum_{i=0}^\infty \beta_i z^i$ з простору A_R, очевидно,

$$\int_0^z \alpha(z-\xi)\beta(\xi)\,d\xi=\sum_{l,n=0}^\infty \alpha_l\beta_n\sum_{\nu=0}^l \frac{(-1)^{l-\nu}C_l^\nu}{n+l-\nu+1}z^{n+l+1}$$

і, як показано в [3],

$$\sum_{\nu=0}^k \frac{(-1)^{k-\nu}C_k^\nu}{s-\nu+1}=\frac{k!(s-k)!}{(s+1)!}\quad (0\le k\le s; s,k\in\mathbb{N}),$$

то

$$\int_0^z \alpha(z-\xi)\beta(\xi)d\xi=\sum_{m=0}^\infty\sum_{l=0}^m \alpha_l\beta_{m-l}\sum_{\nu=0}^l\frac{(-1)^{l-\nu}C_l^\nu}{m-\nu+1}z^{m+1}=$$
$$=\sum_{m=0}^\infty\sum_{l=0}^m \alpha_l\beta_{m-l}\frac{l!(m-l)!}{(m+1)!}z^{m+1}.$$

Іншими словами (див. (2)), тейлорові коефіцієнти x_k шуканої функції $x(z)$ з A_R повинні знаходитися з системи рівнянь

$$a_{m+1} - b_{m+1} - x_m + \sum_{l=0}^{m} (a_{m-l} - b_{m-l}) \frac{l!(m-l)!}{(m+1)!} x_l = 0.$$

Звідси з врахуванням припущення $a(0) = b(0)$ маємо:

$$\begin{gathered} x_0 = a_1 - b_1, \\ x_m = a_{m+1} - b_{m+1} + \sum_{l=0}^{m-1} (a_{m-l} - b_{m-l}) \frac{l!(m-l)!}{(m+1)!} x_l (m \geq 1). \end{gathered} \tag{3}$$

Оскільки рекурентні співвідношення (3) визначають послідовність $(x_m)_{m=0}^{\infty}$ однозначно, то переконаємося ще в тому, що відповідна функція $x(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} x_m z^m$ належить до простору A_R. А з цією метою покажемо, що $\forall \rho, \ \ \rho < R, \exists C \geq 0 :$

$$|x_m| \leq C\rho^{-m} (m = 0, 1, \dots). \tag{4}$$

Отже, нехай число ρ, $\rho < R$, задано. Візьмемо числа ρ_1 $(\rho < \rho_1 < R)$ і $C_1 \geq 0$ так, щоб (з врахуванням оцінок Коші для тейлорових коефіцієнтів)

$$|a_{m+1} - b_{m+1}| \leq C_1 \rho_1^{-1} (m \geq 0). \tag{5}$$

Нехай тепер $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що при $m \geq m_0$

$$C_1 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^m + \frac{1}{m+1} \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} \right] \leq 1. \tag{6}$$

Знайдемо, далі, $C \geq 1$ з умови

$$|x_m| \leq C\rho^{-m} \quad (m = 0, 1, \dots, m_0 - 1). \tag{7}$$

Тоді за допомогою оцінок (5)–(7) дістанемо:

$$\begin{aligned} |x_{m_0}| \leq C_1 \rho^{-m} + \frac{1}{m_0 + 1} \sum_{l=0}^{m_0 - 1} C_1 \rho_1^{-m_0 + l} C \rho^{-l} = \\ = C\rho^{-m_0} \left[\frac{C_1}{C} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{m_0} + \frac{C_1}{m_0 + 1} \sum_{l=0}^{m_0 - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{m_0 - l} \right] \leq \\ \leq C\rho^{-m_0} \left[C_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{m_0} + \frac{C_1}{m_0 + 1} \cdot \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} \right] \leq C\rho^{-m_0}. \end{aligned}$$

Щоб переконатися тепер в справедливості оцінок (4) для всіх $m \geq 0$, залишається, звичайно, скористатися методом математичної індукції .

Отже, ми можемо зробити такий висновок.

Твердження 1. *Якщо $a(z)$ і $b(z)$ – фіксовані функції з простору A_R, причому $a(0) = b(0)$, то оператори $U + \int_0^z a(z-\xi)\cdot d\xi$ і $U + \int_0^z b(z-\xi)\cdot d\xi$ еквівалентні між собою.*

Зауваження. Як видно із співвідношень (2), умова $a(0) = b(0)$ є також необхідною для існування оператора перетворення A в B вигляду $E + \int_0^z x(z-\xi)\cdot d\xi$.

2. Повертаючись тепер до питання про еквівалентність операторів A і B без будь-яких додаткових припущень, зауважимо, що на підставі твердження 1 оператор A завжди еквівалентний в просторі A_R до простішого оператора $A_0 = U + a(0)J$, а B – до $B_0 = U + b(0)J$. Таким чином, оператори A і B еквівалентні в A_R між собою тоді і лише тоді, коли еквівалентними є оператори A_0 і B_0. Але A_0 і B_0 – це оператори узагальненого інтегрування в A_R, оскільки

$$A_0 z^k = \left(1 + \frac{a(0)}{k+1}\right) z^{k+1} \quad \text{і} \quad B_0 z^k = \left(1 + \frac{b(0)}{k+1}\right) z^{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

У зв'язку з цим визначимо оператори узагальненого інтегрування в A_R за допомогою співвідношень $J_\gamma z^k = \gamma_k z^{k+1}$ і $J_\delta z^k = \delta_k z^{k+1}$ $(k \ge 0)$, де $(\gamma_k)_{k=0}^\infty$ і $(\delta_k)_{k=0}^\infty$ – задані послідовності комплексних чисел, які задовольняють умови:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\gamma_k|} \le 1 \quad \text{і} \quad \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\delta_k|} \le 1 \ \text{ при } \ R < \infty, \tag{8}$$

або ж

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\gamma_k|} < +\infty \ \text{ і } \ \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\delta_k|} < +\infty \ \text{ при } R = \infty. \tag{9}$$

Зауваживши (див. [2]), що умови (8), (9) гарантують (і є при цьому необхідними!) неперервність операторів J_γ і J_δ в просторі A_R, дослідимо визначені оператори на еквівалентність між собою в припущенні, що $\gamma_k \ne 0$ і $\delta_k \ne 0$ $(\forall k \ge 0)$.

Покладемо $\gamma_k! \equiv \gamma_0\gamma_1\dots\gamma_k$ і $\delta_k! \equiv \delta_0\delta_1\dots\delta_k$ $(k \ge 0)$. Тоді якщо існує такий ізоморфізм T простору A_R на себе, що $TJ_\gamma = J_\delta T$, і $[t_{i,k}]$ – його матриця (тобто $Tz^k = \sum_{i=0}^\infty t_{i,k}z^i$, $(k \ge 0)$, то $\gamma_k \sum_{i=0}^\infty t_{i,k+1}z^i = \sum_{i=0}^\infty t_{i.k}\delta_i z^{i+1}$ $(k \ge 0)$ і тому

$$\begin{cases} \gamma_k t_{0,k+1} = 0 & (k \ge 0), \\ \gamma_k t_{i+1,k+1} = \delta_i t_{i,k} & (i, k \ge 0). \end{cases} \tag{10}$$

Звідси, зокрема, випливає, що матриця оператора T є нижньотрикутною (тобто $t_{i,k} = 0$ при $i < k$) і що $t_{k+1,k+1} = (\delta_k!/\gamma_k!)\, t_{0,0}$ $(k \ge 0)$, причому $t_{0.0} \ne 0$. Тому (див. [2])

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,(\delta_k!/\gamma_k!)\,|} = 1 \ \text{ при } R < \infty \tag{11}$$

або

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,(\delta_k!/\gamma_k!)\,|} \le \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,(\delta_k!/\gamma_k!)\,|} < +\infty \ \text{ при } R = \infty. \tag{12}$$

Умови (11) і (12) є і достатніми для еквівалентності операторів J_γ і J_δ у відповідних просторах A_R. При їх виконанні за один з операторів T перетворення J_γ в J_δ можна взяти діагональний ізоморфізм, що визначається співвідношеннями $Tz^k = t_k z^k$ $(k \ge 0)$, де $t_0 \ne 0$, а $t_{k+1} = \left(\frac{\delta_k!}{\gamma_k!}\right) t_0$ $(k \ge 0)$.

Твердження 2. *Якщо посдідовності $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$ і $(\delta_k)_{k=0}^{\infty}$ відмінних від нуля комплексних чисел задовольняють умови (8) чи (9), то породжені ними оператори J_γ і J_δ є еквівалентними в просторі A_R тоді і лише тоді, коли виконуються умови (11) або (12).*

На підставі цього легко переконатися в справедливості наступного твердження.

Наслідок. *Якщо $a(z)$ і $b(z)$ – фіксовані функції з простору A_R, причому числа $-a(0)$ і $-b(0)$ не є натуральними, то відповідні оператори A і B еквівалентні між собою.*

Зауважимо також, що за допомогою твердження 2 можна знаходити умови еквівалентності й для деяких інших операторів. Наприклад, якщо розглянути оператор $z^s J^n$ $(s, n \in \mathbb{N})$, то його можна подати у вигляді J_α^{s+n}, де J_α – оператор узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва (див. [2]), що визначається послідовністю $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, де

$$\alpha_{k(s+n)+j} = \frac{\prod_{\nu=0}^{k-1}[\nu(s+n)+j]!}{\prod_{\nu=0}^{k-1}[\nu(s+n)+n+j]!}\alpha_j \ (k = 0, 1, \dots;\ 0 \le j \le s+n-1; \quad \alpha_j \ne 0),$$

тобто $J_\alpha z^k = \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} z^{k+1}, k \ge 0$. Тому завжди можна віднайти "простішу" послідовність $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ таку, що оператор $z^s J^n$ буде еквівалентним в A_R до J_β^{s+n}.

Аналогічне до наведеного вище твердження легко встановити і для операторів D_α і D_β узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва (див. [2]).

3. Залишається ще розглянути питання про еквівалентність в A_R операторів A_0 і B_0 тому випадку, коли хоча б одне серед чисел $-a(0)$ і $-b(0)$ є натуральним.

Отже, припустимо, що, наприклад, $a(0) = -s-1$ (s – ціле невід'ємне число), а оператори A_0 і B_0 еквівалентні між собою. Тоді існує такий ізоморфізм T з матрицею $[t_{i,k}]$, що $TA_0 = B_0 T$. Звідси для довільного $k \ge 0$ дістаємо, що $TA_0 z^k = = B_0 T z^k$ і

$$\sum_{i=0}^{\infty} t_{i,k+1} \frac{k-s}{k+1} z^i = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i,k} \left[1 + \frac{b(0)}{i+1}\right] z^{i+1},$$

а тому

$$\begin{cases} \dfrac{k-s}{k+1} t_{0,k+1} = 0 & (k \ge 0), \\ \dfrac{k-s}{k+1} t_{i+1,k+1} = \left(1 + \frac{b(0)}{i+1}\right) t_{i,k} & (i, k \ge 0). \end{cases} \tag{13}$$

З другого серед цих співвідношень при $k = s$ випливає, що необхідно $b(0) = -l-1$ (l – також деяке ціле невід'ємне число), оскільки в протилежному випадку було би $t_{i,s} = 0$ $(\forall i \ge 0)$, що для матриці ізоморфізму T неможливо.

Будемо вважати, що $s < l$ (якщо $s = l$, то оператори A_0 і B_0 просто співпадають і їх еквівалентність доведення не потребує, а при $l < s$ слід було би перейти до оператора T^{-1} і рівності $T^{-1}B_0 = A_0 T^{-1}$). Перепишемо в цьому випадку співвідношення (13) у вигляді

$$\begin{cases} \frac{k-s}{k+1} t_{0,k+1} = 0 & (k \ge 0), \\ \frac{k-s}{k+1} t_{i+1,k+1} = \frac{i-l}{i+1} t_{i,k} & (i, k \ge 0). \end{cases} \tag{14}$$

Звідси отримуємо, що $t_{0,k+1} = 0$ при $k \neq s$ і тому в нульовому рядку матриці $[t_{i,k}]$ відмінними від нуля можуть бути лише елементи $t_{0,0}$ і $t_{0,s+1}$. Але $t_{i,s} = 0$ при $i \neq l$ і, зокрема, $t_{s,s} = 0$, а з врахуванням рекурентних співвідношень $(k-s)t_{k+1,k+1} = = (k-l)t_{k,k}$ $(k < s)$ $t_{0,0} = 0$. Отже, в нульовому рядку матриці $[t_{i,k}]$ відмінним від нуля є лише $t_{0,s+1}$.

Очевидно також (див. (14)), що $t_{l+1,k+1} = 0$ при $k \neq s$, а із співвідношень $t_{i,s} = 0$ при $i \neq l$ (і, зокрема, рівностей $t_{l+1+s,s} = 0$ та $\frac{k+1}{l+1+k+1}t_{l+1+k,k} = \frac{k-s}{k+1}t_{(l+1)+k+1,k+1}$ $(i,k \geq 0)$) випливає, що $t_{l+1,0} = 0$. Це означає, що в $(l+1)$-му рядку матриці $[t_{i,k}]$ відмінним від нуля є лише елемент $t_{l+1,s+1}$.

Визначимо (див. [4]) тепер на просторі A_R лінійний неперервний функціонал

$$\Gamma(f) = \gamma_0 f(0) + \gamma_{l+1}\frac{f^{(l+1)}(0)}{(l+1)!},$$

де відмінні від нуля числа γ_0 і γ_{l+1} пов'язані між собою співвідношенням

$$\gamma_0 t_{0,s+1} + \gamma_{l+1}t_{l+1,s+1} = 0.$$

Для цього функціоналу Γ буде, очевидно, $\Gamma(Tz^k) = 0$ $(k = 0,1,\dots)$ і тому система $\left(Tz^k\right)_{k=0}^{\infty}$ не може бути повною в просторі A_R. А це суперечить тому, що T – ізоморфізм цього простору.

Отже, справедливе таке твердження.

Твердження 3. *Якщо $a(z)$ і $b(z)$ – фіксовані функції з простору A_R, $a(0) \neq b(0)$ і серед чисел $-a(0)$ і $-b(0)$ хоч одне є натуральним, то відповідні оператори A і B не можуть бути еквівалентними в A_R.*

Залишається підсумувати все сказане вище і сформулювати головний результат цієї роботи.

Теорема. *Нехай $a(z), b(z) \in A_R$. Тоді для еквівалентності операторів $U + \int_0^z a(z-\xi)\cdot d\xi$ і $U + \int_0^z b(z-\xi)\cdot d\xi$ в A_R необхідно і досить, щоб виконувалась одна з умов:*
a) $a(0) = b(0)$;
b) $-a(0), -b(0) \notin \mathbb{N}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Нагнибида Н.И. *Об интегральных возмущениях оператора умножения на независимую переменную* // Докл. АН СССР. 1987. Т.292, № 3. С.542–545.
2. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. – Новосибирск : Изд.-во "Наука", 1987. – 280 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108с.
4. Маркушевич А.И. *О базисе в пространстве аналитических функций*// Матем. сборник. 1945. Т.17, № 2. С.211–252.

Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

Надійшло 29.10.1993