Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517.5

ОДНЕ ЗАУВАЖЕННЯ ЩОДО ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ОПЕРАТОРІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ В ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

М.І. Нагнибіда

Abstract. M. Nahnybida, *One remark concerning equivalence of general differentiation operators in the spaces of analytic functions* // Matematychni Studii. **3** (1994) 79–84.

Let A_R $(0 < R \le \infty)$ be the space of all single-valued analytical in the disk $|z| < R$ functions, equipped with the topology of compact convergence, and D_α be the Gelfond-Leontiev operator of generalized differentiation, generated by a function $\alpha(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ $(\alpha_k \ne 0)$, i.e.

$$(D_\alpha f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \cdot \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} z^k \quad (\forall f \in A_R).$$

Necessary and sufficient conditions are found for equivalence in A_R of the operators D_α and $D_\alpha + aE$ where $a \in \mathbb{C}$ $(a \ne 0)$, and E is the identity operator.

Через A_R $(0 < R \le \infty)$ позначимо простір всіх однозначних і аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ функцій з топологією компактної збіжності. Нагадаємо, що в цих просторах кожний звичайний лінійний диференціальний оператор вигляду

$$L = D^p + a_1(z)D^{p-1} + \dots + a_{p-1}(z)D + a_p(z)E \tag{1}$$

(тут $D = \dfrac{d}{dz}$; $a_k(z) \in A_R$, $k = 1, 2, \dots, p$; $p \in \mathbb{N}$; E – оператор тотожнього перетворення) завжди еквівалентний до простішого оператора D^p (цей факт позначається так: $L \sim D^p$), тобто існує таке взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення T (ізоморфізм простору A_R на себе), що $L = TD^pT^{-1}$ (або ж $LT = TD^p$). При цьому серед всіх операторів T перетворення D^p в L можна вибрати такий, що

$$(D^\nu T f)(0) = f^{(\nu)}(0), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1, \tag{2}$$

для будь–якої функції f з простору A_R. Таке збереження умов Коші оператором T (природне для диференціальних операторів!) гарантує його єдиність.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47D99, 30H05.

Це твердження було встановлене з використанням спеціальних функціональних рядів (рядів Дельсарта) спочатку при $R = \infty$ (тобто для простору A_∞ цілих функцій) в роботі [1], а потім в загальному випадку (тобто для $0 < R \leq \infty$) — в [2], де з цією метою побудована досить цікава теорія так званих L-аналітичних функцій. В наступні роки цей результат отримано в декількох роботах різних авторів матричним способом. Крім того, еквівалентність вказаних операторів у просторах функцій, аналітичних в деяких спеціальних областях (більш загальних ніж круг), доведена іншим способом в [3].

Оскільки, починаючи з 1951р., увагу математиків все більше й більше стали привертати оператори D_α узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва (див. [4]), то природно виникло питання про еквівалентність в A_R оператора D_α^p і оператора L вигляду (1), якщо в ньому звичайне диференціювання D замінити на узагальнене D_α.

Тут, на нашу думку, доречно згадати роботу [5], в якій показано, що при певних умовах, накладених на породжуючу диференціювання D_α функцію, в просторі A_∞ вказана еквівалентність операторів зберігається. Метод доведення основного твердження з роботи [5] є розповсюдженням на цей випадок методу Дельсарта-Ліонса з [1]. Зауважимо також, що в [5] розглядалося таке диференціювання D_α Гельфонда-Леонтьєва, породжуюча функція якого є цілою функцією скінченного порядку росту і скінченного типу (іншими словами, в деякому розумінні вона "близька" до функції $\exp z$, яка породжує звичайне диференціювання D).

А якою буде відповідь на питання про еквівалентність операторів L і D_α^p в тому випадку, коли породжуюча диференціювання D_α функція "далека" від експоненціальної? Ця задача була сформульована в роботі [6], авторів якої до цього питання спонукала така обставина. Якщо $D_\alpha = \Delta$, де $\Delta : (\Delta f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ $(\forall f \in A_R)$ – оператор Пом'є (його породжує функція $\frac{1}{1-z}$), то, як показано в [7], ми дістаємо дещо парадоксальний факт, що кардинально відрізняється від результатів робіт [1, 2]. Наприклад, оператор

$$L = \Delta^p + a_1\Delta^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\Delta + a_p E$$

зі сталими коефіцієнтами $a_k \in \mathbb{C}$ еквівалентний в A_R до Δ^p тоді і лише тоді, коли всі вони дорівнюють нулю, тобто коли $L = \Delta^p$!

Метою цієї замітки є встановлення необхідних і достатніх умов еквівалентності в просторі A_R $(0 < R \leq \infty)$ операторів D_α і $D_\alpha + aE$, де $a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$, а оператор D_α Гельфонда-Леонтьєва породжується (див. [4]) функцію $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \quad (\alpha_k \neq 0)$, тобто $(D_\alpha f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1}\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} z^k$, причому послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє природну для A_R умову неперервності D_α (див. [8]):

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right|} \leq 1 \quad \text{при} \quad R < \infty, \tag{3}$$

або ж

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right|} \leq +\infty \quad \text{при} \quad R = \infty. \tag{4}$$

Це — найпростіший варіант цієї інтригуючої і досить складної задачі з [6].

Зауважимо, нарешті, що коли $D_\alpha = \Delta$, то еквівалентність операторів L і Δ^p повністю досліджена в роботах [7] (при $R < \infty$) і [9] (для $R = \infty$).

Отже, нехай $D_\alpha + aE \sim D_\alpha$ в просторі A_R $(0 < R \leq \infty)$. Оскільки оператор D_α має в просторі A_R нетривіальні нулі (наприклад, $D_\alpha 1 = 0$), то такі ж нулі повинен мати й оператор $D_\alpha + aE$. Розв'язуючи рівняння $(D_\alpha + aE)f(z) = 0$ приходимо до висновку, що тейлорові коефіцієнти f_k функції $f(z)$ визначаються за допомогою співвідношень $f_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0}(-a)^k f_0$ $(f_0 \neq 0)$ і тому (оскільки $f \in A_R$))

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\alpha_k|} \leq \frac{1}{|a|R}.$$

Це означає, що породжуюча функція $\alpha(z)$ належить також до простору $A_{|a|R}$. При цьому нулі оператора $D_\alpha + aE$ в просторі A_R мають вигляд $f(z) = C\alpha(-az)$, де $C = \text{const}$.

Тепер перейдемо до розгляду власних функцій операторів D_α і $D_\alpha + aE$ в A_R. Легко перевірити, що кожне число λ, $|\lambda| \leq |a|$, є власним значенням оператора D_α і $D_\alpha(\lambda z) = \lambda\alpha(\lambda z)$ $(\alpha(\lambda z) \in A_R\ !)$. Тому кожне таке λ повинно бути і власним значенням оператора $D_\alpha + aE$. Але рівняння $(D_\alpha + aE)\varphi(z) = \lambda\varphi(z)$ задовольняють в просторі A_R тільки функції $\varphi(z)$ вигляду $\varphi(z) = c\alpha((\lambda - a)z)$, $c \in \mathbb{C}$. Це означає, що також $\alpha(z) \in A_{2|a|R}$, оскільки ми можемо брати λ, $|\lambda| \leq |a|$, такими, щоб величини $|\lambda - a|$ були близькими до $2|a|$. Продовжуючи цей процес далі (тобто розглядаючи тепер такі λ, що $|\lambda| \leq 2|a|$, і т.д.), приходимо до висновку, що з необхідністю функція $\alpha(z)$ повинна бути цілою.

Крім того, легко перевірити, що коли $\psi(z)$ – задана функція з простору A_R, а $\varphi(z)$ – шукана, то з рівняння $(D_\alpha + aE)\varphi(z) = \psi(z)$ для їх тейлорових коефіцієнтів дістаються такі співвідношення:

$$\psi_{k+1} = \alpha_{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-a)^i \frac{\psi_{k-i}}{\alpha k - i} + (-a)^{k+1}\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right) \quad (k \geq 0). \tag{5}$$

Користуючись співвідношеннями (5), знайдемо тепер функції Tz^k $(k \geq 0)$, де T – довільний лінійний неперервний оператор в просторі A_R, який задовольняє операторну рівність $(D_\alpha + aE)T = TD_\alpha$.

Оскільки звідси випливає, що $(D_\alpha + aE)T\,1 = 0$, то, як вже вказувалося раніше, $T\,1 = C\alpha(-az)$, $C = \text{const}$. Далі, з рівності $(D_\alpha + aE)Tz = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}T1 \equiv C\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\alpha(-az)$, за допомогою співвідношень (5), де $\psi_k = C\frac{\alpha_0}{\alpha_1}(-a)^k\alpha_k$ $(k \geq 0)$, отримуємо, що

$$Tz = C\frac{\alpha_{s_0}}{\alpha_1}z\alpha'(-az) + \frac{\varphi_0}{\alpha_0}\alpha(-az).$$

Це наводить на думку про те, що взагалі

$$Tz^k = \sum_{s=0}^{k}\gamma_k^{(s)} z^s \alpha^{(s)}(-az), \quad \gamma_k^{(s)} \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Підставляючи функції вигляду (6) у рівність

$$(D_\alpha + aE)Tz^k = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}Tz^{k-1} \quad (k \geq 1)$$

та користуючись при цьому співвідношеннями (які легко перевіряються безпосередньо!)

$$D\alpha\left[z^s\alpha^{(s)}(-az)\right]=\left[z^s\alpha^{(s-1)}(-az)\right]'=sz^{s-1}\alpha^{(s-1)}(-az)-az^s\alpha^{(s)}(-az)\quad(s\geq 1),$$

переконуємося, що насправді для всіх $k\geq 0$

$$Tz^k=\sum_{s=0}^{k}\frac{\alpha_{k-s}}{s!\alpha_k}\gamma_{k-s}^{(0)}z^s\alpha^{(s)}(-az),\tag{7}$$

де $(\gamma_m^{(0)})$ – деяка фіксована послідовність комплексних чисел.

Таким чином, оператори $D_\alpha+aE\quad(a\in\mathbb{C}^a\neq 0)$ і D_α еквівалентні в просторі A_R тоді і тільки тоді, коли $\alpha(z)$ – ціла функція і існує така послідовність $(\gamma_m^{(0)})$ комплексних чисел, що відповідні їй співвідношення (7) визначають ізоморфізм T цього простору на себе.

Будемо вимагати додатково, щоб оператор T перетворення D_α в $D_\alpha+aE$ (тобто $(D_\alpha+aE)T=TD_\alpha$) задовольняв умову

$$(Tf)(0)=f(0)\qquad(\forall f\in A_R)\tag{8}$$

(з цього приводу див. умови (2) при $p=1$). Тоді, очевидно, рівності (7) переходять у рівності

$$Tz^k=\alpha_0\gamma_0^{(0)}\frac{z^k\alpha^{(k)}(-az)}{k!\alpha_k}\quad(k\geq 0)\tag{9}$$

і питання про еквівалентність D_α і $D_\alpha=aE$ стає рівносильним (бо і $\alpha_0\neq 0$, і $\gamma_0^{(0)}\neq 0$) питанню про те, коли оператор

$$T:Tz^k=\frac{z^k\alpha^{(k)}(-az)}{k!\alpha_k}=z^k\frac{\alpha^{(k)}(-az)}{\alpha^{(k)}(0)}\quad(k\geq 0)\tag{10}$$

є ізоморфізмом простору A_R на себе, або ж коли система функцій $\left\{z^k\frac{\alpha^{(k)}(-az)}{\alpha^{(k)}(0)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ є квазістепеневим базисом у цьому просторі.

Але оператор T, що визначається на елементах степеневого базису співвідношеннями (10), має обернений T^{-1}, для якого

$$T^{-1}z^k=z^k\frac{\alpha^{(k)}(az)}{\alpha^{(k)}(0)}\quad(k\geq 0)\tag{11}$$

(з урахуванням (10) і (11), співвідношення $TT^{-1}z^k=T^{-1}Tz^k=z^k$ для всіх $k\geq 0$ перевіряються безпосередньо). Тому T буде ізоморфізм простору A_R на себе тоді і лише тоді, коли T і T^{-1} задовольняють тільки відповідні умови їх неперервності в A_R, тобто (див. [8]), коли $\forall\rho<R$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{\max\limits_{|t|\leq|a|\rho}|\alpha^{(k)}(t)|}{|\alpha^(k)(0)|}}\leq 1\quad\text{при}\quad R<\infty\tag{12}$$

або

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{\max\limits_{|t|\leq|a|\rho}|\alpha^{(k)}(t)|}{|\alpha^(k)(0)|}}<+\infty\quad\text{при}\quad R=\infty\tag{13}$$

Отже, ми отримали такий основний результат.

Теорема. *Нехай лінійний неперервний оператор D_α узагальненого диференціювання породжується в просторі A_R $(0 < R \le \infty)$ функцією $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ ($\alpha_k \neq 0$ при всіх $k \ge 0$) і $a \in \mathbb{C}$, причому $a \neq 0$. Для того, щоб існував такий ізоморфізм T простору A_R на себе, для якого $(D_\alpha + aE)T = TD_\alpha$ і $(Tf)(0) = f(0)$ $(\forall f \in A_R)$, необхідно і достатньо, щоб $\alpha(z)$ була цілою функцією і виконувались відповідно умови (12) і (13).*

При $\alpha(z) = \exp z$, очевидно, $D_\alpha = D$, а $T : (Tf)(z) = \exp(-az)f(z)$ $(\forall f \in A_R)$.

В загальному випадку умови (12) або (13) виконуються, наприклад, якщо або

а) $R = \infty$ і $|\alpha_{s+k}| \le C|\alpha_s||\alpha_k|$ $(\forall s, k \ge 0)$ або

б) $0 < R \le \infty$ і існує границя $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!|\alpha_k|} = c$, причому $c \neq 0$ і $c \neq +\infty$.

При c = 1 в останньому випадку $D_\alpha \sim D$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Delsartes J., Lions J.L. *Transmutations d'opérateurs differentieles dans le domaine complexe* // Comment. Math. Helv. 1957. V.32, No 2. P.113–128.
2. Фаге М.К. Операторно-аналітичні функції однієї незалежної змінної. – Львів: Вид-во Львівського держ. ун-ту, 1959. – 140с.
3. Леонтьев А.Ф. *Оценка решений одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применение к некоторым вопросам теории функций* // Сиб. мат. журн. 1960. Т.1, № 3. С.456–487.
4. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Мат. сборник. 1951. Т.29, № 3. С.477–500.
5. Ткаченко В.А. *Об операторе преобразования в пространствах целых функций* // Сиб. мат. журн. 1979. Т.20, № 1 С.152–163.
6. Нагнибида Н.И., Линчук С.С. *Об эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических в круге функций* // Математика сегодня – 89: Науч.–метод. сб. (под ред. А.Я. Дороговцева). – К., 1989. – С.47–62.
7. Линчук С.С., Нагнибида Н.И. *Об эквивалентности операторов Поммье в пространстве аналитических в круге функций* // Сиб. мат. журн. 1990. Т.80, № 1. С.55–61.
8. Хапланов М.Г. *Линейные преобразования аналитических пространств* // Докл. АН СССР. 1951. Т.80, № 1. С.21–24.
9. Нагнибида Н.И. *Об условиях полноты одной системы целых функций и их применении к операторам Поммье* // Мат. заметки. 1991. Т.49, № 1. С.154–156.

Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

Надійшло 29.10.1993