Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 519.25; 517.95

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУНКЦІЙ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ І ЇХ НАЛЕЖНІСТЬ ДО КЛАСУ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ЛАГЕРРА

Л.В. БАРБУЛЯК, Ю.В. КОЗИЦЬКИЙ

Abstract. L.V. Barbulyak, Yu.V. Kozytsky, *Integral transformations of special type functions and their belonging to the class of Laguerre entire functions* // Matematychni Studii. **3** (1994) 67–77.

The property of preservation of the class of Laguerre entire functions is proved for some set of differential operators including those of infinite order. On the base of this property some integral transformations of special type functions are shown to be Laguerre entire functions.

Розглянемо перенормовані узагальнені поліноми Лагерра [1]

$$\tilde{L}_n^{(\Theta)}(x) = \frac{n!}{\Gamma(\Theta+n+1)} L_n^{(\Theta)}(x) =$$
$$= \frac{n!}{\Gamma(\Theta+n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(\Theta+n+1)}{\Gamma(\Theta+\nu+1)(n-\nu)!} \frac{(-x)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{C_n^\nu}{\Gamma(\Theta+\nu+1)} (-x)^\nu. \quad (1)$$

Введемо також у розгляд оператор

$$\Delta_\Theta = (\Theta + zD)D,$$

де $D = \dfrac{d}{dz}$, і обчислимо

$$P_n^\Theta(z) = \exp(\Delta_\Theta) z^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Delta_\Theta^k z^n,$$

використовуючи формулу [2]

$$\Delta_\Theta^k z^n = \frac{n!\,\Gamma(\Theta+n)}{(n-k)!\,\Gamma(\Theta+n-k)} z^{n-k}, \quad n \geq k.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 33C45.

Зробивши заміну індекса сумування, матимемо

$$P_n^{\Theta}(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\Gamma(\Theta+n)}{\Gamma(\Theta+k)} z^k = \Gamma(\Theta+n) \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{\Gamma(\Theta+k)} z^k.$$

Тобто,

$$\tilde{L}_n^{(\Theta-1)}(-z) = \frac{1}{\Gamma(\Theta+n)} P_n^{(\Theta)}(z),$$

і оператор Δ_Θ є твірним для таких узагальнених поліномів Лагерра. Власною функцією цього оператора є

$$w_\Theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,\Gamma(\Theta+n)}.$$

Справді, легко перевірити, що

$$\Delta_\Theta w_\Theta(bz) = b\, w_\Theta(bz).$$

Розглянемо поліном

$$\tilde{L}_n^{(\Theta-1)}\left(-\frac{z}{n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{C_n^\nu}{\Gamma(\Theta+\nu)} \frac{z^\nu}{n^\nu}$$

і перетворимо його наступним чином:

$$\tilde{L}_n^{(\Theta-1)}\left(-\frac{z}{n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \frac{1}{\Gamma(\Theta+\nu)} \frac{z^\nu}{n^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!\Gamma(\Theta+\nu)} \frac{n!}{(n-\nu)!n^\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!\Gamma(\Theta+\nu)} \frac{(n-\nu+1)\cdot \ldots \cdot n}{n \cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} 1 \cdot (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1-\frac{\nu-1}{n}) \cdot \frac{z^\nu}{\nu!\Gamma(\Theta+\nu)}.$$

Тобто, узагальнені поліноми Лагерра є поліномами Ієнсена [3] для функції $w_\Theta(z)$ і має місце співвідношення

$$\tilde{L}_n^{(\Theta-1)}(-\frac{z}{n}) = I_n(w_\Theta(z)).$$

Зауважимо також, що поліноми (1) є ортогональними по мірі

$$d\nu_\Theta(s) = s^\Theta e^{-s} ds,$$

тобто,

$$\int_0^\infty \tilde{L}_m^{(\Theta)}(s) \tilde{L}_n^{(\Theta)}(s) d\nu_\Theta(s) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{m!}{\Gamma(\Theta+m+1)}, & m = n \end{cases} \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

(див. [1]).

Введені вище оператор Δ_Θ, функція $w_\Theta(z)$ і міра $d\nu_\Theta(s)$ будуть в центрі нашої уваги при побудові і дослідженні інтегральних зображень для функцій Лагерра.

Означення. *Клас L_1 складають цілі функції, що є рівномірними на компактних підмножинах $\mathbb{C}$ границями поліномів з дійсними недодатними нулями.*

Лагерру і Пойа належить наступне твердження.

Твердження 1. *Для того, щоб $f(z)$ належала класу L_1, необхідно і досить, щоб її можна було зобразити у вигляді*

$$f(z) = hz^m \exp(\alpha z) \prod_{j=1}^{\infty}(1+\gamma_j z), \tag{2}$$

де $h \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\gamma_j \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j < \infty$.

Нам знадобиться наступна теорема [4, 2]:

Теорема 1 (Ліб-Сокал). *Нехай $P_i(z)$, $Q_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – поліноми, $z \in \mathbb{C}$. Крім того, нехай*

$$R(v, w) = \sum_{i=1}^{n} P_i(v) Q_i(w), \quad S(z) = \sum_{i=1}^{n} (P_i(D) Q_i)(z).$$

Якщо тепер $R(v, w) \neq 0$ для v і w з властивістю $\operatorname{Re} v > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, то або $S(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$, або $S(z) \equiv 0$.

Обчислимо інтеграл

$$\int_0^{+\infty} w_{\Theta+1}(sz) d\nu_\Theta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(\Theta+n+1)} \int_0^{+\infty} s^{n+\Theta} e^{-s} ds = e^z \in L_1.$$

Тепер, якщо розглянути інтеграл загальнішого винляду

$$f(z) = \int_0^{+\infty} w_{\Theta+1}(sz) g(s) d\nu_\Theta(s),$$

то природно постає питання: для яких функцій $g(s)$ функція $f(z) \in L_1$? Щоб відповісти на нього, доведемо кілька важливих фактів.

Теорема 2. *Для довільних $\varkappa \geq 0$ і $\Theta \geq \frac{1}{2}$ оператор $\varkappa + \Delta_\Theta$ зберігає приналежність до L_1.*

Зауваження. Ця теорема посилює лему 3.3, доведену в [2].

Доведення. Введемо в розгляд оператор

$$D_\Theta = \frac{1}{2}\Big[\frac{\Theta}{z} D + \frac{z}{2} D\Big(\frac{1}{z} D\Big)\Big].$$

Легко перевірити справедливість рівності $(\Delta_\Theta f)(z^2) = (D_\Theta F)(z)$ для функцій f і F таких, що $F(z) = f(z^2)$, а, отже,

$$((\varkappa + \Delta_\Theta) f)(z^2) = ((\varkappa + D_\Theta) F)(z). \tag{3}$$

Якщо $f \in L_1$, то, за означенням класу L_1, існує послідовність поліномів $\tilde{\pi}(z) \in L_1$, яка рівномірно на компактних підмножинах $\mathbb{C}$ збігається до f. Тоді послідовність поліномів $\pi(z) = \tilde{\pi}(z^2)$ так само збігається до функції F. Поліноми $\pi(z)$, очевидно, парні і $\pi(z) \neq 0$ при $\mathrm{Re}\, z > 0$. Якщо довести, що поліноми $((\varkappa + D_\Theta)\pi)(z)$ мають таку ж властивість, то, враховуючи (3), тим самим буде доведено і теорему.

Оскільки $\pi(z) = \pi_0 \prod_{j=1}^m (1 + \gamma_j z^2)$, то

$$D\pi(z) = \pi(z) D \ln \pi(z) = \pi(z) \sum_{j=1}^m \frac{2\gamma_j z}{1 + \gamma_j z^2} \equiv 2z\pi_1(z), \text{ де}$$

$$\pi_1(z) = \pi(z) \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j z^2}.$$

Тепер $(\varkappa + D_\Theta)\pi(z) = (\varkappa + \frac{1}{2}[\frac{\Theta}{2} D + \frac{z}{2} D(\frac{1}{z} D)])\pi(z) = \varkappa\pi(z) + \Theta\pi_1(z) + \frac{1}{2} z D\pi_1(z)$. Але $zD = Dz - I$ (I – тотожний оператор), тому останню рівність можна переписати

$$(\varkappa + D_\Theta)\pi(z) = \varkappa\pi(z) + (\Theta - \frac{1}{2})\pi_1(z) + \frac{1}{2} D(z\pi_1(z)).$$

Позначимо

$$\begin{aligned} &P_1(D) = \varkappa, \qquad && P_2(D) = \Theta - \frac{1}{2}, \qquad && P_3(D) = \frac{1}{2} D, \\ &Q_1(z) = \pi(z), && Q_2(z) = \pi_1(z), && Q_3(z) = z\pi_1(z). \end{aligned}$$

Тоді, за теоремою Ліба-Сокала,

$$(\varkappa + D_\Theta)\pi(z) = S(z) = \sum_{i=1}^3 (P_i(D)\, Q_i)(z) \neq 0$$

при $\mathrm{Re}\, z > 0$, якщо $R(v, w) = \sum_{i=1}^3 P_i(v) Q_i(w) \neq 0$ при $\mathrm{Re}\, v > 0$ і $\mathrm{Re}\, w > 0$.

Перевіримо, що останнє співвідношення насправді вірне. Розглянемо, коли може перетворитись у 0 вираз

$$\begin{aligned} 4R(v, w) = 4\varkappa\pi(w) + 2(2\Theta - 1)\pi_1(w) + 2vw\pi_1(w) = \\ = 2(2\Theta - 1 + vw)\pi(w) \left[\frac{2\varkappa}{2\Theta - 1 + vw} + \frac{\pi_1(w)}{\pi(w)} \right]. \end{aligned}$$

Припустимо, що

$$\frac{2\varkappa}{2\Theta - 1 + vw} + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j w^2} = 0, \tag{4}$$

або

$$\frac{2\varkappa(2\Theta - 1 + \bar{v}\bar{w})}{|2\Theta - 1 + vw|^2} + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j (1 + \gamma_j \bar{w}^2)}{|1 + \gamma_j w^2|^2} = 0.$$

Ввівши позначення

$$A(v,w) = \frac{2\varkappa(2\Theta-1)}{|2\Theta-1+vw|^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j}{|1+\gamma_j w^2|^2};$$

$$B(v,w) = \frac{2\varkappa}{|2\Theta-1+vw|^2}; \quad C(v,w) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j}{|1+\gamma_j w^2|^2},$$

одержимо, що мала б виконуватись рівність

$$C\bar{w}^2 + B\bar{v}\bar{w} + A = 0, \tag{5}$$

де $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Звідси

$$\bar{v} = -\frac{A}{B\bar{w}} - \frac{C\bar{w}}{B} = -\frac{A}{B|w|^2}w - \frac{C}{B}\bar{w},$$

Тому $\operatorname{Re} v = -(\frac{A}{B|w|^2} + \frac{C}{B}) \operatorname{Re} w$. Значить, щоб виконувалось (5), дійсні частини v і w мають мати протилежні знаки. У випадку ж $\operatorname{Re} v > 0$ і $\operatorname{Re} w > 0$ рівність (5), а, значить і (4), неможлива.

Зовсім так само, припустивши справедливість рівності $2\Theta - 1 + vw = 0$, отримаємо $v = -\frac{2\Theta-1}{|w|^2}\bar{w}$, що теж неможливе при $\operatorname{Re} v > 0$ і $\operatorname{Re} w > 0$.

Тобто при $\operatorname{Re} v > 0$ і $\operatorname{Re} w > 0$ $\ R(v,w) \neq 0$, тому $(\varkappa + D_\Theta)\pi(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$, що й доводить теорему.

Для деякого $a > 0$ і цілої функції $f(z)$ позначимо

$$p_a(f) = \sup\{|f(z)| \exp(-a|z|) \mid z \in \mathbb{C}\}.$$

Тепер для $a \geq 0$ можна розглянути простір цілих функцій

$$\mathcal{A}_a = \{f(z) \mid p_b(f) < \infty \quad \forall b > a\}.$$

Ввівши на $\mathcal{A}_a$ поточкові лінійні операції і наділивши його топологією, породженою сім'єю норм $\{p_b(\cdot) \mid b > a\}$, перетворимо $\mathcal{A}_a$ в локально-опуклий простір.

Покладемо

$$(\varphi(\Delta_\Theta)\, f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} (\Delta_\Theta^n f)(z).$$

Вірне наступне твердження:

Твердження 2 [2]. *Білінійна форма $(\varphi, f) \mapsto \varphi(\Delta_\Theta)f$ є неперервним відображенням $\mathcal{A}_a \times \mathcal{A}_b \to \mathcal{A}_c$ при $c = \dfrac{b}{1-ab}$, $ab < 1$.*

Позначимо $L_{1,a} = \mathcal{A}_a \cap L_1$.

Теорема 3. *Для невід'ємних a, b таких, що $ab < 1$, і довільного $\Theta \in [1/2; +\infty)$ білінійна форма $(\varphi, f) \to \varphi(\Delta_\Theta)f$ є неперервним відображенням $L_{1,a} \times L_{1,b} \to L_{1,c}$, де $c = \frac{b}{1-ab}$.*

Доведення. Нехай $\varphi \in L_{1,a}$. Тоді існує послідовність поліномів $\varphi_n \in L_1$, яка збігається в топології простору $\mathcal{A}_a$ до φ. Існування такої послідовності пов'язане з тим, що підмножина поліномів, яка є щільною в L_1 в топології рівномірної збіжності на компактних підмножинах $\mathbb{C}$, буде щільною в $\mathcal{A}_a$ в його природній топології (див. [2]). Будь-який многочлен з L_1 можна зобразити у вигляді

$$\varphi_n(z) = \prod_{j=1}^{m}(x_j + z),$$

$x_j \geq 0$. Якщо $f \in L_{1,b}$, то, за теоремою 2, $\varphi_n(\Delta_\Theta)f \in L_1$. Послідовність $\{\varphi_n(\Delta_\Theta)f\}$ збігається в топології простору $\mathcal{A}_c$ до $\varphi(\Delta_\Theta)f$ (це випливає з твердження 2), що забезпечує її рівномірну збіжність на компактних підмножинах $\mathbb{C}$. Тому $\varphi(\Delta_\Theta)f \in L_1$. Врахувавши приналежність $\varphi(\Delta_\Theta)f$ до $\mathcal{A}_c$, отримуємо твердження теореми. Теорему доведено.

Позначимо через L_1^+ сукупність функцій з L_1, для яких у зображенні (2) $h \in \mathbb{R}_+$, $m = 0$. Наступна теорема дає опис спектру і власних функцій операторів вигляду $D\varphi(\Delta_\Theta)$.

Теорема 4. *Нехай для деякого $b \geq 0$ функція $\varphi(z) + b$ належить L_1^+. Тоді для довільного $\Theta \geq \frac{1}{2}$ і $\lambda > 0$ рівняння $(D\varphi(\Delta_\Theta)f)(z) = \lambda f(z)$ має розв'язок*

$$f(z) = K\int_0^{+\infty} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)\exp\big[-\int_0^s \varphi(\lambda t)dt\big]ds, \tag{6}$$

який належить до класу L_1.

Якщо $\varphi(z) \not\equiv const$, то розв'язок (6) належить $L_{1,0}$.

Доведення. Позначимо $\varphi_b(z) = \varphi(z) + b$. Тоді

$$\Phi_b(s) = \int_0^s \varphi_b(\lambda t)dt = bs + \int_0^s \varphi(\lambda t)dt.$$

Якщо $\varphi_b(z) \in L_1^+$, то $\Phi_b(s)$ монотонно зростає і опукла на $\mathbb{R}_+$. Тому рівняння $\Phi_b(s) = l$ має при $l \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$ єдиний розв'язок s_l. При цьому $\Phi_b(s) \leq \Phi_b(s_l) = l$ при $s \leq s_l$.

Позначимо $Z_l = \{r \in \mathbb{Z}_+ \mid r \leq l\}$ для $l \in \mathbb{N}$. Для $r \in Z_l$ розглянемо

$$u_{l,r}(z) = \int_0^{s_l} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)\big[1 - \frac{1}{l}\Phi_b(s)\big]^r ds.$$

При $r=0$ з означення функції $w_\Theta(z)$ легко отримати співвідношення $u_{l,0}(z) = s_l^\Theta w_{\Theta+1}(\lambda s_l z)$. Використовуючи методи монографії [5], нескладно довести, що $w_\Theta(z) \in L_{1,0}$ при всіх $\Theta > 0$. Таким чином, $u_{l,0}(z) \in L_{1,0}$ при всіх $l \in \mathbb{N}$. Крім того, безпосереднім обчисленням отримуємо

$$\begin{gathered} w'_\Theta(z) = \frac{dw_\Theta(z)}{dz} = w_{\Theta+1}(z); \\ \frac{d}{ds}\big[s^\Theta w'_\Theta(\lambda sz)\big] = \frac{d}{ds}\big[s^\Theta w_{\Theta+1}(\lambda sz)\big] = s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz). \end{gathered} \tag{7}$$

Розглянемо тепер дію оператора $\frac{r}{l}D\varphi_b(\Delta_\Theta)$ на функцію $u_{l,r-1}(z)$:

$$\frac{r}{l}D\varphi_b(\Delta_\Theta)u_{l,r-1}(z) = \frac{r}{l}D\int_0^{s_l} s^{\Theta-1}\varphi_b(\lambda s)w_\Theta(\lambda sz)\big[1-\frac{1}{l}\Phi_b(s)\big]^{r-1}ds =$$
$$=\frac{r}{l}D\int_0^{s_l} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)\big[1-\frac{1}{l}\Phi_b(s)\big]^{r-1}d\Phi_b(s) = -\lambda\int_0^{s_l} s^{\Theta}w'_\Theta(\lambda sz)d\big[1-\frac{1}{l}\Phi_b(s)\big]^{r} =$$
$$=\lambda\int_0^{s_l}[1-\frac{1}{l}\Phi_b(s)]^r\frac{d}{ds}[s^\Theta w'_\Theta(\lambda sz)]ds = \lambda\int_0^{s_l} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)\big[1-\frac{1}{l}\Phi_b(s)\big]^r ds = \lambda u_{l,r}(z) \tag{8}$$

В ланцюжку наведених перетворень ми використовували інтегрування частинами і співвідношення (7). В умовах цієї теореми, в силу теореми 3, оператор $\varphi_b(\Delta_\Theta)$ зберігає приналежність до $L_{1,0}$. Таку ж властивість має оператор диференціювання (див. [2]).

Оскільки $u_{l,0}\in L_{1,0}$, то для всіх $l\in\mathbb{N}$ і $r\in Z_l$ $u_{l,r}\in L_{1,0}$. З (8) також слідує, що

$$D\varphi_b(\Delta_\Theta)u_{l,l-1}(z) = \lambda u_{l,l}(z).$$

Для завершення доведення необхідно довести збіжність послідовностей $\{u_{l,l}(z)\}_{l=1}^\infty$ та $\{u_{l,l-1}(z)\}_{l=1}^\infty$ до функції

$$f_b(z) = \int_0^{+\infty} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)\exp[-\Phi_b(s)]ds. \tag{9}$$

Для цього представимо різниці

$$f_b(z)-u_{l,l}(z) \qquad \text{і} \qquad f_b(z)-u_{l,l-1}(z)$$

у вигляді

$$f_b(z)-u_{l,l}(z) = I_l(z)+K_l(z);$$
$$f_b(z)-u_{l,l-1}(z) = J_l(z)+K_l(z),$$

де

$$I_l(z) = \int_0^{s_l} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)[\exp(-\Phi_b(s)) - (1-\frac{1}{l}\Phi_b(s))^l]ds;$$
$$J_l(z) = \int_0^{s_l} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)[\exp(-\Phi_b(s)) - (1-\frac{1}{l}\Phi_b(s))^{l-1}]ds;$$
$$K_l(z) = \int_{s_l}^{+\infty} s^{\Theta-1}w_\Theta(\lambda sz)[\exp(-\Phi_b(s))ds.$$

Тепер скористаємось нерівностями (див., наприклад, [6, §12.2]), вірними для всіх цілих $l>2$ і $a\in[0,l]$, які можна довести розклавши відповідні функції у ряди Тейлора:

$$\begin{gathered}0\le\exp(-a)-\big(1-\frac{a}{l}\big)^l\le\frac{a^2}{l}\exp(-a);\\ 0\le\exp(-a)-\big(1-\frac{a}{l}\big)^{l-1}\le\frac{A}{l}\exp(-a),\ A=\max(a,a^2).\end{gathered} \tag{10}$$

Для довільного $R > 0$ позначимо

$$i_l = \mathcal{M}(R, I_l), \quad j_l = \mathcal{M}(R, J_l), \quad k_l = \mathcal{M}(R, K_l).$$

Скориставшись оцінками (10), матимемо при $l > 2$

$$\max(i_l, j_l) \le \frac{1}{l} \int_{)}^{s_l} s^{\Theta-1}\psi(s) w_\Theta(\lambda s R) \exp(-\Phi_b(s)) ds \le$$

$$\le \frac{1}{l} \int_0^{+\infty} s^{\Theta-1}\psi(s) w_\Theta(\lambda s R) \exp(-\Phi_b(s)) ds, \quad (11)$$

де $\psi(s) = \max\{\Phi_b(s), \Phi_b^2(s)\}$. Ми врахували, що при $s \in [0, s_l]$ $\Phi_b(s) \in [0, l]$. Випадок $\varphi(z) \equiv \text{const}$ тривіальний, оскільки $f(z)$ для такого $\varphi(z)$ є просто експонентою. Тому надалі розглядатимемо лише $\varphi(z)$, які тотожно не рівні сталій. Оскільки $\Phi_b'(s)$ належить L_1, то $\Phi_b(s)$ є функцією експоненціального типу, при цьому $w_\Theta \in L_{1,0}$. З цих міркувань слідує існування таких сталих $w_R > 0$ і $c > 0$, що $\forall s \in \mathbb{R}_+$ $\psi(s) w_\Theta(\lambda s R) \le w_R \exp(cs)$. Тоді з (11) випливає

$$\max(i_l, j_l) \le \frac{w_R}{l} \int_0^{+\infty} s^{\Theta-1} \exp(-(\Phi_b(s) - cs)) ds. \quad (12)$$

У нетривіальному випадку $\Phi_b(s)$ зростає на $\mathbb{R}_+$ швидше, ніж cs при довільному c, що забезпечує збіжність інтеграла в (12). Тому

$$\max(i_l, j_l) = O(\frac{1}{l}), \quad l \to \infty. \quad (13)$$

Оцінимо тепер k_l. Для цього представимо

$$K_l(z) = s_l^\Theta \int_1^{+\infty} t^{\Theta-1} w_\Theta(\lambda s_l z t) \exp(-\Phi_b(s_l t)) dt.$$

Так само, як в (11) матимемо

$$k_l \le s_l^\Theta \int_1^{+\infty} t^{\Theta-1} w_\Theta(\lambda s_l R t) \exp(-\Phi_b(s_l t)) dt. \quad (14)$$

Позначимо $\psi(t) = \Phi_b(s_l t)$; $\psi(1) = l$. Оскільки, як було відзначено вище, $\Phi_b(s)$ опукла і монотонна на $\mathbb{R}_+$, то функцію $\psi(t)$ можна оцінити знизу $\forall t \in [1, +\infty)$:

$$\psi(t) \ge \psi(1) \cdot t = l\, t.$$

Скористаємось цим в (14):

$$k_l \le s_l^\Theta \int_1^{+\infty} t^{\Theta-1} w_\Theta(\lambda s_l R t) \exp(-lt) dt.$$

З того, що $w_\Theta \in L_{1,0}$ випливає, що на проміжку $[1, +\infty)$

$$w_\Theta(\lambda s_l R t) \le p_\alpha(w_\Theta) \exp(\alpha \lambda s_l R t)$$

при будь-якому $\alpha > 0$. Тоді

$$k_l \le s_l^\Theta \int_1^{+\infty} t^{\Theta-1} p_\alpha(w_\Theta) \exp[-lt(1-\alpha\lambda R\sigma_l)]dt,$$

де $\sigma_l = s_l/l$. Неважко показати обмеженість послідовності σ_l, $l > 2$. Її супремум позначимо через σ. За рахунок вибору α досить малим, можна добитись додатності $\eta_R = 1 - \alpha\lambda R\sigma$ при довільних $\lambda > 0$ і $R > 0$. Тоді

$$k_l \le \exp(-l\eta_R) s_l^\Theta p_\alpha(w_\Theta) \int_0^{+\infty} (1+x)^{\Theta-1} \exp(-l\eta_R x)dx \le$$
$$\le \exp(-l\eta_R) \frac{s_l^\Theta p_\alpha(w_\Theta)}{l\eta_R - q(\Theta)} \quad (15)$$

при $l > \frac{q(\Theta)}{\eta_R}$. Тут $q(\Theta) = \Theta - 1$ при $\Theta \ge 1$ і $q(\Theta) = 0$ при $1/2 \le \Theta < 1$. Щоб одержати останню оцінку в (15), ми скористались тим, що для $x \in \mathbb{R}_+ (1+x)^\lambda \le 1$ при $\lambda < 0$ і $(1+x)^\lambda \le \exp(\lambda x)$ при $\lambda \ge 0$.

З (15) слідує експоненціальне спадання k_l при $l \to \infty$. Цей факт разом з (13) свідчить про збіжність обидвох послідовностей $\{u_{l,l}(z)\}_{l=1}^\infty$ і $\{u_{l,l-1}(z)\}_{l=1}^\infty$ до функції $f_b(z)$ (9), яка, в силу цього, належатиме L_1 і буде розв'язком рівняння

$$(D\varphi_b(\Delta_\Theta)f_b)(z) = \lambda f_b(z)$$

при всіх $b \ge 0$. Поклавши тут $b = 0$, одержимо, що функція (6) задовольняє рівняння

$$(D\varphi(\Delta_\Theta)f)(z) = \lambda f(z),$$

хоча може і не належати до $L_{1,0}$. Для завершення доведення покажемо таку приналежність.

З уже доведеного маємо, що $f_b(z) \in L_1$. З (6) випливає, що

$$f_b^{(n)}(0) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(\Theta+n)} \int_0^{+\infty} s^{\Theta+n-1} \exp(-\Phi_b(s))ds. \quad (16)$$

У нетривіальному випадку $\varphi(z) \ne \mathrm{const}$

$$\Phi_b''(0) > 0; \quad \Phi_b^{(m)}(0) \ge 0 \quad \forall m > 2.$$

Тому

$$\Phi_b(s) \ge \frac{1}{2}\Phi_b''(0)s^2 =: cs^2, \quad c \ge 0$$

при $\forall s \in \mathbb{R}_+$. Тоді з (16) матимемо

$$|f_b^{(n)}(0)| \le \frac{1}{2c^{\Theta/2}} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{c}}\right)^n \frac{\Gamma(\frac{\Theta+n}{2})}{\Gamma(\Theta+n)}.$$

Тому послідовність $\{|f_b^{(n)}(0)|\alpha^{-n}\}_{n=1}^\infty$ обмежена для всіх $\alpha > 0$. Це означає, що $f_b(z) \in L_{1,0}$ (див. лему 2.2 з [2]). Співставляючи (6) і (9), одержимо

$$K(\exp(\frac{b}{\lambda}\Delta_\Theta)f_b)(z) = f(z).$$

А оскільки $f_b \in L_{1,0}$, то, з врахуванням теореми 3, матимемо $f(z) \in L_{1,0}$. Теорему доведено.

Ця теорема посилює доведену в [2] теорему 4.1.

Тепер повернемось до питання про приналежність функції

$$f(z) = \int_0^{+\infty} w_{\Theta+1}(sz) g(s) d\nu_\Theta(s)$$

до класу L_1, поставленого на початку статті. З огляду на нього, теорема 4 може бути переформульована наступним чином:

Теорема 4'. *Нехай функція* $\Phi(z)$ *така, що при деякому* $b \geq 0$ *її похідна* $\varphi(z) = \Phi'(z)$ *задовольняє умову* $\varphi(z) + b \in L_1^+$. *Тоді при* $\Theta \geq \frac{1}{2}$ *функція*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} s^{\Theta-1} w_\Theta(sz) e^{-\Phi(s)} ds \tag{17}$$

належить до класу L_1 *і задовольняє рівняння*

$$(D\varphi(\Delta_\Theta)f)(z) = f(z).$$

Зауважимо, що тут, як і в теоремі 4, розглядається випадок $\varphi(z) \neq \mathrm{const}$ тому $f(z) \in L_{1,0}$.

Поклавши $\alpha = \Theta - 1$, перепишемо (17) у вигляді

$$f(z) = \int_0^{+\infty} w_{\alpha+1}(sz) e^{-(\Phi(s)-s)} d\nu_\alpha(s).$$

Звідси і з теореми 4' випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Функція*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} w_{\alpha+1}(sz) e^{-Q(s)} d\nu_\alpha(s)$$

належить до класу L_1 *при всіх* $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, *якщо для деякого* $c \geq 1$ $Q'(s) + c \in L_1^+$.

Тепер можна довести узагальнення теоремы 5 — основний результат статті.

Теорема 6. *Нехай функція* $Q(s)$ *задовольняє умови теореми 5, а* $p(z) \in L_1$. *Тоді для всіх* $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ *функція*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} w_{\alpha+1}(sz) p(s) e^{-Q(s)} d\nu_\alpha(s)$$

належить до класу L_1.

Доведення. Нехай

$$f_0(z) = \int_0^{+\infty} w_{\alpha+1}(sz) e^{-Q(s)} d\nu_\alpha(s).$$

У нетривіальному випадку $Q'(s) \not\equiv \mathrm{const}$ матимемо, що $f_0(z) \in L_{1,0}$. Крім того, оскільки $p(z) \in L_1$, то існує таке $a \geq 0$, що $p(z) \in L_{1,a}$. Твердження теореми випливає тепер з теореми 3 і співвідношення

$$f(z) = (p(\Delta_\Theta) f_0)(z).$$

Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2: Теория функций (специальная часть). Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
2. Козицкий Ю.В. *Целые функции Лагерра: сохраняющие принадлежность дифференциальные операторы и интегральные представления.* – Киев. Ин-т математики АН УССР, 1990. – Препринт 90.53. – 20 с.
3. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
4. Lieb E.H., Sokal A.D. *A general Lee-Yang theorem for one-component and multicomponent ferromagnets* // Comm. Math. Phys. 1981. V.80. P.153–179.
5. Iliev L. Laguerre entire functions. – Sofia: Publ. House of the Bulgarian Acad. of Sci., 1987. – 187 p.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т.2: Трансцендентные функции. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 516 с.

Lviv Trade-Economics Institute, 68 Ivan Franko Str., Lviv, 290011, Ukraine

tel (0322) 42-40-24, (0322) 72-29-93

Надійшла 4.02.1994