Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517.53

ПРО ОДНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИМ ЧЛЕНОМ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

М.М. Шеремета

Abstract. M.N. Sheremeta, *On a relationship between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series* // Mathematychni Studii. **3** (1994) 61–66.

We consider the relation $\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F))$ at $0 \le \sigma \to +\infty$ outside of some set of finite measure where φ is a slowly growth function.

1°. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – зростаюча до ∞ послідовність невід'ємних чисел, $n(t) = \sum\limits_{\lambda \le t} 1$ – її рахуюча функція, а $S(\Lambda)$ – клас цілих (тобто, абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n),\ s = \sigma + it. \tag{1}$$

Серед коефіцієнтів a_n можуть траплятися рівні нулеві, але вважаємо, що ряд (1) не перетворюється в експоненціальний многочлен.

Через L позначимо клас невід'ємних неперервних зростаючих до ∞ на $[0,+\infty)$ функцій і будемо говорити, що $F \in S_\varphi(\Lambda)$, $\varphi \in L$, якщо $F \in S(\Lambda)$ і $|a_n| \le \exp\{-\lambda_n \varphi(\lambda_n)\}$, $n \ge n_0$.

Для $F \in S(\Lambda)$ нехай $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \ge 0\}$ – максимальний член і $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс. Відомо [1], що для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ виконувалося співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{2}$$

при $0 \le \sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченої міри необхідно і досить, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < \infty. \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50, 30D15.

Така ж умова (але на швидкість зростання часткових сум ряду (3)) знайдена в [2] для того, щоб для кожної функції $F \in S_\varphi(\Lambda)$ виконувалось (2) при $0 \le \sigma \to +\infty$ зовні деякої множини нульової щільності (тобто, множини E такої, що $\mathrm{mes}(E \cap [0,\sigma]) = o(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$). Нарешті, в [3] показано, що якщо функція $\varphi \in L$ зростає досить повільно, $F \in S_\varphi(\Lambda)$ і $\ln n(t) = o(t\varphi(t))$, $t \to \infty$, то

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) = (1 + o(1))\varphi(\ln \mu(\sigma, F)), \tag{4}$$

при $0 \le \sigma \to +\infty$ зовні деякої множини нульової щільності. Можна показати (на цьому тут зупинятися не будемо), що умова $\ln n(t) = o(t\varphi(t)), t \to \infty$, є також і необхідною для виконання (4) при $0 \le \sigma \to +\infty$ зовні вказаної множини для кожної функції $F \in S_\varphi(\Lambda)$.

Тут ми розглянемо задачу про виконання (4) в загальному класі $S(\Lambda)$ рядів Діріхле (1).

Через $L^*_{\text{пз}}$ позначимо клас функцій таких, що $\varphi(x\varphi(x)) = (1 + o(1))\varphi(x)$, $x \to \infty$. Зауважимо , що $L^*_{\text{пз}} \subset L_{\text{пз}}$, де $L_{\text{пз}}$ — клас повільно зростаючих функцій, тобто функцій $\varphi \in L$ таких, що $\varphi(2x) = (1 + o(1))\varphi(x), x \to \infty$.

Теорема. *Для того щоб існувала функція $\varphi \in L^*_{\text{пз}}$ така, що для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ виконувалося співвідношення (4) при $0 \le \sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченої міри, необхідно і досить, щоб $\ln n(t) = o(t)$, $t \to \infty$.*

2°. Не зменшуючи загальності, надалі вважаємо, що $\lambda_0 = 0$ і $a_0 = 1$. Для доведення теореми нам будуть потрібні деякі леми.

Лема 1. *Нехай $\alpha -$ невід'ємна неперервна на $[0, +\infty)$ функція така, що $\alpha(x) \uparrow C \le +\infty$, $(x \to \infty)$, а $F \in S(\Lambda)$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\sigma \ge 0$ зовні деякої множини скінченної міри має місце нерівність*

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \le \mu(\sigma, F)\exp\Big\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_\nu))\, dt\Big\}, \quad \nu = \nu(\sigma, F). \tag{5}$$

Доведення цієї леми таке ж, як теореми 1 з [4], де

$$\alpha(t) = \int_0^t x^{-2} w(x)\, dx, \tag{6}$$

а $w -$ невід'ємна неспадна на $[0, +\infty)$ функція, причому зображення (6) використовується в [4] тільки для оцінки знизу інтегралу, який записаний у правій частині (5).

Лема 2 [4]. *Нехай функція має зображення (6) і задовольняє умови леми 1. Тоді для всіх $\sigma \ge 0$ зовні деякої множини скінченної міри має місце нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \ge w(\frac{1}{2}\lambda_\nu), \nu = \nu(\sigma, F)$.*

Лема 3. *З кожної послідовності Λ, для якої*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} > A > 0, \tag{7}$$

можна виділити підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda^*_r)$ таку, що

$$\ln k \le A\, \lambda^*_k + 1 \tag{8}$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ і

$$\ln k_j \geq A\,\lambda^*_{k_j} \tag{9}$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Доведення. З огляду на (7) існує $k_1 = \min\{k \geq 2 : \ln k \geq A\,\lambda_k\}$. Ясно, що $\ln k < A\,\lambda_k$, $(1 \leq k < k_1)$, $\ln k_1 \geq A\,\lambda_{k_1}$ і $\ln k_1 = ln(k_1 - 1) + \ln(1 + \frac{1}{k_1-1}) < A\,\lambda_{k_1-1} + 1 < A\,\lambda_{k_1} + 1$. Тому, якщо покладемо $\lambda^*_k = \lambda_k$ для $1 \leq k \leq k_1$, то для таких k виконуються нерівності (8) і (9).

Покладемо тепер $j_1 = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_1 + 1) < A\,\lambda_{k_1+j}\}$ і з послідовності Λ викинемо члени $\lambda_{k_1+1}, \ldots, \lambda_{k_1+j_1}$, тобто, покладемо $\lambda^*_{k_1+1} = \lambda_{k_1+j_1+1}$. З огляду на (7) існує $k_2 = \min\{k \geq k_1 + 2 : \ln k \geq A\,\lambda_{k+j_1}\}$. Ясно, що $\ln k < A\,\lambda_{k+j_1}$ для $k_1 + 1 \leq k < k_2$, $\ln k_2 \geq A\,\lambda_{k_2+j_1}$ і $\ln k_2 \leq \ln(k_2 - 1) + 1 < A\,\lambda_{k_2+j_1} + 1$. Тому, якщо покладемо $\lambda^*_k = \lambda_{k+j_1}$ для $k_1 + 1 \leq k \leq k_2$,, то для таких k також мають місце нерівності (8) і (9).

Якщо k_l і j_{l-1} $(l \geq 2)$ вже вибрані, то покладаємо $j_l = \min\{j \in \mathbb{N} : \ln(k_l+1) < A\,\lambda_{k_l+j_1+\cdots+j_{l-1}+1}\}$ і з послідовності Λ викидаємо члени $\lambda_{k_l+j_1+\cdots+j_{l-1}+1}, \ldots, \lambda_{k_l+j_1+\cdots+j_l}$, тобто покладаємо $\lambda^*_{k_l+1} = \lambda_{k_l+j_1+\cdots+j_l+1}$. З огляду на (7) існує $k_{l+1} = \min\{k \geq k_l + 2 : \ln k \geq A\,\lambda_{k+j_1+\cdots+j_l}\}$. Ясно, що $\ln k < A\,\lambda_{k+j_1+\cdots+j_l}$ $(k_l + 1 \leq k < k_{l+1})$, $\ln k_{l+1} \geq A\,\lambda_{k_{l+1}+j_1+\cdots+j_l}$ і, як вище, $\ln k_{l+1} \leq A\,\lambda_{k_{l+1}+j_1+\cdots+j_l+1}$. Тому, якщо покладемо $\lambda^*_k = \lambda_{k+j_1+\cdots+j_l}$ для $k_l + 1 \leq k \leq k_{l+1}$, то для таких k знову маємо (8) і (9). Завдяки довільності $l \in \mathbb{N}$, лема 3 доведена.

3°. Перейдемо до доведення теореми. Передусім, зауважимо, що за нерівністю Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, для довільних функцій $F \in S(\Lambda)$ і $\varphi \in L$ має місце нерівність $\varphi(\ln \mu(\sigma, F)) \leq \varphi(\ln M(\sigma, F))$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Нехай $\ln n(t) = o(t), t \to \infty$. Неважко показати (на цьому зупинятися не будемо), що тоді існує неперервно диференційована функція $\varphi \in L^*_{\text{пз}}$ така, що $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x \ln x) \sim \varphi(x)$ при $x \to \infty$ і

$$\ln n(t) \leq \frac{t}{\varphi(t)}, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Завдяки монотонності функції φ існує єдине число $u_\nu > \lambda_\nu$ $(\nu = \nu(\sigma, F))$ таке, що

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(u_\nu)}} + \frac{1}{\varphi(u_\nu)} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda_\nu)}} - \frac{1}{\varphi(\lambda_\nu)}, \tag{11}$$

а при $t \geq u_\nu$ має місце нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda_\nu)}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}} - \frac{1}{\varphi(t)} \geq \frac{1}{\varphi(\lambda_\nu)}. \tag{12}$$

З (11) випливає, що

$$\varphi(u_\nu) = (1 + o(1))\varphi(\lambda_\nu), \quad \nu \to \infty. \tag{13}$$

Покладемо $\alpha(x) = 2 - 1/\sqrt{\varphi(x)}$. Тоді $\alpha(x) \uparrow 2$ $(x \to \infty)$, і за лемою 1, для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\sigma \geq 0$ зовні деякої множини скінченої міри має місце нерівність

(5). Тому, завдяки (12), маємо

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)}\le n(u_\nu)+\sum_{\lambda_n>u_\nu}\exp\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}(\alpha(t)-\alpha(\lambda_\nu))\,dt\}\le$$
$$\le n(u_\nu)+\int_{u_\nu}^{\infty}\exp\{-\int_{u_\nu}^{u}(\alpha(t)-\alpha(\lambda_\nu))\,dt\}\,dn(u)\le$$
$$\le n(u_\nu)+\int_{u_\nu}^{\infty}n(u)\exp\{-\int_{u_\nu}^{u}(\alpha(t)-\alpha(\lambda_\nu))\,dt\}(\alpha(u)-\alpha(\lambda_\nu))\,du\le$$
$$\le n(u_\nu)+\int_{u_\nu}^{u}\exp\{-\int_{u_\nu}^{u}(\frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda_\nu)}}-\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}})\,dt\}\,du\le$$
$$\le n(u_\nu)+\int_{u_\nu}^{u}\exp\{\frac{u}{\varphi(u)}-\int_{u_\nu}^{u}(\frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda_\nu)}}-\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}})\,dt\}du=$$
$$=n(u_\nu)+\exp\{\frac{u_\nu}{\varphi(u_\nu)}\}\int_{u_\nu}^{u}\exp\{-\int_{u_\nu}^{u}(\frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda_\nu)}}-\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}}-(\frac{t}{\varphi(t)})')\,dt\}\,du\le$$
$$\le\exp\left\{\frac{u_\nu}{\varphi(u_\nu)}\right\}(1+\int_{u_\nu}^{\infty}\exp\{-\int_{u_\nu}^{u}(\frac{1}{\varphi(\lambda_\nu)}+\frac{t\varphi'(t)}{\varphi^2(t)})\,dt\}\,du)\le$$
$$\le\exp\{\frac{u_\nu}{\varphi(u_\nu)}\}\big(1+\int_{u_\nu}^{\infty}\exp\{-\int_{u_\nu}^{u}\frac{dt}{\varphi(\lambda_\nu)}\}\,du\big)=$$
$$=\exp\{\frac{u_\nu}{\varphi(u_\nu)}\}\big(1+\int_{0}^{\infty}\exp\{-\frac{u}{\varphi(\lambda_\nu)}\}\,du\big)=$$
$$=\exp\{\frac{u_\nu}{\varphi(u_\nu)}\}(1+\varphi(\lambda_\nu))\le\exp\{\frac{u_\nu}{\varphi(u_\nu)}+\ln(1+\varphi(u_\nu))\}\le\exp\{u_\nu\}$$

для всіх досить великих ν. Тому, використовуючи (13), маємо

$$\varphi(\ln M(\sigma,F))\le\varphi(\ln\mu(\sigma,F)+u_\nu)\le\varphi(2\max\{\ln\mu(\sigma,F),u_\nu\})=$$
$$=(1+o(1))\max\{\varphi(\ln\mu(\sigma,F)),\varphi(u_\nu)\}=(1+o(1))\max\{\varphi(\ln\mu(\sigma,F)),\varphi(\lambda_{\nu(\sigma,F)})\}$$

при $0\le\sigma\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної міри, і нам залишилось показати, що при $0\le\sigma\to+\infty$ зовні такої ж множини має місце співвідношення

$$\varphi(\lambda_{\nu(\sigma,F)})\le(1+0(1))\varphi(\ln\mu(\sigma,F)). \tag{14}$$

Для цього виберемо в лемі 2 функцію $w(t)$ так, щоб $w(t)=t\ln^{-2}t$ при $t\ge e$. Тоді $\ln\mu(\sigma,F)\ge K\lambda_\nu\ln^{-2}\lambda_\nu$ для всіх $\sigma\ge0$ зовні деякої множини скінченної міри (тут K — деяка додатна стала). Звідси, завдяки умові $\varphi(x\ln x)\sim\varphi(x)$, $x\to\infty$, легко випливає співвідношення (14), і отже, достатність умови $\ln n(t)=o(t)$, $t\to\infty$, доведена.

Нехай тепер умова $\ln n(t)=o(t)$, $t\to\infty$, не виконується, тобто, при деякому A має місце (7). Виділимо, якщо треба, з Λ підпослідовність Λ^*, яка задовольняє умовам (8) і (9), і покладемо $a_n=0$, якщо $\lambda_n\ne\lambda_k^*$ і $a_n=a_k^*$, якщо $\lambda_n=\lambda_k^*$, де $a_k^*=\exp\{-\lambda_k^*\ln\varphi(\lambda_k^*)\}$. Отже, приходимо до функції

$$F_0(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp(s\lambda_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-\lambda_k\ln\varphi(\lambda_k)+s\lambda_k\},$$

де, для простоти, $\lambda_k = \lambda_k^*$. Оскільки $\ln k = O(\lambda_k)$, $k \to \infty$, то $F_0 -$ ціла функція. При $\ln \varphi(\lambda_k) \geq \sigma$ має місце нерівність $\exp\{-\lambda_k \ln \varphi(\lambda_k) + \sigma \lambda_k\} \leq 1$. Тому $\varphi(\lambda_{\nu(\sigma,F_0)}) \leq e^\sigma$ і $\ln \mu(\sigma, F) \leq \sigma \lambda_{\nu(\sigma,F_0)} \leq \sigma \varphi^{-1}(e^\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, тобто, завдяки умові $\varphi(x\varphi(x)) \sim \varphi(x)$, $x \to \infty$, маємо

$$\varphi(\ln \mu(\sigma, F_0)) \leq (1 + o(1))e^\sigma, \quad \sigma \to +\infty. \tag{15}$$

З іншого боку, для послідовності (k_j) з леми 3 маємо

$$M(\sigma,F) \geq \sum_{[\frac{1}{2}k_j] \leq k \leq k_j} \exp\{-\lambda_k \ln \varphi(\lambda_k) + \sigma \lambda_k\} \geq \frac{1}{2} k_j \exp\{-\lambda_{k_j} \ln \varphi(\lambda_{k_j}) + \sigma \lambda_{[\frac{1}{2}k_j]}\}.$$

Але

$$\lambda_{[\frac{1}{2}k_j]} \geq \frac{1}{A}(\ln[\frac{1}{2}k_j] - 1) \geq \frac{1}{A}(\ln k_j - 3) \geq \frac{1}{A}(A\,\lambda_{k_j} - 3) = \lambda_{k_j} - \frac{3}{A}.$$

Тому

$$\ln M(\sigma, F_0) \geq -\lambda_{k_j} \ln \varphi(\lambda_{k_j}) + (\sigma + A)\lambda_{k_j} - \frac{3\sigma}{A} - \ln 2,$$

і, якщо

$$\ln \varphi(\lambda_{k_j}) + \frac{A}{4} \leq \sigma + A \leq \ln \varphi(\lambda_{k_j}) + \frac{A}{2}, \tag{16}$$

то

$$\ln M(\sigma, F_0) \geq -\lambda_{k_j} \ln \varphi(\lambda_{k_j}) + \lambda_{k_j}(\ln \varphi(\lambda_{k_j}) + \frac{A}{4}) + O(\sigma) =$$
$$= \frac{A}{4}\lambda_{k_j} + O(\sigma) \geq \frac{A}{4}\varphi^{-1}(e^{\sigma + A/2}(1 + o(1)),\ \sigma \to +\infty,$$

тобто, завдяки (15),

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \geq (1 + o(1))e^{\sigma + A/2} \geq (1 + o(1))e^{A/2}\varphi(\ln \mu(\sigma, F_0))$$

при $\sigma \to +\infty$ вздовж множини E, яка є об'єднанням проміжків (16). Оскільки довжина проміжку (16) дорівнює $\frac{A}{4}$, то $\mathrm{mes} E = \infty$. Отже, якщо умова $\ln n(t) = o(t)$, $t \to \infty$, не виконується, то для будь-якої функції $\varphi \in L^*_{\text{пз}}$ існує функція $F \in S(\Lambda)$ така, що співвідношення (4) не виконується на множині нескінченної міри. Теорему повністю доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем. заметки. 1985. Т.37, № 1. С.41–47.
2. Шеремета М.Н. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. 1987. Т.42, № 2. С.215–226.
3. Хом'як М.М. *О максимамальном члене ряда Дирихле, задающего целую функцию*// Изв. вузов. Матем. 1982. № 10. С.79–81.
4. Шеремета М.М. *О производной целого ряда Дирихле* // Матем. сб. 1988. Т.137(179), № 1(9). С.128–139.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшло 19.10.1993