Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517.53

# ІСНУВАННЯ ТА ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ, ДЛЯ ЯКИХ В СПІВВІДНОШЕННІ ДЕФЕКТІВ ЯН ЛЕ ДОСЯГАЄТЬСЯ РІВНІСТЬ

А.А. ГОЛЬДБЕРГ

Abstract. A. Gol'dberg, *Existence and some properties of meromorphic functions for which Yang Le deficiency relation reaches equality* // Matematychni Studii. **3** (1994) 53–60.

The difference between the deficiency in Yang Le sense and the classical Nevanlinna one consists in that Yang Le deficiency takes into account only $a$-points of order $\leq p$, $1 \leq p \leq \infty$. It is shown that Yang Le deficiency relation (1964) cannot be improved. Existence of extremal functions for each $p$ is proved and some their properties are obtained.

Стандартні позначення неванліннівської теорії (див., наприклад, [1]) вживатимуться без пояснень. Скрізь під меромофною функцією розумітимемо функцію, мероморфну в $\mathbb{C}$. Через $n_p(r,a,f)$ позначатимемо кількість $a$-точок функції $f$ порядку $\leq p$, що містяться в крузі $D(r)=\{z:|z|\leq r\}$, причому їхні порядки враховуються, $1\leq p\leq\infty$. Якщо ж кожну $a$-точку $f$ порядку $\leq p$ рахуємо один раз, не звертаючи увагу на її порядок, то отримаємо число $\overline{n}_p(r,a,f)$. Величини $N_p(r,a,f)$ та $\overline{N}_p(r,a,f)$ визначаються за $n_p(r,a,f)$ та $\overline{n}_p(r,a,f)$, як звичайно. Відмітимо, що $N_\infty(r,a,f)=N(r,a,f)$, а $\overline{N}_\infty(r,a,f)=\overline{N}(r,a,f)$. Ян Ле [2] ввів $p$-дефект функції $f$ формулою

$$\delta_p(a,f)=1-\varlimsup_{r\to\infty} N_p(r,a,f)/T(r,f).$$

Величину $\delta_\infty(a,f)=\Theta(a,f)$ було введено ще Р. Неванлінною ([3], с.98). Ян Ле [2] довів таку теорему.

**Теорема 1.** *Для кожної трансцендентної мероморфної функції $f$ справедливе таке співвідношення дефектів*

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta_p(a,f)\leq 2+2/p. \tag{1}$$

При $p=\infty$ цю нерівність було доведено Р. Неванлінною ([3], с.102). Трохи слабший результат, ніж (1), дещо раніше за Ян Ле довів Сюн Цзінлай [4].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D35.

Ян Ле відмітив, що при $p = 1$ та $p = 2$ в (1) може досягатися рівність. По суті відповідні приклади давно відомі ([3], с. 101-102), так само, як у випадку $p = \infty$. Наскільки мені відомо, при $p = 3, 4, 5, \ldots$ приклади мероморфних функцій, для яких в (1) досягається рівність, вперше будуть вказані в цій статті.

Приклад 1. Задамо ріманову поверхню $F$ комплексом відрізків $S$, зображеним на мал. 1, якщо $p$ – число непарне, і на мал. 2, якщо $p$ – число парне. Про задання ріманових поверхонь комплексами відрізків та про вживану термінологію див., наприклад, [1, гл.VII,§4]. В нашому випадку беремо за базисну криву одиничне коло, за базисні точки – точки $1, i, -1, -i$. Користуючись відомим критерієм типу [5, гл.VII,§4] або методом квазіконформних відображень, легко переконатися, що ріманова поверхня $F$ конформно еквівалентна $\mathbb{C}$. Нехай мероморфна функція $f$ конформно відображає $\mathbb{C}$ на $F$. З комплексу відрізків $S$ безпосередньо видно, що група перетворень накладання ріманової поверхні $F$ має дві твірні. Тому їй відповідає дискретна група $\Gamma$ конформних відображень $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ з двома (і не більше) твірними [6, с.258]. Група $\Gamma$ породжується перетвореннями $z_1 = z + a$, $z_2 = z + b$, $\operatorname{Im}(a/b) \neq 0$, функція $f$ є автоморфною відносно $\Gamma$, тобто еліптичною з періодами $a$ і $b$. Нехай $D$ є фундаментальною областю функції $f$, яка є прообразом частини $F$, що складається з півлистів $F$, які проектуються в одиничний круг або в зовнішність одиничного кола і яким на комплексі відрізків $S$ відповідають точки і хрестики, що на мал. 1 або 2 лежать всередині прямокутника $\Pi$ , обведеного штриховою лінією , а також з деяких дуг над одиничним колом, по яких склеєні ці півлисти. Позначимо через $|D|$ площу $D$. Вона дорівнює площі $D_1$ – паралелограма періодів $f$. Всередині $\Pi$ лежать $4k + 2$ точок і стільки ж хрестиків, якщо $p$ – число непарне, і по $4k$ точок і хрестиків, якщо $p$ – парне число. Отже, в $D$ (і в $D_1$) містяться $2p$ $a$-точок (з врахуванням їх порядків) для будь-якого $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Якщо $a \neq 1, i, -1, -i$, то всі $a$-точки прості. Серед 1-точок, що містяться в $D$, одна точка порядку $p+1$, всі інші $p-1$ 1-точок прості. Те ж саме справедливе для $i$-, $(-1)$-, $(-i)$-точок. Тому ($K = \pi/|D|$, $r \to \infty$)

$$n(r, a, f) \sim 2pKr^2,$$

$$n_p(r, a, f) \sim \begin{cases} 2pKr^2, & a \notin \{1, -i, -1, -i\} \\ (p-1)Kr^2, & a \in \{1, i, -1, -i\}. \end{cases}$$

Звідси

$$T(r, f) \sim N(r, a, f) \sim pKr^2, \quad N_p(r, a, f) \sim \frac{p-1}{2}Kr^2, \ r \to \infty, \ a \in \{1, i, -1, -i\},$$

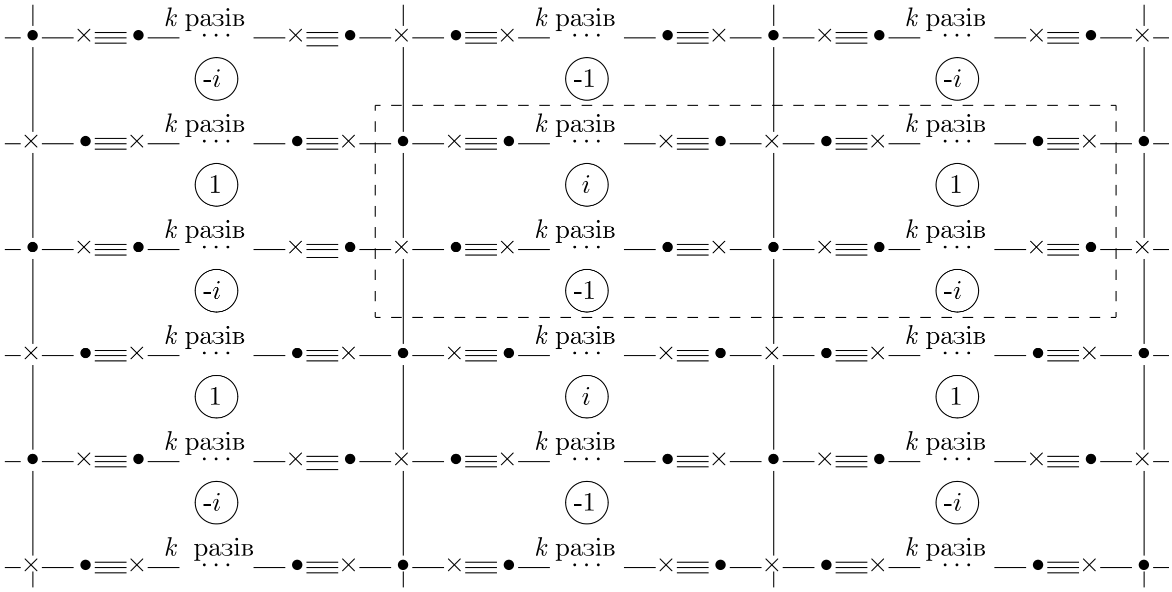
$$\delta_p(a, f) = \frac{p+1}{2p}, \quad \delta_p(1, f) + \delta_p(i, f) + \delta_p(-1, f) + \delta_p(-i, f) = 2 + \frac{2}{p},$$

тобто в (1) має місце рівність.

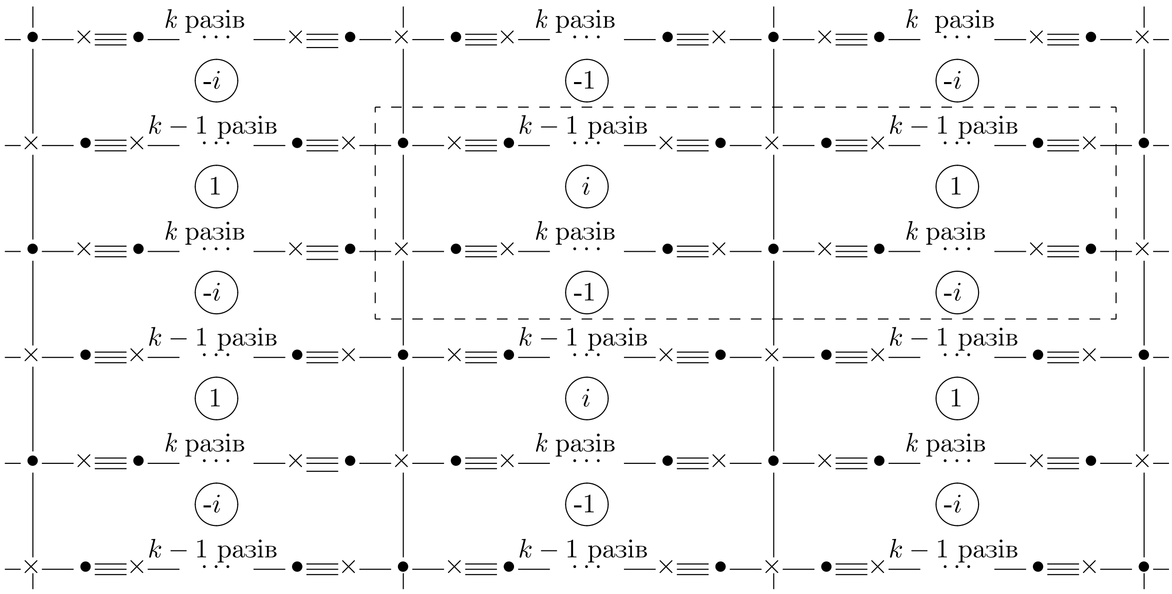
Для цілої функції $f$ виконується $\delta_p(\infty, f) = 1$, тому з (1) випливає

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \delta_p(a, f) \leq 1 + 2/p.$$

Насправді справедлива більш точна оцінка.




Мал. 1 $(p = 2k + 1,\ k \geq 0)$




Мал. 2 $(p = 2k,\ k \geq 1)$

**Теорема 2.** *Для кожної трансцендентної цілої функції $f$ справедливе таке співвідношення дефектів*

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \delta_p(a,f) \le 1 + 1/p. \tag{2}$$

Хоч теорема 2 не є наслідком теореми 1, вона доводиться тим самим методом, що і теорема 1, і безперечно була відома Ян Ле, який в [2] сформулював близькі результати. Нехай $q \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}, 1 \le j \le q$. За другою основною теоремою теорії розподілу значень

$$(q-1)\,T(r,f) \le \sum_{j=1}^{q} \bar{N}(r,a_j) + Q(r,f).$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,a) \le \frac{p}{p+1}\bar{N}_p(r,a) + \frac{1}{p+1}N(r,a) \le \\ \le \frac{p}{p+1}\bar{N}_p(r,a) + \frac{1}{p+1}T(r,f) + O(1), r \to \infty,\end{aligned} \tag{3}$$

то

$$q\frac{p}{p+1}T(r,f) \le T(r,f) + \frac{p}{p+1}\sum_{j=1}^{q}\overline{N_p}(r,a_j) + Q(r,f),$$

$$\sum_{j=1}^{q}\Big\{1 - \frac{\overline{N_p}(r,a)}{T(r,f)}\Big\} \le (1+1/p)T(r,f) + Q(r,f).$$

Далі стандартним способом виводиться (2).

Покажемо, що в (2) може досягатися рівність. Можна було би і в цьому випадку використати ріманові поверхні, але ми спроможні записати потрібну функцію в явній формі.

Приклад 2. Нехай

$$\begin{aligned}f(z) = \frac{1}{2p-1}e^{(2p-1)z} - \frac{C_p^1}{2p-3}e^{(2p-3)z} + \frac{C_p^2}{2p-5}e^{(2p-5)z} + \cdots + \\ + (-1)^{p-1}C_p^{p-1}e^z + (-1)^{p+1}e^{-z},\end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2p-1} - \frac{C_p^1}{2p-3} + \frac{C_p^2}{2p-5} + \cdots + (-1)^{p-1}C_p^{p-1} + (-1)^{p+1}.$$

Покажемо, що $A \ne 0$. Справді,

$$A = \int_0^1 \frac{(t^2-1)^p - (-1)^p}{t^2}\,dt + (-1)^{p+1}.$$

З огляду на те, що при $0 \le t \le 1$ маємо $|t^2-1| \le 1$, знак підінтегрального виразу такий самий, як знак $(-1)^{p+1}$. Тому $\mathrm{sign}A = (-1)^{p+1}$

Функція $f$ має період $2\pi i$. В смузі $H = \{z : 0 \le \mathrm{I}mz < 2\pi\}$ функція $f$ для будь-якого $a \in \mathbb{C}$ має $2p$ $a$-точок (враховуючи їх порядки), бо $f(z) = F(e^z)$, де

$$F(u) = \frac{1}{u}\{\frac{u^{2p}}{2p-1} - \frac{C_p^1}{2p-3}u^{2p-2} + \frac{C_p^2}{2p-5}u^{2p-4} - \cdots + (-1)^{p-1}C_p^{p-1}u^2 + (-1)^{p+1}\}.$$

Ми маємо $f'(z) = e^{-z}(e^{2z}-1)^p$, $f(0) = A$, $f(\pi i) = -A$. Отже, $f$ в $z = 0$ має $A$-точку $(p+1)$-го порядку, а в $z = \pi i$ має $A$-точку $(p+1)$-го порядку. Оскільки $f'$ в $H$ має нулі лише в точках 0 та $\pi i$, то всі інші $A$- і $(-A)$-точки $f$ в $H$ прості. Легко порахувати, що

$$n_p(r, \pm A, f) \sim (p-1)\frac{r}{\pi}, r \to \infty, \quad N_p(r, \pm A, f) \sim (p-1)\frac{r}{\pi}, \quad r \to \infty.$$

За теоремою Валірона [1, с.47, теорема 6.1], $T(r, f) = 2pT(r, e^z) + O(1) = 2pr/\pi +$ $+O(1)$, $r \to \infty$. Звідси випливає, що $\delta_p(\pm A, f) = (p+1)/2p$ і $\delta_p(A, f) +$ $\delta_p(-A, f) = 1 + 1/p$, тобто для нашої функції $f$ в (2) має місце рівність.

Виведемо деякі властивості мероморфних функцій, для яких в (1) наявна рівність. Обмежимось мероморфними функціями скінченного порядку, але всі міркування справедливі і для всіх таких мероморфних функцій, для яких $Q(r, f) = = o(T(r, f))$, $r \to \infty$, без виняткових інтервалів.

Введемо деякі позначення. Валіронівським $p$-дефектом називатимемо

$$\Delta_p(a, f) = 1 - \varliminf_{r\to\infty} N_p(r, a, f)/T(r, f).$$

Позначимо через $\bar{n}(r, a, f, [2, p])$ і $\bar{n}(r, a, f, [p+2, \infty))$ кількість $a$-точок функції $f$ в крузі $D(r)$, причому в першому випадку рахуються лише $a$-точки порядку $\ge 2$ і $\le p$, а в другому – $a$-точки порядку $\ge p+2$, в обох випадках кожна $a$-точка рахуţься один раз, не зважаючи на її порядок. За допомогою $\bar{n}(r, a, f, [2, p])$ і $\bar{n}(r, a, f,$
$[p+2, \infty))$ звичайним чином будуються функції $\bar{N}(r, a, f, [2, p])$ і $\bar{N}(r, a, f, [p+$ $2, \infty))$. Через $N_1^f(r)$ позначатимемо величину, яку Неванлінна позначав через $N_1(r)$, тобто $N_1^f(r) = N(r, 0, f') + 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f')$.

**Теорема 3.** *Нехай $f$ – трансцендентна мероморфна функція скінченного порядку, для якої в (1) має місце рівність. Тоді для кожного $a \in \bar{\mathbb{C}}$ виконується*

*1)* $\Delta_p(a, f) = \delta_p(a, f)$;

*2)* $\bar{N}(r, a, f, [2, p]) = o(T(r, f))$, $r \to \infty$, $\quad \bar{N}(r, a, f, [p+2, \infty)) = o(T(r, f))$, $r \to \infty$;

*3)* $\Delta_\infty(a, f) = \delta_\infty(a, f) = \frac{p}{p+1}\delta_p(a, f)$;

*4)* $\delta(a, f) = \Delta(a, f) = 0$;

*і для всіх $k \in \mathbb{N}$ справджується*

*5)* $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{T(r, f^{(k)})}{T(r, f)} = 1 + k(1 - \delta_\infty(\infty, f))$.

Нехай $a \in \bar{\mathbb{C}}, b_1, \dots, b_{q-1} \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$ – різні числа, $q \ge 3$. За другою основною теоремою Неванлінни

$$(q-2)T(r, f) \le \bar{N}(r, a, f) + \sum_{j=1}^{q-1} \bar{N}(r, b_j, f) + O(\ln r), \quad \to \infty.$$

З (3) одержуємо

$$(q-2)T(r,f)\le \bar N(r,a,f)+\frac{p}{p+1}\sum_{j=1}^{q-1}\bar N_p(r,b_j,f)+\frac{q-1}{p+1}T(r,f)+O(\ln r),\ r\to\infty, \tag{4}$$

$$(q-2)T(r,f)\le \frac{p}{p+1}\bar N_p(r,a.f)+\frac{p}{p+1}\sum_{j=1}^{q-1}\bar N_p(r,b_j,f)+ \\ +\frac{q}{p+1}T(r,f)+O(\ln r),\quad r\to\infty. \tag{5}$$

З (5) випливає

$$T(r,f)-\bar N_p(r,a)+\sum_{j=1}^{q-1}(T(r,f)-\bar N_p(r,b_j))\le 2\frac{p+1}{p}T(r,f)+O(\ln r),\ r\to\infty,$$

$$1-\frac{\bar N_p(r,a)}{T(r,f)}+\sum_{j=1}^{q-1}(1-\frac{\bar N_p(r,b_j)}{T(r,f)})\le 2+\frac{2}{p}+o(1),\ r\to\infty.$$

Оскільки

$$\varlimsup_{r\to\infty}\{1-\frac{\bar N_p(r,a)}{T(r,f)}+\sum_{j=1}^{q-1}(1-\frac{\bar N_p(r,b_j)}{T(r,f)})\}\ge$$

$$\ge\varlimsup_{r\to\infty}(1-\frac{\bar N_p(r,a)}{T(r,f)})+\sum_{j=1}^{q-1}\varliminf_{r\to\infty}\left(1-\frac{N_p(r,b_j)}{T(r,f)}\right)=\Delta_p(a,f)+\sum_{j=1}^{q-1}\delta_p(b_j,f),$$

то

$$\Delta_p(a,f)+\sum_{j=1}^{q-1}\delta_p(b_j,f)\le 2+2/p.$$

Звідси

$$\Delta_p(a,f)+\sum_{b\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a\}}\delta_p(b,f)\le 2+2/p. \tag{6}$$

За умовою

$$\delta_p(a,f)+\sum_{b\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a\}}\delta_p(b,f)=2+2/p. \tag{7}$$

З (6) і (7) випливає $\Delta_p(a,f)\le\delta_p(a,f)$, тобто $\Delta_p(a,f)=\delta_p(a,f)$. Твердження 1) доведене.

Припустимо, що твердження 2) невірне. Тоді існують такі $\eta>0$, $a_1\in\bar{\mathbb{C}}$ і послідовність $(r_j), r_j\to\infty$, що

$$\bar N(r_j,a_1,[2,p])+\bar N(r_j,a_1,[p+2,\infty))\ge\eta T(r_j,f).$$

Нехай $a_2,\dots,a_q$ – довільні $q-1$ різних чисел з $\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a_1\}$. Позначимо через $\bar N(r,a,[p+1])$ рахуючу функцію Неванлінни, яка враховує $a$-точки функції $f$

лише порядку рівно $p+1$, причому кожну таку точку враховуємо один раз. Маємо

$$\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r,a_\nu,[2,p])+\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r,a_\nu,[p+2,\infty))+p\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r,a_\nu,[p+1,\infty))\leq$$
$$\leq\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r,a_\nu,[2,p])+p\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r,a_\nu,[p+1])+(p+1)\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r,a_\nu,[p+2,\infty))\leq$$
$$\leq N_1^f(r)\leq 2T(r,f)+O(\ln r),\ r\to\infty.$$

Звідси

$$p\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r_j,a_\nu,[p+1,\infty))\leq(2-\eta)T(r_j,f)+O(\ln r_j),\ j\to\infty,$$

і, враховуючи другу основну теорему Неванлінни, отримаємо

$$(q-2)T(r_j,f)\leq\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r_j,a_\nu)+O(\ln r_j)=\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}_p(r_j,a_\nu)+\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}(r_j,a_\nu,[p+1,\infty))+$$
$$+O(\ln r_j)\leq\sum_{\nu=1}^{q}\bar{N}_p(r_j,a_\nu)+\frac{2-\eta}{p}T(r_j,f)+O(\ln r_j),\ r_j\to\infty,$$

$$\sum_{\nu=1}^{q}(T(r_j,f)-\bar{N}_p(r_j,a_\nu))\leq(2+\frac{2-\eta}{p})T(r_j,f)+O(\ln r_j),\ r_j\to\infty,$$
$$\sum_{\nu=1}^{q}\delta_p(a_\nu,f)\leq 2+\frac{2-\eta}{p}.$$

Внаслідок довільності $q$ приходимо до $\sum_{a\in\bar{\mathbb{C}}}\delta_p(a,f)\leq 2+\frac{2-\eta}{p}$, що суперечить умові теореми. Властивість 2) доведена.

З (4) дістаємо

$$q-2\leq\varliminf_{r\to\infty}\frac{\bar{N}(r,a,f)}{T(r,f)}+\frac{p}{p+1}\sum_{j=1}^{q-1}(1-\delta_p(b_j,f))+\frac{q-1}{p+1},$$

звідки

$$\frac{p}{p+1}\sum_{b\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a\}}\delta_p(b,f)-1\leq\varliminf_{r\to\infty}\frac{\bar{N}(r,a,f)}{T(r,f)},$$

або

$$1-\frac{p}{p+1}\delta_p(a,f)\leq\varliminf_{r\to\infty}\frac{\bar{N}(r,a,f)}{T(r,f)}. \tag{8}$$

З (3) дістаємо

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\bar{N}(r,a,f)}{T(r,f)}\leq\frac{p}{p+1}(1-\delta_p(a,f))+\frac{1}{p+1}=1-\frac{p}{p+1}\delta_p(a,f). \tag{9}$$

З (8) і (9) випливає

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r,a,f)}{T(r,f)} = 1 - \frac{p}{p+1}\delta_p(a,f), \tag{10}$$

тобто властивість 3). З (3) і (10) дістаємо

$$1 - \frac{p}{p+1}\delta_p(a,f) \le \frac{p}{p+1}(1-\delta_p(a,f)) + \frac{1}{p+1}\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,a)}{T(r,f)},$$

звідки $\Delta(a,f) = 0$ і виконується 4). Оскільки $N(r,f^{(k)}) = N(r,f) + k\bar{N}(r,f)$ і $m(r,f^{(k)}) \le m(r,f)+O(\ln r)$, $r\to\infty$ [1,с.131], то $N(r,f)+k\bar{N}(r,f) = N(r,f^{(k)}) \le$ $\le T(r,f) + k\bar{N}(r,f) + O(\ln r)$, $r\to\infty$. З цієї нерівності та властивостей 3) і 4) випливає властивість 5). Теорему 3 доведено.

Для $p=1$ властивості 3)–5) довів І Хонсюн [7].

**Теорема 4.** *Нехай $f$ - трансцендентна ціла функція скінченного порядку, для якої в (2) має місце рівність. Тоді для кожного $a\in\mathbb{C}$ виконуються 1)–4) з теореми 3.*

Доведення проводиться так само, як доведення теореми 3 з очевидними незначними відхиленнями. Ми гадаємо, що виконується також властивість 5) з теореми 3, тобто $T(r,f^{(k)}) \sim T(r,f)$, $r\to\infty$, $k\in\mathbb{N}$, але на цей час не вміємо цього довести.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970.– 592 с.
2. Ян Ле. *Кратні значення мероморфних функцій та їх комбінацій* // Шусюе сюебао, Acta math. sinica. 1964. Т.14, No 3. С.428–437 (кит.)
(англ. переклад: Yang Le. *The multiple values of meromorphic functions and of combinations of functions* // Chinese Math. 1964. T.5, No 3. P.460–470 ).
3. Nevanlinna R. Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes.– Paris: Gauthier-Villars, 1929.– 171 p.
4. Hiong King-lai. *Un problème d'unicité relatif aux fonctions méromorphes* // Scientia sinica. 1963. V.12, No 6. P.743–750.
5. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: Физматгиз, 1960.– 320 с.
6. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.– М.: ИЛ, 1960.– 344 с.
7. Yi Hong-Xun. *On a result of Singh* // Bull. Austral. Math. Soc. 1990. V.41. P.417–470.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

*Надійшло 12.10.1993*