Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517.53

МІНІМАЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗАДАНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ НУЛІВ

І.В. Хирівський

Abstract. I.V. Khyrivskyĭ, *Minimal growth of entire functions with given sequence of zeros* // Matematychni Studii. **3** (1994) 49–52.

Let (z_j) be a sequence of complex numbers satisfying $\lim_{j\to\infty} z_j = \infty$ and $n(r)$ be its counting function such that

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln\ln r} = \alpha > 0.$$

It is shown that there exists an entire function f with zeros in the points z_j and only in them, such that for any $\varepsilon > 0$ there exists subset $E \subset [1,\infty)$ of finite logarithmic measure such that

$$\ln\ln \mathcal{M}(r,f) = o((n(r))^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}), \ \ r\to\infty, \ \ r\notin E.$$

For $\varepsilon = 0$ this assertion is not valid for some sequence (z_j).

Нехай $A = (z_j)$ – деяка послідовність комплексних чисел така, що $z_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Через $G(A)$ позначимо клас функцій f, послідовність нулів яких збігається з A.

Нехай $n(r)$ – рахуюча функція послідовності A. Через $\mathcal{F}$ позначимо клас підмножин $[1,\infty)$, які мають скінченну логарифмічну міру. Як звично, позначимо $\mathcal{M}(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Припустимо, що

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} > 0.$$

А.А. Гольдберг [1, теорема 6] показав, що якщо $\varepsilon > 0$, то існує ціла функція f з нулями в точках z_j і лише в них, така, що

$$\ln\ln \mathcal{M}(r,f) = o((\ln n(r))^{2+\varepsilon}), \ \ r\to\infty, \ \ r\notin E\in\mathcal{F}.$$

Він також показав, що показник $2+\varepsilon$ в цьому співвідношенні не можна замінити на 1, і поставив питання, чи не можна замінити $2+\varepsilon$ на $1+\varepsilon$. В. Бергвейлер [2] довів, що $2+\varepsilon$ не можна замінити навіть на 2.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D20.

У цій роботі доведено результати, аналогічні згаданим результатам А.А. Гольдберга і В.Бергвейлера, але умову

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} > 0$$

замінено на слабшу. А саме, доведено наступну теорему і показано, що її в певному розумінні не можна покращити.

Теорема. *Нехай A – деяка послідовність комплексних чисел і*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln\ln r} = \alpha > 0. \tag{1}$$

Тоді існує функція $f \in G(A)$ така, що для будь-якого $\delta > \frac{1}{\alpha}$ існує множина $E \in \mathcal{F}$ така, що

$$\ln\ln \mathcal{M}(r,f) = o((n(r))^{\delta}), \quad r\to\infty, \quad r \notin E. \tag{2}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $1 < |z_1| \le |z_2| \le \dots$. Нехай γ і η – такі числа, що $0<\gamma<\eta$. Візьмемо

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\Big(\frac{z}{z_k}, [(\ln k)^{1+\eta}]\Big), \tag{3}$$

де $E(z,p)$ – первісний множник Вейєрштрасса роду p. Добуток (3) рівномірно і абсолютно збіжний на будь-якій обмеженій множині. Цей відомий факт буде також випливати з наведених нижче оцінок.

Оскільки $\ln|E(z,p)| \le |z|^{p+1}$ при $|z|<\infty$, $p\ge 0$ [3, c.131], то

$$\ln \mathcal{M}(r,f) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_k|}\right)^{[(\ln k)^{1+\eta}]+1} =$$
$$= \left(\sum_{|z_k|\le r} + \sum_{r<|z_k|\le r'} + \sum_{|z_k|>r'}\right)\left(\frac{r}{|z_k|}\right)^{[(\ln k)^{1+\eta}]+1} =$$
$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \tag{4}$$

де $r' = r(1+(\ln n(r))^{-\gamma})$, $r\ge r_0$, $n(r_0)\ge 3$.

Використавши теорему Бореля-Неванлінни [4, c.120] з $u(r) = \ln\ln n(e^r)$ і $\varphi(u) = e^{-\gamma u}$ та враховуючи, що $\exp\{(\ln n(r))^{-\gamma}\} \ge 1 + (\ln n(r))^{-\gamma}$, отримаємо

$$n(r') \le (n(r))^e, \quad r\notin E \in \mathcal{F}. \tag{5}$$

Оцінимо окремо суми в (4). Маємо

$$\Sigma_3 \le \sum_{|z_k|>r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^{(\ln k)^{1+\eta}} \le \sum_{|z_k|>r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^{(\ln n(r))^{\gamma}(\ln k)^{1+\eta-\gamma}}.$$

Оскільки при $r \geq r_0$ $\left(\frac{r'}{r}\right)^{(\ln n(r))^\gamma} = (1 + (\ln n(r))^{-\gamma})^{(\ln n(r))^\gamma} > 2$, то

$$\Sigma_3 \leq \sum_{|z_k|>r'} 2^{-(\ln k)^{1+\eta-\gamma}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(\ln k)^{1+\eta-\gamma}} = K < \infty. \tag{6}$$

Враховуючи (5), при $r \notin E$ отримуємо

$$\Sigma_2 \leq \sum_{r<|z_k|\leq r'} 1 \leq n(r') \leq (n(r))^e. \tag{7}$$

Оцінимо тепер Σ_1. Враховуючи (1), для кожного δ_1, $\delta_1 > \frac{1}{\alpha}$, маємо

$$\ln r < (n(r))^{\delta_1}, \ \ r \geq r_0(\delta_1). \tag{8}$$

Тому

$$\begin{aligned}\Sigma_1 \leq n(r) r^{(\ln n(r))^{1+\eta}+1} = \\ = \exp\{(\ln n(r))^{1+\eta} \ln r + \ln r + \ln n(r)\} \leq \\ \leq \exp\{3(\ln n(r))^{1+\eta}(n(r))^{\delta_1}\}, \ \ r \geq r_0, \ \ r \to \infty.\end{aligned} \tag{9}$$

Враховуючи (4), (6), (7), (9), отримуємо (2). Теорему доведено.

Покажемо, що (2) покращити не можна, тобто існує така множина A, для якої виконується (1), що для будь-якої функції $f \in G(A)$ і будь-якої множини $E \in \mathcal{F}$ виконується

$$\varlimsup_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln\ln \mathcal{M}(r,f)}{(n(r))^{1/\alpha}} \geq 1, \tag{10}$$

де $0 < \alpha < \infty$.

Нехай f – ціла функція з додатними нулями z_k. Як показано в [4, сс.338–340], якщо виконується

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k} = \infty, \tag{11}$$

то для будь-якого K, $0 < K < \infty$, виконується

$$\ln \mathcal{M}(r,f) > Kr, \quad r \geq r_0(K).$$

Тоді

$$\ln\ln \mathcal{M}(r,f) > \ln r, \quad r \geq r_0(1). \tag{12}$$

Нехай $z_1 = 1 < z_2 < z_3 < \dots$ і $\lim_{j\to\infty} z_j = \infty$. Нехай в точці z_k є нуль порядку $[z_k]$. Тоді $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{[z_k]}{z_k} = \infty$. Легко бачити, що

$$n(r) = \sum_{j=1}^{k} [z_j], \quad z_k \leq r < z_{k+1}. \tag{13}$$

Послідовність z_k визначимо рекурентно

$$z_{k+1} = 2\exp\left\{ \left(\sum_{j=1}^{k} z_j \right)^{1/\alpha} \right\}.$$

Тоді

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln\ln r} = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln n(z_k)}{\ln\ln z_{k+1}} = \alpha,$$

тобто виконується (1).

Покладемо $A_k = z_{k+1}/2$. Тоді множина $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}[A_k, 2A_k)$ має нескінченну логарифмічну міру і, отже, для кожної множини $E \in \mathcal{F}$ множина $E_1 \setminus E$ має нескінченну логарифмічну міру. Завдяки (13),

$$\ln r \geq \ln A_k \geq (n(r))^{1/\alpha}, \quad A_k \leq r < 2A_k,$$

і внаслідок (12), при $r \geq r_0(1)$ і $r \in E_1$ маємо

$$\ln\ln \mathcal{M}(r,f) \geq \ln r \geq (n(r))^{1/\alpha},$$

тобто

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E}}} \frac{\ln\ln \mathcal{M}(r,f)}{(n(r))^{1/\alpha}} \geq 1.$$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Гольдберг А.А., *О представлении мероморфных функций в виде частного целых функций* // Известия вузов. Математика. 1972. № 10. С.13–17.
2. Bergweiler W., *A question of Gol'dberg concerning functions with prescribed zeros* // J. d'Analyse Math. 1994. V.63. P.121–129.
3. Blumenthal O., *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini.* – Paris: Gauthier-Villars.–1910.
4. Гольдберг А.А., Островский И.В., Распределение значений мероморфных функций.– М.: Наука, 1970.

Україна, 290044, Львів-44, Куликівська 39а/11

Надійшла 16.12.1993